Aneis e Módulos

Lista 4

1. Um domínio de integridade A é um domínio de Bézout se para todo $a, b \in A$ existe $d = \text{mdc}(a, b)$ e existem $r, s \in A$ tais que $d = ra + sb$. Prove que em um domínio de Bézout A as seguintes afirmaccões são equivalentes:
   (a) A é um DIP.
   (b) A é noetheriano.
   (c) A é um DFU.
   (d) A satisfaz CCA para ideais pricipais.
   (e) Todo elemento não nulo e não inversível de A se fatora como produto de elementos irredutíveis de A.
2. Classifique a menos de semelhancca, todas as matrizes nilpotentes 7×7.
3. Classificar, a menos de isomorfismos, todos os módulos simples sobre um DIP D.
4. Seja V um espacco vetorial de dimensão finita sobre o corpo K e seja $T \in \text{End}(V)$. Prove que existe um vetor cíclico para T se, e somente se, o polinômio minimal de T e o polinômio característico são iguais.
5. Classifique, a menos de semelhancca, todas as matrizes reais 6×6 com polinômio minimal $f(x) = (x-1)^2(x^2 + x + 1)$.
6. Seja $A \in M_7(\mathbb{R})$ dada por

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

   Encontre a forma racional R de A e uma matriz inversível P tal que $P^{-1}AP = R$.

7. Se M é um módulo que admite uma série de composiccão, então pelo Teorema de Jordan-Hölder todas as séries de composiccão de M têm o mesmo comprimento. Definimos o comprimento de M, $\mathrm{c}(M)$ como o comprimento de uma de suas séries de composiccão. Seja
$$0 \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0$$
uma sequência exata de módulos. Prove que M tem comprimento finito se, e somente se, l e N tiverem comprimento finito.

8. Seja M um módulo de comprimento finito e sejam L e N submódulos de M. Prove que
$$\mathrm{c}(L+N)+\mathrm{c}(L\cap N)=\mathrm{c}(L)+\mathrm{c}(N).$$

9. Seja M um módulo de comprimento finito e N um submódulo de M. Prove que $M=N$ se, e somente se, $\mathrm{c}(M)=\mathrm{c}(N)$.

10. Seja M um módulo de comprimento finito e $f : M \longrightarrow M$ um endomorfismo. Mostre que são equivalentes as sequintes afirmaccões:

    (a) f é um automorfismo.

    (b) f é injetor.

    (c) f é sobrejetor.

11. Sejam M, N, L módulos tais que $M \times N \cong M \times L$. Podemos afirmar que $N \cong L$?

12. Sejam M, N e L módulos de comprimento finito tais que $M \times N \cong M \times L$. Provar que $N \cong L$.