# MAT0501 E MAT5734 - ANEIS E MÓDULOS

**Prof: Juan Carlos Gutiérrez Fernández**

Seja $A$ um domínio de ideais principais.

**Teorema 1.** *Se $B \in M_{m\times n}(A)$ então existem $P \in M_m(A)$ e $Q \in M_n(A)$ invertíveis, tal que $PBQ = \operatorname{diag}\{d_1, d_2, \dots, d_k, 0, \dots, 0\}$ onde os $d_i$ são não nulos e $d_1|d_2\cdots|d_k$.*

**Teorema 2.** *Seja $L$ um $A$-módulo livre de posto $n$ e $N$ um submódulo de $L$. Então existe uma base $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ de $L$ e elementos em $A$ não nulos $a_1, \dots, a_k$ tal que $a_1|a_2\cdots|a_k$ e $\{a_1y_1, a_2y_2, \dots, a_ky_k\}$ é uma base de $N$.*

**Exercicios. (Para 1/10/2018)**

1. Prove Teorema 2 usando Teorema 1.
2. Prove Teorema 1 usando Teorema 2.
3. Seja $M$ é um $A$-módulo de torção finitamente gerado. Prove, usando Teorema 1, que $M$ é soma direta de submódulos cíclicos $M_i$,
$$M = M_1 \oplus M_2 \oplus \cdots \oplus M_k$$
tais que $\operatorname{ann}(M_1) \supseteq \operatorname{ann}(M_2) \supseteq \cdots \supseteq \operatorname{ann}(M_k)$.
4. Assuma $\operatorname{ann}(M) = (ab)$ com $a$ e $b$ primos entre si. Então
$$M = M_a \oplus M_b.$$

**Obs:**

$$\operatorname{ann}(M) := \{c \in A \mid cx = 0 \text{ para todo } x \in M\},$$
$$M_c := \{x \in M \mid cx = 0\}.$$