MAT5851 – Geometria Riemanniana
Lista de Exercícios 1 – 14/03/2006

Prof. Claudio Gorodski

1. $p : z \in \mathbf{C} \to z^3 \in \mathbf{C}$ é um recobrimento? Por quê?

2. Seja $p : \tilde{M} \to M$ uma aplicação diferenciável entre duas variedades diferenciáveis conexas. Suponha que $\tilde{M}$ é compacta. Mostre que p é um recobrimento se e somente se p é um difeomorfismo local.

3. Descreva a álgebra de Lie do grupo ortogonal $\mathbf{O}(n)$.

4. Sejam $C \subset \mathbf{R}^3$ o *catenóide* (superfície gerada pela rotacão em torno do eixo z da curva $x = \cosh z$) e $H \subset \mathbf{R}^3$ o helicóide (superfície gerada por retas paralelas ao plano xy que intersectam o eixo z e a hélice $t \mapsto (\cos t, \sin t, t)$).

a. Mostre que H e C são subvariedades de $\mathbf{R}^3$ escrevendo parametrizações "naturais" para elas.

b. Seja $g = dx^2 + dy^2 + dz^2$ a métrica canônica de $\mathbf{R}^3$. Mostre que $(C, g|_C)$ e $(H, g|_H)$ são localmente isométricas. Elas são globalmente isométricas?

5. Mostre que o produto Riemanniano de (S^{n-1}, can) e $(\mathbf{R}, \mathrm{can})$ é isométrico ao cilindro

$$C = \{x \in \mathbf{R}^{n+1} : x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1\}$$

com a métrica induzida de $\mathbf{R}^{n+1}$.

6. Calcule o grupo de isometrias G de $\mathbf{R}^n$:

a. Mostre que G é gerado por rotações, reflexões e translações.

b. Mostre que G é o produto semidireto $\mathbf{O}(n) \ltimes \mathbf{R}^n$, onde $(B, w) \cdot (A, v) = (BA, Bv + w)$ para A, $B \in \mathbf{O}(n)$ e v, $w \in \mathbf{R}^n$.

7. Mostre que $(\mathbf{C}P^1, \mathrm{can})$ é isométrica a $(S^2, \frac{1}{4}\mathrm{can})$.

8. Dados x, $y \in \mathbf{R}$, uma função $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ da forma $g(t) = yt + x$ é chamada de uma *função afim*. O conjunto de todas essas funções equipado com a lei usual de composição forma um grupo de Lie G. Como variedade diferenciável, G é o semiplano superior $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : y > 0\}$ com a estrutura diferenciável usual. Mostre que:

a. A métrica Riemanniana invariante à esquerda de G que no elemento neutro $e = (0, 1)$ coincide com a métrica Euclideana ($g_{11} = g_{22} = 1$, $g_{12} = 0$) é dada por $g_{11} = g_{22} = \frac{1}{y^2}$, $g_{12} = 0$ (esta é a chamada métrica não-Euclideana de Lobatchevski).

b. Identifique $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ com $z = x + iy \in \mathbf{C}$. Então $z \mapsto z' = \frac{az+b}{cz+d}$, onde a, b, c, $d \in \mathbf{R}$ e $ad - bc = 1$, é uma isometria de G.

9. Prove que as isometrias da esfera $S^n \subset \mathbf{R}^{n+1}$ equipada com a métrica induzida são as restrições das transformações lineares ortogonais.

10. Seja (x^i) um sistemas de coordenadas locais em uma variedade diferenciável M com uma conexão afim ∇, e considere os símbolos de Christoffel Γ_{ij}^k definidos por $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = \sum_k \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k}$. Se $(x^{i'})$ é outro sistema de coordenadas locais em M, mostre que

$$\Gamma_{i'j'}^{k'} = \sum_{i,j,k} \Gamma_{ij}^k \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k} + \sum_i \frac{\partial^2 x^k}{\partial x^{i'} \partial x^{j'}} \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k}.$$

11. Seja X um campo de vetores numa variedade diferenciável M equipada com uma conexão afim ∇. Sejam $p \in M$, $v \in T_pM$, e $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ uma curva diferenciável por p em $t = 0$ com $\gamma'(0) = v$. Denote por $\tau_{t,0}$ o transporte paralelo ao longo de γ de t até 0. Mostre que

$$(\nabla_v X)_p = \lim_{t \to 0} \frac{\tau_{t,0}(X_{\gamma(t)}) - X_p}{t}.$$