Lista 5

MAT5734/MAT0501 — 2° SEMESTRE DE 2017

Exercício 1.
Mostre dois matrizes (não escalares) 2×2 sobre um corpo F são semelhantes se e somente se eles têm o mesmo polinomio carasteristico.

Exercício 2.
Mostre que dois matrizes 3×3 são semelhantes se e somente se eles têm o mesmo polinomio caracteristico e mesmo polinomio minimal. Encontre counterexemplo para essa afirmação para matrizes 4×4.

Exercício 3.
Seja V um espaço vetorial sobre F com $\dim_F(V) = n$. Mostre que o polinomio minimal de qualquer transformação linear $T : V \to V$ tem polinomio minimal com grau menor igual a n^2.

Exercício 4.
Determine os autovalores da matriz

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Exercício 5.
Mostre que o polinomio carasteristico da matriz

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

é $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$.

Exercício 6.
Encontre a forma racional canonica das matrizes:

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & -0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} c & 0 & -1 \\ 0 & c & 1 \\ -1 & 1 & c \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 422 & 465 & 15 & -30 \\ -420 & -463 & -15 & 30 \\ 840 & 930 & 32 & -60 \\ -140 & -155 & -5 & 12 \end{bmatrix}.$$

Exercício 7.
Encontre todas as classes de similaridade de matrizes 6×6 sobre $\mathbb{C}$ com polinomio caracteristico $(x^4 - 1)(x^2 - 1)$.

Exercício 8.
Encontre todas as classes de similaridade de matrizes 3×3 sobre $\mathbb{F}_2$ com $A^6 = I$. Encontre todas as classes de similaridade de matrizes 4×4 sobre $\mathbb{F}_2$ com $A^{20} = I$.

Exercício 9.
Determine todas formas racionais canonicais possiveis para transformações lineares com polimonio carasteristico $x^2(x^2 + 1)^2$.

Exercício 10.
Determine todas (a menos semelhança) matrizes 2×2 racionais com ordem (multiplicativo) 4.

Exercício 11.
Mostre que $x^5 - 1 = (x - 1)(x^2 - 4x + 1)(x^2 + 5x + 1)$ em $\mathbb{F}_{19}[x]$. Usando isso determine todas (a menos semelhança) matrizes 2×2 sobre $\mathbb{F}_{19}$ de ordem 5.

Exercício 12.
Determine todos representantes de classes de congugação para $GL_3(\mathbb{F}_2)$.

Exercício 13.
Seja V um espaço vetorial de dimenção finita sobre $\mathbb{Q}$, e $T : V \to V$ uma transformação linear tal que $T^{-1} = T^2 + T$. Mostre que $\dim V$ é multiplo de 3. Caso $\dim V = 3$ mostre que todas tais transformações são semelhantes.

Exercício 14.
Mostre que se $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ são autovalores de matriz $A \in M_n(F)$ assim $\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k$ são autovalores de matriz $A^k \in M_n(F)$.

Exercício 15.
Determine forma canonica de Jordan das matrizes:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 5 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -3 & -4 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 \\ -2 & -3 & -1 \\ -4 & -4 & -3 \end{bmatrix}.$$

Exercício 16.
Mostre que as matrizes

$$\begin{bmatrix} 5 & 6 & 0 \\ -3 & -4 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -10 & 6 & -14 \\ -6 & 3 & -7 \end{bmatrix}$$

são semelhantes.

Exercício 17.
Mostre que as matrizes

$$\begin{bmatrix} -8 & -10 & -1 \\ 7 & 9 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -3 & 2 & -4 \\ 4 & -1 & 4 \\ 4 & -2 & 5 \end{bmatrix}$$

têm polinomio carasteristico $(x-1)^2(x+1)$ mas uma é diagonalizavel e outra não. Determina a forma de Jordan para ambas matrizes.

Exercício 18.
Determine as formas de Jordan das matrizes

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 & -3 \\ 4 & -8 & 14 & -15 \\ 2 & -4 & 7 & -7 \\ 0 & 2 & -4 & 3 \end{bmatrix}.$$

Exercício 19.
Mostre que as matrizes são semelhantes

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & -4 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ -2 & 4 & 9 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 5 & 0 & -4 & -7 \\ 3 & -8 & 15 & -13 \\ 2 & -4 & 7 & -7 \\ 1 & 2 & -5 & 1 \end{bmatrix}.$$

.

Exercício 20.
Mostre que qualquer matriz A é semelhante á sua transposta A^T.

Exercício 21.
Classifique, a menos de semelhança, todas as matrizes reais 6×6 com polinomio minimal $(x^2+3x+5)(x+2)$.

Exercício 22.
Mostre que se $A^2 = A$ assim A é semelhante á matriz diagonal que tem 0 ou 1 na diagonal.

Exercício 23.
Mostre que todo matriz nilpotente em $M_n(F)$ é semelhante á matriz da forma

$$\begin{bmatrix} N_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & N_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & N_s \end{bmatrix},$$

onde N_i tem forma

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

Exercício 24.
Mostre que as seguintes matrizes são semelhantes em $M_p(\mathbb{Z}/(p))$, com p um primo

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Exercício 25.
Mostre que não existe matrizes $A \in M_3(\mathbb{Q})$ tal que $A^8 = I$ mas $A^4 \neq I$.

Exercício 26.
Mostre que qualquer matriz $A \in M_n(\mathbb{C})$ com $A^3 = A$ é diagonalizavel.

Exercício 27.
Mostre que para todos R-modulos M e N temos

$$l(M + N) + l(M \cap N) = l(M) + l(N).$$

Exercício 28.
Seja M um modulo de comprimento finito. Mostre que para todo endomorfismo $\varphi : M \to M$ é injetivo se e somente se ele é sobrejetivo.

Exercício 29.
Determine o comprimento dos seguintes modulos:

(a) $\mathbb{Z}/120\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}$.

(b) $\mathbb{C}[x]/(x^{100} + x + 1)$ sobre $\mathbb{C}[x]$.

(c) $\mathbb{R}[x]/(x^4 + 2x^2 + 1)$ sobre $\mathbb{R}[x]$.

(d) $\mathbb{Z}[x]/(x^4 + 2x^2 + 1)$ sobre $\mathbb{Z}[x]$.

Exercício 30.

(a) Seja R um anel local com ideal maximal ideal $\mathfrak{m}$ e seja M um R-modulo finitamente gerado tal que $\mathfrak{m}M = 0$. Mostre que

$$l(M) = \dim_{R/\mathfrak{m}} M$$

.

(b) Mostre que um R-modulo M tem comprimento 1 se e somente se ele é isomorfo ao $R/\mathfrak{m}$ para algum ideal maximal $\mathfrak{m}$ em R.

Exercício 31.
Seja M um R-modulo e N_1, N_2 dois submodulos em M. Mostre que se M/N_1 e M/N_2 são Noetherianos (resp. Artinianos) assim $M/(N_1 \cap N_2)$ é Noetheriano (resp. Artiniano).