MAT5751 – Geometria Diferencial – Prova Intermediária

08/10/2009

Prof. Claudio Gorodski

Questão 1 Seja $\gamma : I \to \mathbf{R}^2$ uma curva plana regular

$$\gamma(t) = (x(t), y(t))$$

não-necessariamente parametrizada por comprimento de arco.

a. Determine o referencial ortonormal positivo $\{e_1(t), e_2(t)\}$ adaptado à γ em que e_1 é tangente à curva. (`0,5 ponto`)

b. Mostre que $dt/ds = 1/||\gamma'||$, onde s é o parâmetro de comprimento e arco ao longo de γ. (`0,5 ponto`)

c. Mostre que a curvatura de γ é dada pela função (`1 ponto`)

$$\kappa(t) = \frac{x'y'' - x''y'}{(\,(x')^2 + (y')^2\,)^{3/2}}.$$

Questão 2 Seja $\gamma : I \to \mathbf{R}^3$ uma curva parametrizada por comprimento de arco. Suponha que a curvatura κ nunca se anula, de modo que o triedro de Frenet $\{e_1, e_2, e_3\}$ está bem definido. Considere a curva $\tilde{\gamma} : I \to \mathbf{R}^3$ definida por $\tilde{\gamma}(s) = A(\gamma(s)) + v$, onde $A : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ é uma aplicação linear ortogonal e $v \in \mathbf{R}^3$ é um vetor fixo. Denote por $\{\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3\}$, $\tilde{\kappa}$, $\tilde{\tau}$ os objetos correspondentes a $\tilde{\gamma}$. Mostre que:

a. $\tilde{\gamma}$ está parametrizada por comprimento de arco; (`1 ponto`)

b. $\tilde{e}_1(s) = L(e_1(s))$, $\tilde{\kappa}(s) = \kappa(s)$ e $\tilde{e}_2(s) = L(e_2(s))$ para todo $s \in I$; (`1 ponto`)

c. se $\det A = 1$ então $\tilde{e}_3(s) = L(e_3(s))$ e $\tilde{\tau}(s) = \tau(s)$ para todo $s \in I$, e se $\det A = -1$ então $\tilde{e}_3(s) = -L(e_3(s))$ e $\tilde{\tau}(s) = -\tau(s)$ para todo $s \in I$. (`1 ponto`)

Questão 3 Calcule as curvaturas Gaussiana e média do parabolóide hiperbólico $z = a(x^2 - y^2)$ na origem. (`2 pontos`)

Questão 4 Seja $F : W \to \mathbf{R}$ uma função suave definida num aberto $W \subset \mathbf{R}^3$, seja $c \in \mathbf{R}$ um valor regular de F e seja $S = F^{-1}(c)$ a superfície de nível c de F. Considere o campo normal unitário $\nu : S \to \mathbf{R}^3$ definido por

$$\nu(p) = \frac{\nabla F(p)}{||\nabla F(p)||}$$

para todo $p \in S$.

a. Seja $\varphi : U \to S$ uma parametrização e seja $N = \nu \circ \varphi$. Mostre que

$$N_u(u,v) = \frac{1}{||\nabla F \circ \varphi||} P_{\varphi(u,v)} \left[(\nabla F \circ \varphi)_u \right] \quad \text{e} \quad N_v(u,v) = \frac{1}{||\nabla F \circ \varphi||} P_{\varphi(u,v)} \left[(\nabla F \circ \varphi)_v \right],$$

onde $P_{\varphi(u,v)} : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ é a projeção ortogonal sobre $T_{\varphi(u,v)}S$. (`1 ponto`)

b. Mostre que os coeficientes da segunda forma fundamental são dados por (`1 ponto`)

$$\begin{aligned} \ell &= -\frac{1}{||\nabla F \circ \varphi||} \langle (\nabla F \circ \varphi)_u, \varphi_u \rangle, \\ m &= -\frac{1}{||\nabla F \circ \varphi||} \langle (\nabla F \circ \varphi)_u, \varphi_v \rangle, \\ n &= -\frac{1}{||\nabla F \circ \varphi||} \langle (\nabla F \circ \varphi)_v, \varphi_v \rangle. \end{aligned}$$

c. Observe que

$$(\nabla F \circ \varphi)_u = \mathrm{Hess}_{\varphi(u,v)}(F)(\varphi_u) \quad \text{e} \quad (\nabla F \circ \varphi)_v = \mathrm{Hess}_{\varphi(u,v)}(F)(\varphi_v),$$

e conclua que a segunda forma fundamental II e o operador de Weingarten $A = -d\nu$ são dados por

$$II_p = -\frac{1}{||\nabla F(p)||} \mathrm{Hess}_p(F) \quad \text{e} \quad A_p = -\frac{1}{||\nabla F(p)||} P_p \circ \mathrm{Hess}_p(F),$$

para todo $p \in S$, onde $\mathrm{Hess}_p(F)$ é o Hessiano de F em p. (`1 ponto`)