MAT0501 E MAT5734 - ANEIS E MÓDULOS

Prof: Juan Carlos Gutiérrez Fernández
Lista 3 (2018)

1. Seja K corpo e $A = M_n(K)$. Provar que para cada t, $t = 1, \ldots, n$ os subconjuntos de A dados por
   $S_t = \{(a_{ij}) \in A : \ a_{ij} = 0 \text{ se } j \neq t\}$ são submodulos de ${}_AA$. Provar que S_t é um submódulo simples de ${}_AA$ e $A = S_1 \oplus S_2 \oplus \cdots \oplus S_n$.
2. Seja $\{M_i\}_{i \in I}$ uma família de A-módulos e para cada $i \in I$ seja N_i um submódulo de M_i. Mostre
   $$\frac{\oplus_{i\in I} M_i}{\oplus_{i\in I} N_i} \cong \bigoplus_{i\in I} \frac{M_i}{N_i}.$$
   Determinar quais das seguintes somas em $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ são diretas
   $$\text{a)} \quad \mathbb{Z}(3,5) + \mathbb{Z}(-3,5), \qquad \text{b)} \quad \mathbb{Z}(1,2) + \mathbb{Z}(5,10).$$
3. Prove que $\mathbb{Z}(1,1)$ é somando direto de $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ e determine o quociente
   $$\frac{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}}{\mathbb{Z}(1,1)}.$$
4. Prove que $\mathbb{Z}(a,b)$ é somando direto de $\mathbb{Z} \oplus Z$ se, e somente se a e b são primos entre si.
5. Dê um exemplo de módulo livre com um submódulo que é somando direto e não é livre.
6. O produto direto de módulos livres é sempre livre?
7. Todo submódulo de um A-módulo cíclico também é cíclico?
8. Dar um exemplo de anel A e um A-módulo M tal que $\mathrm{T}(M)$ não é um submódulo de M.
9. Seja A um domínio de integridade e sejam $a, b \in A$. Prove que
   $$\frac{Aa}{A(ab)} \cong \frac{A}{Ab}.$$
   Prove que se $\mathrm{mdc}(a,b) = 1$, então
   $$\frac{A}{A(ab)} \cong \frac{A}{Aa} \oplus \frac{A}{Ab}.$$
10. Seja M o ideal de $\mathbb{Z}[x]$ gerado por 2 e x. Provar que M não é soma direta de $\mathbb{Z}[x]$-módulos cíclicos.
11. Seja D um D.I.P. e M um D-módulo cíclico, $\mathrm{ann}\,(M) = (a)$. Provar:
    (a) Se $b \in D$ e $\mathrm{mdc}(a,b) = 1$, então $bM = M$;
    (b) Se b divide a, ($a = bc$ com $c \in D$), então $bM \cong D/(c)$ e $M/bM \cong D/(b)$.
12. Seja D um D.I.P. e M um D-módulo cíclico com $\mathrm{ann}\,(M) = (a)$. Então:
    (a) Cada submódulo de M é cíclico de período um divisor de a;

(b) Para cada ideal $(b) \supseteq (a)$ de D, M possui exatamente um submódulo que é cíclico com anulador (b).

13. Seja D um D.I.P. Provar que um módulo de torção M sobre D é *irredutível* ou *simples* no sentido que $M \neq 0$ e os únicos submodulos são 0 e M, se e somente se $M = Dz$ e $\operatorname{ann}(z) = (p)$ com p primo. Provar que se M é finitamente gerado, então é *indecomponível* no sentido que não é soma direta de dois submódulos não zero, se e somente se $M = Dz$ com $\operatorname{ann}(z) = (p^n)$ e p é primo.
14. Seja G um grupo abeliano de ordem n e seja m tal que $m|n$. Prove que G possui um subgrupo de ordem m.