Lista 1

MAT5734/MAT0501 — 2° SEMESTRE DE 2017

Seja R um anel com $1 \neq 0$.

Exercício 1.
Mostre que $(-1)^2 = 1$ em R.

Exercício 2.
Seja u unidade em R. Mostre que $-u$ é unidade também.

Exercício 3.
Mostre que a interseção de qualquer família de subanéis de um anel é subanel.

Exercício 4.
Decida qual conjunto é subanel de $\mathbb{Q}$:

(a) o conjunto de todos os números racionais com denominadores ímpares;

(b) o conjunto de todos os números racionais com denominadores pares;

(c) o conjunto de todos os números racionais não-negativos;

(d) o conjunto de todas as raízes dos números racionais;

(e) o conjunto de todos os números racionais com numeradores ímpares;

(f) o conjunto de todos os números racionais com numeradores pares.

Exercício 5.
Decida qual conjunto é subanel do anel de todas as funções $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$:

(a) o conjunto de todas as funções $f(x)$ tais que $f(q) = 0$ para todos $q \in \mathbb{Q} \cap [0, 1]$;

(b) o conjunto de todas as funções polinomiais;

(c) o conjunto de todas as funções que possuem somente um número finito de zeros incluindo a função nula;

(d) o conjunto de todas as funções que possuem somente um número finito de zeros;

(e) o conjunto de todas as funções f tais que $\lim_{x \to 1^-} f(x) = 0$;

(f) o conjunto de todas as combinações racionais lineares das funções $\sin(nx)$ e $\cos(mx)$, $m, n \in \{0, 1, 2, ...\}$.

Exercício 6.
O centro do anel R é $\{z \in R \mid za = az \text{ para todo } a \in R\}$. Mostre que o centro de anel é subanel que contém a identidade. Mostre que o centro de anel de divisão é corpo.

Exercício 7.
Para o elemento fixo $a \in R$, definimos $C(a) = \{r \in R \mid ra = ar\}$. Mostre que $C(a)$ é subanel de R que contém a. Mostre que o centro de R é a interseção de todos os subanéis $C(a)$ para todo $a \in R$.

Exercício 8.
Mostre que, se R é domínio de integridade e $x^2 = 1$ para algum $x \in R$, então $x = \pm 1$.

Exercício 9.
Um elemento $x \in R$ se chama *nilpotente* se $x^m = 0$ para algum $m \in \mathbb{Z}^+$.

(a) Mostre que, se $n = a^k b$ para números inteiros a, b, então $\overline{ab}$ é um elemento nilpotente de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

(b) Se $a \in \mathbb{Z}$ é um número inteiro, mostre que o elemento $\overline{a} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ é nilpotente se, e somente se, qualquer divisor primo de n é divisor de a também. Em particular, ache elementos nilpotentes de $\mathbb{Z}/72\mathbb{Z}$ explicitamente.

(c) Seja R um anel das funções de um conjunto não vazio X a um corpo F. Mostre que R não contém elementos nilpotentes não-nulos.

Exercício 10.
Seja x um elemento nilpotente do anel comutativo R.

(a) Mostre que x é ou zero ou divisor de zero.

(b) Mostre que rx é nilpotente para todo $r \in R$.

(c) Mostre que $x + 1$ é uma unidade em R.

(d) Mostre que a soma de um elemento nilpotente e uma unidade é uma unidade.

Exercício 11.
Um anel R se chama *Booleano* se $a^2 = a$ para todo $a \in R$. Mostre que qualquer anel Booleano é comutativo.

Exercício 12.
Seja R a coleção das sequências $(a_1, a_2, a_3, ...)$ de números inteiros, onde os a_i's são todos nulos exceto para um número finito de termos. Mostre que R é um anel com respeito à adição e multiplicação componente por componente que não possui uma identidade.

Exercício 13.

Seja F um corpo, e seja T o conjunto das matrizes $\begin{pmatrix} r & t \\ 0 & s \end{pmatrix}$, $r, s, t \in R$. Mostre que T é um anel com as operações de adição e multiplicação usuais. Mostre que T não é comutativo. Sejam

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} r & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid r, t \in F \right\},$$
$$I = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & s \end{pmatrix} \mid t, s \in F \right\},$$
$$J = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid t \in F \right\}.$$

Mostre que H, I, J são ideais bilaterais em T, e que $T/H = T/I = F$ com $T/J = D$.

Exercício 14.

Seja F um corpo e seja R o anel de todas as matrizes 2×2 sobre F. Mostre que R não possui ideais bilaterais além de 0 e R.

Exercício 15.

Mostre que os anéis $2\mathbb{Z}$ e $3\mathbb{Z}$ não são isomorfos.

Exercício 16.

Mostre que os anéis $\mathbb{Z}[x]$ e $\mathbb{Q}[x]$ não são isomorfos.

Exercício 17.

Ache todas as imagens homomórficas de $\mathbb{Z}$.

Exercício 18.

Ache todos os homomorfismos de anéis de $\mathbb{Z}$ para $\mathbb{Z}/30\mathbb{Z}$. Descreva o núcleo e a imagem de cada homomorfismo.

Exercício 19.

Decida qual aplicação é um homomorphismo de $M_2(\mathbb{Z})$ para $\mathbb{Z}$:

(a) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto a$

(b) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto a + d$

(c) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto ad - bc$

Exercício 20.

Decida qual conjunto é ideal do anel $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$:

(a) $\{(a, a) | a \in \mathbb{Z}\}$;

(b) $\{(2a, 2b) | a, b \in \mathbb{Z}\}$;

(c) $\{(2a, 0) | a \in \mathbb{Z}\}$;

(d) $\{(a, -a) | a \in \mathbb{Z}\}$.

Exercício 21.
Decida qual conjunto é ideal do anel $\mathbb{Z}[x]$:

(a) conjunto de todos polinômios com termo constante múltiplo de 3;

(b) conjunto de todos polinômios com coeficiente de x^2 múltiplo de 3;

(c) conjunto de todos polinômios com termo constante, coeficiente de x e coeficiente de x^2 nulos;

(d) $\mathbb{Z}[x^2]$;

(e) conjunto de todos polinômios com soma dos coeficientes igual a zero;

(f) conjunto de todos polinômios $p(x)$ com $p'(0) = 0$.

Exercício 22.
Seja $R[[x]]$ o conjunto das séries de potências formais em x, i.e., o conjunto de todas as somas da forma

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots .$$

Definimos a soma na maneira óbvia e multiplicação por

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \times \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i = \sum_{i=1}^{\infty} (\sum_{k=0}^{i} a_k b_{i-k}) x^i.$$

(a) Mostre que $R[[x]]$ é anel comutativo com 1;

(b) Mostre que $1 - x$ é unidade em $R[[x]]$ com inverso $1 + x + x^2 + \dots$;

(c) Mostre que $\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ é unidade se, e somente se, a_0 é unidade em R.

(d) Mostre que $R[[x]]$ é um domínio de integridade se R é um domínio de integridade.

Exercício 23.
Seja $R = C[0, 1]$. Mostre que a aplicação $\varphi : R \to \mathbb{R}$ definida por

$$\varphi(f) = \int_0^1 f(t) dt,$$

é um homomorfismo de grupos aditivos mas não é homomorfismo de anéis.

Exercício 24.
Seja $\varphi : R \to S$ um homomorfismo sobrejetivo de anéis. Mostre que a imagem do centro de R está contido no centro de S.

Exercício 25.
Seja $\varphi : R \to S$ um homomorfismo de anéis. Mostre que, se $\varphi(1_R) = 1_S$, emtão, para toda unidade $u \in R$, $\varphi(u)$ é unidade e $\varphi(u^{-1}) = \varphi(u)^{-1}$.

Exercício 26.

(a) Se I e J são ideais de R, mostre que $I \cap J$ é um ideal em R.

(b) Mostre que, se $I_1 \subseteq I_2 \subseteq \ldots$ são ideais de R, então $\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ é um ideal de R.

Exercício 27.
Seja $\varphi : R \to S$ um homomorfismo de anéis.

(a) Mostre que, se J é um ideal de S, então $\varphi^{-1}(J)$ é um ideal de R.

(b) Mostre que, se φ é sobrejetivo e I é um ideal de R, então $\varphi(I)$ é um ideal de S. Encontre um contra-exemplo em que φ não é sobrejetivo.

Exercício 28.
Seja R um anel comutativo. Mostre que o conjunto de todos elementos nilpotentes é um ideal, chamado *nilradical* $N(R)$. Mostre que o único elemento nilpotente em $R/N(R)$ é 0, i.e. $N(R/N(R)) = 0$.

Exercício 29.
Seja I um ideal de anel comutativo R e defina

$$\mathrm{rad} I = \{r \in R \mid r^n \in I, \text{para algum } n \in \mathbb{Z}^+\}$$

chamado *radical* de I. Mostre que $\mathrm{rad} I$ é um ideal, $I \subseteq \mathrm{rad} I$, e que $\mathrm{rad} I/I = N(R/I)$.

Exercício 30.
Sejam I, J, K ideais de R.

(a) Mostre que $I(J + K) = IJ + IK$ e $(I + J)K = IK + JK$;

(a) Mostre que, se $I \subseteq J$, então $I \cap (J + K) = J + (I \cap K)$.

Exercício 31.
Seja R um anel comutativo. Mostre que R um corpo se, e somente se, 0 é o único ideal maximal.

Exercício 32.
Seja R um anel comutativo. Mostre que, se a é um elemento nilpotente de R, então $1 - ab$ é unidade para todo $b \in R$.

Exercício 33.
Seja $R = C[0,1]$, e $M_c = \{f \in C[0,1] \mid f(c) = 0\}$ para $c \in [0,1]$.

(a) Mostre que se, M é um ideal maximal de R, então existe $c \in [0,1]$ tal que $M_c = M$;

(b) Mostre que, se $b \neq c$ em $[0,1]$, então $M_b \neq M_c$;

(c) Mostre que M_c não é finitamente gerado.