# MAT0501 e MAT5734 - Anéis e Módulos - 2010

## Lista 1

1. Seja $R$ um anel e $S$ um subanel de $R$. Pode acontecer que:
   (a) $R$ seja anel com unidade e $S$ não.
   (b) $S$ seja anel com unidade e $R$ não.
   (c) $R$ e $S$ sejam anéis com unidade, mas a unidade de $R$ é diferente da unidade de $S$.

   Dar exemplos que ilustrem cada uma das situações acima.

2. Seja $R = M_n(D)$ o anel das matrizes $n \times n$ sobre um anel com divisão $D$. Mostre que:
   (a) $Z(R) = \{\lambda I_n, \lambda \in Z(D)\}$, onde $I_n$ é a matriz identidade $n \times n$.
   (b) Mostre que $R$ é um anel simples.

3. Seja $R$ um anel comutativo tal que $R^2 \neq \{0\}$ e possuindo exatamente dois ideais. Prove que $R$ é um corpo.

4. Seja $R$ um anel com unidade e $I \neq R$ um ideal de $R$. Mostre, usando o Lema de Zorn, que $I$ está contido em um ideal maximal de $R$.

5. Seja $R$ um anel comutativo com 1. Prove que:
   (a) $M$ é um ideal maximal de $R$ se, e somente se, $R/M$ é um corpo.
   (b) $P$ é um ideal primo de $R$ se, e somente se, $R/P$ é um domínio de integridade.
   (c) Todo ideal maximal de $R$ é primo.

6. Seja $I$ um ideal à esquerda de um anel $R$. O conjunto

   $$\mathrm{Anl}(I) = \{x \in R | xa = 0 \forall a \in I\}$$

   é chamado **anulador** de $I$. Mostre que $\mathrm{Anl}(I)$ é um ideal (bilateral) de $R$.

7. Seja $R$ um anel com unidade, finito. Mostre que para todo $x \neq 0$ em $R$ temos que, ou $x$ é inversível, ou $x$ é divisor de 0.

8. Seja $R$ um anel com unidade e suponha que exista $x \in R$, tal que $x$ é inversível à esquerda, mas não é inversível à direita. Mostre que $x$ possui infinitos inversos à esquerda. Dê um exemplo de um anel que tenha um elemento como o descrito acima.

9. Seja $R$ um anel com unidade e sejam $a, b \in R$. Mostre que $1 - ab$ é inversível se, e somente se, $1 - ba$ é inversível. Nesse caso, determine $(1 - ab)^{-1}$.

10. Seja $R$ um anel tal que $x^2 = x$ para todo $x \in R$. Mostre que $R$ é comutativo.

11. Seja $R$ um anel sem elementos nilpotentes não nulos. Mostre que se $e \in R$ é idempotente, então $e \in Z(R)$.

12. Seja $R$ um anel tal que $x^3 = x$ para todo $x \in R$. Mostre que $R$ é comutativo.

13. Seja

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} x+y & 4y \\ -y & x-y \end{bmatrix} | x, y \in \mathbb{Q} \right\}.$$

Mostre que $S$ é um subcorpo de $M_2(\mathbb{Q})$ isomorfo ao corpo

$$\mathbb{Q}(\sqrt{-3}) = \{a + b\sqrt{-3}\; a, b \in \mathbb{Q}\}.$$

(*Sugestão* : Considere a matriz $\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$.)

14. Seja $\mathbb{H}$ o subconjunto de $M_2(\mathbb{C})$ constituído pelas matrizes da forma

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} a+ib & c+id \\ -c+id & a-ib \end{bmatrix}, a, b, c, d \in \mathbb{R}.$$

Mostre que $\mathbb{H}$ é um subanel de $M_2(\mathbb{C})$. Mostre que $\mathbb{H}$ é um anel com divisão não comutativo. Sejam

$$\mathbf{1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{i} = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}, \mathbf{j} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{k} = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix} \in H.$$

Então $\mathbf{q} = a\mathbf{1} + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}, a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Este anel é o **anel dos quatérnios**. Determine o centro $Z(\mathbb{H})$ de $\mathbb{H}$.

15. Mostre que $\begin{bmatrix} \mathbb{Z} & \mathbb{Q} \\ 0 & \mathbb{Z} \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} \mathbb{Z} & \mathbb{R} \\ 0 & \mathbb{Z} \end{bmatrix}$ são subanéis de $M_2(\mathbb{R})$.

16. Seja $R = \begin{bmatrix} \mathbb{Z} & \mathbb{Q} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Mostre que todo ideal à direita de $R$ é um ideal de $R$ e que existem ideais à esquerda de $R$ que não são ideais de $R$.

17. Seja $(M, +, 0)$ um grupo abeliano. Denote por $\text{End}(M)$ o conjunto dos endomorfismos de $M$. Se $f, g \in \text{End}(M)$, defina $f + g$ e $fg$ por $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ e $(fg)(x) = f(g(x))$ para todo $x \in M$. Mostre que $(\text{End}(M), +, ., 0, 1)$ (aqui 0 indica o endomorfismo nulo e 1 é a identidade) é um anel com unidade.

18. Determine $\text{End}(M)$ para :
    (a) $(M, +) = (\mathbb{Z}, +)$
    (b) $(M, +) = (\mathbb{Q}, +)$
    (c) $(M, +) = (\mathbb{Z}_n, +)$ (Aqui $\mathbb{Z}_n$ denota o grupo aditivo dos inteiros módulo $n$.)
    (d) $(M, +) = (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, +)$ (Aqui a adição é definida por

    $$(m, n) + (k, l) = (m + k, n + l)$$

    para todo $m, n, k, l \in \mathbb{Z}$.)

19. Em vários casos que consideramos, obtivemos que $\text{End}(R, +, 0) \cong R$ para um anel $R$. Isso é verdade em geral? Isso é verdade quando $R$ é um corpo? O que acontece quando $(R, +) = (\mathbb{R}, +)$?