# ASPECTOS ESTRUTURAIS E ALGORÍTMICOS DE OBJETOS COMBINATÓRIOS

Y. KOHAYAKAWA

RESUMO. Apresentamos aqui os detalhes da nossa proposta de projeto temático de equipe. O objetivo central da pesquisa proposta é investigar aspectos estruturais de objetos combinatórios, dando especial ênfase a aspectos fundamentais de interesse intrínseco e a aspectos de relevância algorítmica.

*Subtemas específicos de pesquisa*: (*i*) propriedades assintóticas de estruturas combinatórias, investigadas através de métodos combinatórios e extra-combinatórios, como métodos probabilísticos, algébricos, e topológicos, (*ii*) propriedades estruturais de grafos, hipergrafos, e estruturas correlatas, (*iii*) métodos e problemas geométricos em combinatória, com especial ênfase em métodos poliédricos em otimização combinatória.

## 2. ÍNDICE

## 3. Sumário

3.1. **Equipe proponente.** A equipe proponente consiste dos seguintes membros do Departamento de Ciência da Computação do IME–USP:

1. *Arnaldo Mandel*, PhD, Waterloo, 1982, pesquisador CNPq nível 2A; especialidades: matróides, teoria de anéis
2. *Carlos E. Ferreira*, Dr. rer. nat., Tech. Uni., Berlim, 1994, pesq. CNPq 2C; métodos poliédricos em otimização combinatória
3. *José Augusto Ramos Soares*, PhD, Chicago, 1992, pesq. CNPq 2C; algoritmos combinatórios, problemas extremais, compressão de dados
4. *José Coelho de Pina Júnior*, Doctor, Amsterdã, 1995; algoritmos combinatórios
5. *Maria Angela de Campos Gurgel*, Doutora, USP, 1992; métodos poliédricos em otimização combinatória
6. *Paulo Feofiloff*, PhD, Waterloo, 1983; otimização combinatória, identidades min-max
7. *Yoshiharu Kohayakawa*, PhD, Cambridge, 1990, pesq. CNPq 2A, métodos probabilísticos, problemas extremais
8. *Yoshiko Wakabayashi*, Dr. rer. nat., Augusburg, 1986, pesq. CNPq 1C, métodos poliédricos e otimização combinatória em geral
9. *Cristina Gomes Fernandes*,[1] Mestre, USP; algoritmos *on-line* e algoritmos de aproximação

O grupo conta atualmente com 3 alunos de doutoramento, 9 alunos de mestrado e 10 alunos de iniciação científica.

3.1.1. *Colaboradores internacionais regulares.* A nossa equipe conta com a colaboração sólida e regular dos seguintes bem-conhecidos pesquisadores estrangeiros e de membros de seus grupos: B. Bollobás (Cambridge), M. Grötschel (TU Berlim e ZIB Berlim), T. Łuczak (Poznań, Polônia), H.-J. Prömel (Humboldt-Uni., Berlim), V. Rödl (Emory University, Atlanta).

A intensificação da colaboração internacional já mantida pelo grupo e o estabelecimento de laços científicos com outros grupos de pesquisa de ponta nas áreas de combinatória e de teoria da computação são, dentre outros, objetivos deste projeto.

3.1.2. *Página na Teia.* Mencionamos que o nosso grupo mantém uma página na *World Wide Web*, onde mais informações podem ser encontradas. Em particular, assim que este projeto estiver em andamento, a presente proposta de projeto, incluindo a bibliografia em estilo BibTeX, assim como os resultados alcançados estarão acessíveis em nossa página. O nosso endereço é

`http://www.ime.usp.br/~yoshi/index_combinatorics.html`

3.2. **Objetivo científico e subtemas específicos de pesquisa.** O objetivo central da pesquisa proposta neste projeto temático é investigar aspectos estruturais de objetos combinatórios. Os aspectos específicos a serem abordados serão aqueles motivados por $(i)$ seu interesse intrínseco, visto como um tópico da matemática pura, e pela $(ii)$ sua importância para o desenvolvimento de algoritmos eficientes para problemas computacionais combinatórios específicos ou para a identificação da complexidade computacional de tais problemas.

[1] Em afastamento para cumprir programa de doutoramento na *Georgia Tech* desde setembro de 1992.

São os seguintes os principais subtemas a serem abordados neste projeto:

1. *Propriedades assintóticas de estruturas combinatórias, investigadas através de métodos combinatórios e extra-combinatórios, como métodos probabilísticos, algébricos, e topológicos.*
2. *Propriedades estruturais de grafos, hipergrafos, e estruturas correlatas.*
3. *Métodos e problemas geométricos em combinatória, com especial ênfase em métodos poliédricos em otimização combinatória.*

3.2.1. *Tópicos específicos.* Os seguintes tópicos específicos de pesquisa fornecem uma idéia mais concreta do escopo e do espectro de nossos interesses científicos:

1. Problemas numéricos em teoria de Ramsey
2. Teoria de Ramsey geométrica
3. Resultados do tipo anti-Ramsey
4. Problemas extremais tipo Turán para grafos aleatórios
5. Conjuntos estáveis em grafos livres de $K^s$ e $R(s,t)$
6. ‘Spanners’ em grafos
7. Enumeração de grafos com subgrafos proibidos
8. Objetos pseudo-aleatórios e suas aplicações
9. Métodos algébricos e topológicos
10. Bases de Hilbert: uma versão inteira do teorema de Carathéodory
11. Sistemas de demonstrações em teoria da computação
12. Compressão de dados
13. Medianas de partições
14. Problemas de empacotamento tridimensional
15. Caminhos e circuitos em grafos
16. Fatores e empacotamentos em grafos
17. Investigação poliédrica de problemas combinatórios

A lista acima não pretende ser exaustiva; ela é apenas uma amostra selecionada para dar maior objetividade à nossa discussão.

3.3. **Resultados concretos.** Como conseqüência das nossas atividades de pesquisa dentro deste projeto, objetivamos ter, como frutos concretos:

1. publicações em periódicos internacionais de primeira linha, em número superior ao conseguido pela equipe proponente nos últimos quatro anos, com sensível aumento no número de trabalhos conjuntos entre os membros da equipe;
2. atividade de intercâmbio nacional e internacional de mesma ou maior intensidade que a mantida pelo grupo atualmente;
3. atração de pós-doutorandos da oferta internacional;
4. formação de um grupo maior de alunos de doutoramento, mestrado e de iniciação científica.

Um reflexo deste projeto temático que contribuirá sobremaneira às nossas atividades de pesquisa é a conseqüente *agilização* do processamento de nossos pedidos complementares junto à FAPESP. O reconhecimento da nossa equipe como um grupo de pesquisa pela FAPESP também nos dará uma identidade que será útil perante os vários órgãos da universidade, e facilitará nossas atividades de pesquisa.

Esperamos um aumento da nossa produção científica como conseqüência deste projeto devido, entre outros fatores, à pressão natural que ele exercerá sobre o grupo, especialmente no sentido de exigir uma maior colaboração entre os seus membros. Visamos aqui às colaborações mais profundas que as atuais que, em particular, resultem em um maior número de publicações conjuntas.

Mencionamos que o nosso grupo já teve contatos com os seguintes pesquisadores e membros de seus grupos, em níveis variados, e que gostaríamos de estreitar nossos laços de colaboração com eles durante a vigência deste projeto: N. Alon (Tel Aviv), L. Babai (Chicago e Budapest), R. Bixby (Rice), A. Frieze (Carnegie Mellon), R.L. Graham (Bell Labs), H. Karloff (Atlanta), H. Lefmann (Dortmund), C. McDiarmid (Oxford), J. Nešetřil (Praga), J.H. Spencer (Nova York), E. Szemerédi (Rutgers e Budapest), A. Wigderson (Jerusalém), e L.A. Wolsey (CORE).

Para um aproveitamento pleno da eventual visita dos pesquisadores acima pela comunidade brasileira de pesquisadores em combinatória e em teoria da computação, prevemos a organização de *Semanas de Combinatória*, nos moldes das semanas que a nossa equipe organizou na ocasião da visita de B. Bollobás em 1992 e de P. Erdős em 1994.[2] Prevemos a organização de duas a quatro tais *Semanas* durante a vigência deste projeto.

Pretendemos manter pelo menos uma posição de pós-doutor durante toda a vigência do projeto, cada pós-doutor permanecendo nesta posição por no máximo dois anos. Os pós-doutores serão selecionados da oferta internacional. A abertura desta posição será anunciada de forma ampla e o processo de seleção será baseado essencialmente na produção científica do candidato e no seu potencial de colaboração com os membros desta equipe.

3.3.1. *Processo de acompanhamento.* Tendo em vista que visamos obter os resultados mensuráveis (1)–(4) acima, os relatórios anuais exigidos pela FAPESP serão uma forma efetiva de acompanhamento do projeto.

3.4. **Contexto e escopo da pesquisa proposta.** A pesquisa proposta dentro deste projeto temático concentra-se em alguns aspectos específicos da matemática discreta. Aqui delimitamos o escopo dos nossos principais interesses de pesquisa.

Uma fotografia bastante fiel do estado-da-arte da combinatória pode ser encontrada no *Handbook of Combinatorics*, editado por R.L. Graham, M. Grötschel, e L. Lovász (North-Holland, 1995). Os problemas específicos contidos no nosso projeto de pesquisa pertencem, em sua grande maioria,[3] às subáreas discutidas nos seguintes capítulos do *Handbook*: Combinatorial Optimization (M. Grötschel e L. Lovász),[4] Combinatorics in Computer Science (L. Lovász, D.B. Shmoys, and É. Tardos), Computational Complexity (D.B. Shmoys and É. Tardos), Extremal Graph Theory (B. Bollobás), Polyhedral Combinatorics (A. Schrijver), Probabilistic Methods (J. Spencer), Ramsey Theory (J. Nešetřil) e Random Graphs (M. Karoński).

Uma seleção de periódicos especializados de maior destaque que mais publicam trabalhos nas áreas de interesse deste projeto são os seguintes:

*Algorithmica*
*Combinatorica*
*Combinatorics, Probability and Computing*
*Discrete Applied Mathematics*
*Discrete Mathematics*
*Discrete Mathematics and Applications* (Tradução de *Diskretnaja Matematika*)
*Discrete and Computational Geometry*
*European J. Combinatorics*
*Graphs and Combinatorics*
*Journal of Algorithms*
*J. Combinatorial Theory*, Séries A e B
*J. Graph Theory*
*Mathematical Programming*

[2] Veja §5.4 a seguir.
[3] Veja §4 desta proposta.
[4] Listamos aqui os nomes dos capítulos e seus autores.

*Random Structures and Algorithms*
*SIAM Journal on Computing*
*SIAM Journal on Discrete Mathematics*
*SIAM Journal on Optimization*

Cada um dos periódicos acima são publicados por uma das seguintes editoras: Academic Press, Cambridge University Press, North-Holland, SIAM, Springer-Verlag, VSP (Utrecht), Wiley.

Naturalmente, periódicos de matemática e de ciência da computação sem área específica de concentração, como *J. Amer. Math. Soc.*, *Trans. Amer. Math. Soc.*, *Israel J. Mathematics*, *Comm. ACM*, *J. ACM*, *Theoretical Computer Science*, *etc*, publicam trabalhos de nosso interesse. As conferências de maior destaque na área são o *IEEE Symposium on Foundations of Computer Science*, *ACM Symposium on Theory of Computing*, *ACM–SIAM Symposium on Discrete Algorithms*, e *International Symposium on Mathematical Programming.*

3.5. **Financiamento e benefícios pleiteados.** Este projeto prevê os seguintes investimentos.

3.5.1. *Material permanente.* A nossa equipe pretende comprar equipamento computacional, principalmente para complementar a infra-estrutura já existente no departamento. O departamento tem uma rede com um servidor potente, uma SPARC 1000, atualmente com 4 CPUs e 702 MBytes de memória. Através deste projeto pretendemos adquirir X-terminais para os membros da equipe. Planejamos também adquirir um microcomputador portátil e estender uma licença do *software* CPLEX, que já possuímos, para permitir um maior número de acessos simultâneos. O valor total pleiteado é de aproximadamente R$ 55.000,00.

3.5.2. *Pedidos complementares.* De grande importância para o nosso grupo de pesquisa será também a conseqüente agilização do processamento de pedidos complementares junto à FAPESP. Estes pedidos serão essenciais ao bom andamento do projeto.

Prevemos basicamente auxílios a viagens de curta duração para o exterior e de visitantes do exterior ao país, bolsas de pós-doutoramento no país para atrair pesquisadores da oferta internacional, bolsas de doutoramento, mestrado e iniciação científica, e auxílios à organização de eventos.

3.5.3. *Reserva técnica.* Pleiteamos também a alocação da reserva técnica para este projeto.

## 4. Projeto de Pesquisa Temático

Como exposto em §3.2, *Objetivo científico e subtemas específicos de pesquisa*, os principais subtemas a serem abordados neste projeto são:

1. *Propriedades assintóticas de estruturas combinatórias, investigadas através de métodos combinatórios e extra-combinatórios, como métodos probabilísticos, algébricos, e topológicos.*
2. *Propriedades estruturais de grafos, hipergrafos, e estruturas correlatas.*
3. *Métodos e problemas geométricos em combinatória, com especial ênfase em métodos poliédricos em otimização combinatória.*

A motivação subjacente à investigação dos subtemas acima tem origem no seu interesse intrínseco e na aplicabilidade deste estudo à teoria da computação. Ilustramos este ponto na discussão abaixo.

Para especificar o escopo e o contexto da pesquisa proposta de uma forma concreta e objetiva, enumeramos abaixo vários *tópicos específicos* de estudo. A coleção de tópicos abaixo não pretende ser completa, mas apenas um apanhado ilustrativo de nossos interesses. Apresentamos também uma extensa bibliografia que serve para localizar o contexto científico das investigações que propomos.

**Tópicos específicos**



4.1. **Problemas numéricos em teoria de Ramsey.** Sejam $G$ e $H$ dois grafos dados. Escrevemos $G \to H$ se em qualquer 2-coloração das arestas de $G$ podemos encontrar um subgrafo monocromático em $G$ isomorfo a $H$. Se exigimos ainda que o subgrafo encontrado seja um subgrafo induzido de $G$, escrevemos $G \xrightarrow{\text{ind}} H$. Assim, o bem conhecido teorema de Ramsey implica que, para qualquer grafo $H$, temos $G \to H$ desde que $G$ seja um grafo completo suficientemente grande. Por outro lado, um resultado clássico provado independentemente por Deuber [45], Erdős, Hajnal, e Pósa [53], e Rödl [136] afirma que para qualquer grafo $H$ existe um grafo $G$

tal que $G \xrightarrow{\text{ind}} H$. Aqui estamos interessados em problemas numéricos que surgem quando as duas relações $\to$ e $\xrightarrow{\text{ind}}$ são consideradas.

Dado um grafo $G$, como de usual, a *ordem* $|G|$ de $G$ é o número de vértices em $G$, e o seu *tamanho* $e(G)$ é o número de arestas em $G$. Fixe um grafo $H$. Seja $r(H)$ a menor ordem possível de um grafo $G$ satisfazendo $G \to H$, e $r_{\mathrm{e}}(H)$ o menor tamanho possível de um tal grafo $G$. Assim $r(H) = \min\{|G| \colon G \to H\}$ e $r_{\mathrm{e}}(H) = \min\{e(G) \colon G \to H\}$. Substituindo-se a relação $\to$ por $\xrightarrow{\text{ind}}$, obtemos os parâmetros $r^{\mathrm{ind}}(H)$ e $r_{\mathrm{e}}^{\mathrm{ind}}(H)$. Vários problemas importantes em teoria de Ramsey tratam da investigação destes parâmetros.

4.1.1. *Árvores e circuitos.* Beck [24] provou usando grafos aleatórios que $r_{\mathrm{e}}(P^\ell) = O(\ell)$, onde $P^\ell$ denota o caminho de ordem $\ell$, resolvendo assim um problema de Erdős. Em [24] e também mais tarde em [25], Beck investigou $r_{\mathrm{e}}(T)$ para árvores genéricas $T$ essencialmente identificando o parâmetro da árvore $T$ que determina a ordem de magnitude de $r_{\mathrm{e}}(T)$. Suponha que $T$ tenha, como um grafo bipartido, classes de bipartição de cardinalidades $t_0$ e $t_1$, e sejam $\Delta_0$ e $\Delta_1$ os máximos dos graus dos vértices nestas classes. Ponha $\beta(T) = t_0\Delta_0 + t_1\Delta_1$. A seguinte conjectura foi posta por Beck [25] (veja também Ke [96]).

**Conjectura 1.** *Para qualquer árvore $T$ temos $r_{\mathrm{e}}(T) = O\{\beta(T)\}$.*

Se verdadeira, esta conjectura é ótima a menos de um fator constante, já que, como observado por Beck [25], vale que $r_{\mathrm{e}}(T) \geq \beta(T)/4$. Atualmente, o melhor resultado na direção desta conjectura é devido a Haxell e Kohayakawa [84], onde prova-se que $r_{\mathrm{e}}(T) = O\left(\min\{\beta(T)\log\Delta(T), |T|\Delta(T)\}\right)$. Beck [25] também considerou $r_{\mathrm{e}}^{\mathrm{ind}}(T)$ para árvores genéricas $T$, provando que $r_{\mathrm{e}}^{\mathrm{ind}}(T) = O\{|T|^3(\log|T|)^4\}$ para qualquer árvore $T$, e que há árvores $T$ para as quais $r_{\mathrm{e}}^{\mathrm{ind}}(T) = \Omega(|T|^2)$. É um problema desafiador determinar $f(n) = \max r^{\mathrm{ind}}(T)$ e $f_{\mathrm{e}}(n) = \max r_{\mathrm{e}}^{\mathrm{ind}}(T)$, onde o máximo é sobre todas as árvores $T$ de ordem $n$.

Estendendo o resultado acima de Beck sobre caminhos, Bollobás, Burr, e Reimer [30] provaram que $r_{\mathrm{e}}(C^\ell) = O(\ell)$, onde $C^\ell$ é o circuito de comprimento $\ell$. Recentemente, este resultado foi generalizado por Haxell, Kohayakawa, e Łuczak [85], que provaram que $r_{\mathrm{e}}^{\mathrm{ind}}(C^\ell) = O(\ell)$. Este último resultado resolve um problema posto por Graham e Rödl [73], que perguntaram se $r^{\mathrm{ind}}(P^\ell) = O(\ell)$.

4.1.2. *Grafos genéricos.* O problema de se estimar $f(n) = \max r^{\mathrm{ind}}(H)$, onde o máximo é sobre *todos* os grafos $H$ de ordem $n$, é também de grande interesse. Um resultado não publicado de Rödl fornece que $f(n) \leq 2^{2^{n^{1+o(1)}}}$ (cf. [73]). O seguinte problema é devido a Graham e Rödl.

**Problema 2.** *Existe uma contante $C$ para o qual vale que $f(n) \leq C^n$?*

Rödl provou através de seus métodos de [136] que $r^{\mathrm{ind}}(H) \leq C^{|H|}$ para alguma constante $C$ se $H$ é um grafo bipartido. Łuczak e Rödl [121] provaram recentemente que $r^{\mathrm{ind}}(H) \leq |H|^d$ para alguma constante $d = d(\Delta(H))$ que depende apenas do grau máximo $\Delta(H)$ de $H$, resolvendo assim positivamente um problema levantado por Trotter (cf. [73]).

O número de Ramsey induzido $r^{\mathrm{ind}}(G, H)$ para o par de grafos $(G, H)$ é definido como sendo o número de vértices de um grafo $\Gamma$ de ordem mínima satisfazendo a propriedade de que qualquer coloração das arestas de $\Gamma$ em duas cores ou produz um subgrafo induzido monocromático da primeira cor isomorfo a $G$ ou então produz um subgrafo induzido monocromático da segunda cor isomorfo a $H$. Recentemente, Kohayakawa, Prömel, e Rödl [105] provaram que $r^{\mathrm{ind}}(G,H)$ é limitado superiormente por $t^{Ck\log q}$, onde $t=|H|$, $k=|G|$, $q=\chi(H)$, e $C$ é uma constante universal, desde que $k\le t$ e $q\ge 2$. Embora este resultado não resolva o Problema 2, ele parece indicar que estamos caminhando em uma direção promissora.

4.1.3. *Orientações de grafos.* Seja agora $G$ um grafo e $D$ um *digrafo*, um grafo cujas arestas foram orientadas de alguma forma arbitrária mas fixa. Escrevemos $G\xrightarrow{\mathrm{or}}D$ se podemos encontrar uma cópia *induzida* de $D$ em qualquer orientação das arestas de $G$. Ademais, escreva $G\xrightarrow{\mathrm{acy}}D$ se a afirmativa acima vale para qualquer orientação *acíclica* de $G$. No que segue, restringimos a nossa atenção a digrafos acíclicos $D$, *i.e.*, grafos dirigidos $D$ que não contém nenhum circuito dirigido. Ponha $r^{\mathrm{or}}(D)=\min|G|$, onde o mínimo é tomado sobre todos os grafos $G$ tais que $G\xrightarrow{\mathrm{or}}D$, e ponha $r^{\mathrm{or}}_{\mathrm{a}}(D)=\min|G|$, onde o mínimo é tomado sobre todos os grafos $G$ para os quais $G\xrightarrow{\mathrm{acy}}D$. Obter estimativas precisas para $\max r^{\mathrm{or}}(D)$ e $\max r^{\mathrm{or}}_{\mathrm{a}}(D)$, onde os máximos são tomados sobre todos os digrafos de ordem $n$, mostra ser um problema difícil.

Seja $f_{\mathrm{a}}(n)$ a ordem mínima de um grafo $G$ tal que $G\xrightarrow{\mathrm{acy}}D$ *simultaneamente* para todo digrafo acíclico $D$ de ordem $n$, isto é, tal que toda orientação acíclica de $G$ contém uma cópia induzida de todo digrafo acíclico $D$ de ordem $n$. Brightwell e Kohayakawa [33], usando uma variação do método de martingais devido a Bollobás, determinaram o valor de $f_{\mathrm{a}}(n)$ a menos de um fator multiplicativo constante.

Recentemente, Kohayakawa, Łuczak, e Rödl [103] provaram que existe um grafo com $O(n^4\log n)$ vértices e $O(n^6(\log n)^2)$ arestas tal que $G\xrightarrow{\mathrm{or}}\vec{T}^n$ simultaneamente para toda árvore orientada $\vec{T}^n$ de ordem $n$. Assim, em particular, temos $r^{\mathrm{or}}(\vec{T}^n)=O(n^4\log n)$ para qualquer tal árvore $\vec{T}^n$. Ademais, também é provado em [103] que existe um grafo $G$ com $O(n^2\log n)$ vértices e $O(n^3(\log n)^2)$ arestas tal que $G\xrightarrow{\mathrm{acy}}\vec{T}^n$ simultaneamente para toda tal árvore $\vec{T}^n$. Este último resultado é quase ótimo, já que, como demonstrado em [103], todo grafo $G$ com $G\xrightarrow{\mathrm{acy}}\vec{P}^n$, onde $\vec{P}^n$ é o caminho dirigido de ordem $n$, necessariamente tem mais de $n^2/2$ vértices e mais de $\lfloor n/3\rfloor^3$ arestas se $n\ge 3$.

4.2. **Teoria de Ramsey geométrica.** Uma outra subárea de nosso interesse em teoria de Ramsey trata de problemas geométricos. Este tópico nasceu e se consolidou em uma série de trabalhos de Erdős, Graham, Montgomery, Rothschild, Spencer, e Straus [52, 50, 51]. Aqui tratamos de partições, ou *colorações*, do espaço euclideano em um número finito de cores e perguntamos quais configurações geométricas monocromáticas são inevitáveis. Como um exemplo, mencionamos o bem conhecido fato de que se colorimos o plano com três cores, necessariamente colorimos dois pontos a distância 1 da mesma cor, e esta asserção torna-se falsa se podemos usar sete cores. Assim, o 'número cromático do plano' $\chi(\mathbb{E}^2)$ está entre 4 e 7. O valor exato não é conhecido; a determinação de $\chi(\mathbb{E}^2)$ é um problema em aberto há mais de 45 anos. O número cromático do $n$-espaço Euclideano $\mathbb{E}^n$ satisfaz $(6/5+o(1))^n\le\chi(\mathbb{E}^n)\le(3+o(1))^n$. A determinação do comportamento assintótico de $\chi(\mathbb{E}^n)$ é um problema muito interessante.

Um outro tópico sob investigação nesta área é a caracterização de *conjuntos Ramsey*. Estas são estruturas geométricas que necessariamente ocorrem monocromaticamente, ao menos uma vez, desde que o espaço sendo colorido é de dimensão alta o suficiente. Como uma ilustração de o que se conhece sobre conjuntos Ramsey, citamos o seguinte resultado fundamental de Křížž [110]: *se $X \subset \mathbb{E}^n$ tem um grupo transitivo solúvel de isometrias, então $X$ é um conjunto Ramsey.* Um problema que estava aberto havia mais de 20 anos foi assim resolvido por Křížž, pois não se sabia se os vértices de um pentágono regular formavam um conjunto Ramsey!

Este trabalho de Křížž [110] e os trabalhos de Bourgain [32], Frankl e Rödl [62], e Matoušek e Rödl [124] são exemplos do grau de maturidade e sofisticação que esta subárea da teoria de Ramsey atingiu.

Mencionamos um problema central nesta área, provavelmente muito difícil. Um conjunto $X \subset \mathbb{E}^n$ é dito ser *esférico* se ele pode ser imerso em uma esfera $S^N$ para algum inteiro $N$. Sabe-se que todo conjunto Ramsey é esférico, mas a recíproca é uma conjectura de Graham (veja, por exemplo, [72]):

**Conjectura 3.** *Todo conjunto esférico é Ramsey.*

Para resenhas sobre estes fascinantes tópicos, veja Graham [71, 72]. Resenhas sobre outros tópicos baseados na inter-relação entre a geometria e a combinatória são Erdős e Purdy [55], Füredi [66] e Kalai [95].

4.3. **Resultados do tipo anti-Ramsey.** Aqui estamos interessados em encontrar subgrafos *multicoloridos* em grafos cujas arestas foram coloridas, *i.e.*, subgrafos cujas arestas receberam cores todas distintas.

4.3.1. *Grafos anti-Ramsey esparsos.* Sejam $G$ e $H$ dois grafos. Escrevemos $G \xrightarrow{\mathrm{mc}} H$ se em qualquer coloração *própria* das arestas de $G$ podemos encontrar um subgrafo multicolorido de $G$ isomorfo a $H$. Seja $\hat{g}(H) = \inf\{g(G) \colon G \xrightarrow{\mathrm{mc}} H\}$, onde $g(G)$ é a cintura de $G$. O fato de que para todo grafo $H$ temos $\hat{g}(H) < \infty$ é fácil de se observar, mas decidir se $\hat{g}(C^\ell) \to \infty$ conforme $\ell \to \infty$ era um problema devido a Spencer. Este problema foi resolvido por Rödl e Tuza [141] (veja também Haxell e Kohayakawa [83]), que também propuseram a seguinte conjectura muito atraente.

**Conjectura 4.** *Para todo grafo $H$ temos $\hat{g}(H) = g(H)$.*

A conjectura acima é provada no caso em que $H$ é um circuito $C^\ell$ ($\ell \geq 3$) em Kohayakawa e Łuczak [101]. O método usado em [101] é probabilístico, e não é claro se este método pode ser usado para atacar a conjectura de Rödl e Tuza em toda a sua generalidade. Os métodos de Prömel e Voigt [134], além de serem construtivos, podem ser os métodos mais promissores para se resolver este problema.

4.3.2. *Problemas e resultados relacionados.* Finalizamos esta seção mencionando dois outros problemas. Seja $K^n$ o grafo completo de ordem $n$. Seja $b = b(n)$ o maior inteiro com a propriedade de que, em qualquer coloração das arestas de $K^n$ com nenhuma cor aparecendo mais do que $b$ vezes, sempre existe um circuito Hamiltoniano multicolorido em $K^n$. Naturalmente, estamos interessados em saber o quão grande é $b = b(n)$. Hahn e Thomassen [79] conjecturam que $b(n) = \Omega(n)$. Esta conjectura foi recentemente provada por Albert, Frieze, e Reed [3] (veja também Frieze e Reed [64]). O método empregado em [3] é probabilístico e se baseia em variantes do crivo local de Erdős e Lovász [54] (veja também [7, 26]).

Finalmente, mencionamos que um resultado do tipo anti-Ramsey para hipergrafos foi provado por Alon, Lefmann, e Rödl [13] através do uso de resultados poderosos de Ajtai, Komlós, Pintz, Spencer, e Szemerédi [1] (veja também Duke, Lefmann, e Rödl [47]). Os métodos usados em [13] devem ser úteis em muitos outros contextos. De fato, em Kohayakawa, Kreuter, e Steger [100], usa-se uma técnica desenvolvida em [13].

4.4. **Problemas extremais tipo Turán para grafos aleatórios.** Se $G$ e $H$ são grafos, dizemos que $G$ é livre de $H$ se $G$ não contém nenhum subgrafo isomorfo a $H$. Seja $G_p = G_{n,p}$ o grafo aleatório binomial usual de ordem $n$ e densidade $p$. Assim $G_p$ tem como conjunto de vértices um conjunto fixo de cardinalidade $n$ e cada aresta está independentemente presente com probabilidade $p$. Babai, Simonovits, e Spencer [21] provaram que se tomamos um subgrafo livre de $K^3$ de tamanho máximo em $G_{1/2}$, então quase certamente obteremos um subgrafo bipartido. Este resultado é também válido para $G_p$ desde de que $p$ seja suficientemente próximo de $1/2$. Entretanto, o caso em que $p$ depende de $n$ e $p = p(n) \to 0$ conforme $n \to \infty$ está aberto. Sejam $G$ e $H$ dois grafos dados. Ponha

$$\mathrm{ex}(G, H) = \max\{e(J) \colon H \not\subset J \subset G\}.$$

Desta forma, $\mathrm{ex}(G, H)$ é o tamanho máximo de um subgrafo de $G$ livre de $H$.

**Problema 5.** *Seja $H$ um grafo. Investigue a variável aleatória*

$$Z_H(G_p) = \mathrm{ex}(G_p, H)$$

*para $p = p(n) \to 0$ conforme $n \to \infty$.*

Existem hoje alguns resultados substanciais motivados pelo Problema 5, embora eles estejam longe de resolver este problema em toda sua generalidade. O Problema 5, no caso em que $H$ é um circuito, foi resolvido satisfatoriamente por Haxell, Kohayakawa, e Łuczak [86, 87] (cf. também Haxell e Kohayakawa [82]) e Kohayakawa, Kreuter, e Steger [100]. O caso em que $H$ é o grafo completo de ordem quatro foi recentemente resolvido em Kohayakawa, Łuczak, e Rödl [102].

Lembremos que Rödl e Ruciński [139, 140] recentemente conseguiram estabelecer a função limiar para a propriedade $G_p \to (H)_r$ para todo grafo $H$ e todo inteiro fixo $r \geq 2$. Aqui, como de usual, escrevemos $G \to (H)_r$ se em qualquer $r$-aresta-coloração de $G$ podemos sempre encontrar uma cópia monocromática de $H$. Assim, é plausível que uma solução satisfatória para o Problema 5 esteja já ao nosso alcance.

Concluímos mencionando um resultado relacionado. Da mesma forma que os métodos desenvolvidos por Rödl e Ruciński [140] puderam ser usados no estudo de propriedades de van der Waerden de conjuntos aleatórios de inteiros, alguns dos métodos usados no estudo do Problema 5, junto com outros métodos, foram usados por Kohayakawa, Łuczak, e Rödl [104] para investigar conjuntos aleatórios de inteiros com a propriedade de Szemerédi com respeito a progressões aritméticas de ordem três.

4.5. **Conjuntos estáveis em grafos livres de $K^s$ e $R(s,t)$.** Seja $G$ um grafo de ordem $n$ que não contém um subgrafo completo de ordem $s$. Estamos interessados aqui no número de independência $\alpha(G)$ de $G$, a cardinalidade máxima de um conjunto independente em $G$.

Ajtai, Komlós, e Szemerédi [2] mostraram que todo grafo sem triângulos ($s = 3$) tem $\alpha(G) \geq cn(\log d)/d$, onde $c$ é uma constante e $d$ é o grau médio de $G$. Erdős pergunta se uma afirmativa similar pode ser feita para $s = 4$ e, em geral, para todo $s \geq 4$ fixo. Este problema permanece aberto e é, sem dúvida, extremamente difícil. Observamos que Ajtai, Komlós, Pintz, Spencer, e Szemerédi [1] têm um resultado relacionado (veja §4.3.2 acima), a saber, um resultado que afirma que todo hipergrafo $k$-uniforme $H$ de cintura $\geq 5$ tem $\alpha(H) \geq c_k n((\log d)/d)^{1/(k-1)}$, onde $d$ é, novamente, o grau médio de $H$. Mais recentemente, Duke, Lefmann, e Rödl [47] observaram que de fato a condição de que a cintura seja pelo menos 3 é suficiente, desde que $k \geq 3$.

As demonstrações de ambos os resultados acima empregam uma técnica que é, em essência, uma técnica de construção aleatória dirigida. Esta técnica foi altamente refinada por Rödl [137], Frankl e Rödl [61], Pippenger e Spencer [129], e Kahn [94, 93] para investigar empacotamentos e coberturas em hipergrafos e, recentemente, Grable [70] usou uma extensão de tais técnicas para melhorar alguns destes resultados. Suspeitamos que estes melhoramentos, entre outras técnicas desenvolvidas recentemente, permitirão resolver o problema de Erdős mencionado acima, pelo menos em parte.

Uma característica muito atraente deste problema é que ele tem conseqüências reais no estudo de números de Ramsey não-diagonais, já que, se resolvido satisfatoriamente, possibilitará a obtenção de bons limites superiores. Defina $R(s,t)$ como o menor inteiro $n$ tal que todo grafo com $n$ vértices contém ou um grafo completo com $s$ vértices ou um conjunto independente com $t$ vértices. O resultado de Ajtai, Komlós, e Szemerédi implica que $R(3,t) \leq ct^2/\log t$. Um argumento de indução fornece que $R(s,t) \leq c_s t^{s-1}/(\log t)^{s-2}$, mas um limite superior obtido como conseqüência da solução do problema de Erdős tem maiores chances de ser justo. Para comparação, mencionamos que o melhor limite inferior para $R(s,t)$ conhecido atualmente é basicamente $t^{(s-1-o(1))/2}$ para todo $s$ fixo e $t \to \infty$, e parece ser improvável que este limite possa ser melhorado substancialmente, mesmo através de métodos poderosos como aqueles desenvolvidos por Kim [97] para o caso $s = 3$.

4.6. **'Spanners' em grafos.** Seja $G = (V, E)$ um grafo conexo de ordem $n$ com pesos positivos nas arestas. Um subgrafo gerador $G' = (V, E')$ de $G$ é um *$t$-spanner* de $G$ se para todo par de vértices $u$, $v \in V$ o peso do caminho mais leve entre $u$ e $v$ em $G'$ é no máximo $t$ vezes esta quantidade no grafo $G$. Consideramos aqui o problema de construir *spanners* esparsos. O quão esparso é um *spanner* pode ser medido através de duas quantidades: o seu tamanho e o seu peso $\mathrm{wt}(G')$, definido, naturalmente, como a soma dos pesos das arestas de $G'$.

Seja $MST$ uma árvore geradora de peso mínimo em $G$. Soares (veja [148]) provou que para qualquer grafo $G$ como acima, e quaisquer $t > 1$ e $\epsilon > 0$, um $t$-spanner de $G$ com peso $O\{n^{(2+\epsilon)/(t-1)}\mathrm{wt}(MST)\}$ e $O(n^{1+2/(t-1)})$ arestas pode ser construído em tempo polinomial.

Por outro lado, o seguinte limite inferior foi provado em [17]: para todo par de inteiros $t \geq 1$ e $n \geq 3$, existe um grafo $G$ de ordem $n$ com peso nas arestas tal que todo *$t$-spanner* $G'$ de $G$ tem peso $(1/8)n^{4/3(t+2)}\mathrm{wt}(MST)$ e pelo menos $(1/8)n^{1+4/3(t+2)}$ arestas.

**Problema 6.** *Encontre um esquema de aproximação polinomial para o problema dos spanners, ou, em outras palavras, uma família de algoritmos polinomiais $\{\mathcal{A}_\epsilon\}$, um algoritmo $\mathcal{A}_\epsilon$ para cada $\epsilon > 0$, tal que cada $\mathcal{A}_\epsilon$ constrói um $t$-spanner $G'$ de $G$ para todo grafo $G$ com peso nas arestas dado, satisfazendo a propriedade de que $G'$ tem peso não maior do que $1 + \epsilon$ vezes o peso do $t$-spanner mínimo de $G$.*

Caso encontremos um esquema polinomial como acima, teremos um resultado ótimo: Peleg e Schäffer [128] provaram que é $\mathcal{NP}$-difícil se obter uma solução ótima para o problema dos *spanners*.

**Problema 7.** *Alternativamente, prove que o problema de se encontrar um spanner de peso mínimo é* MAX SNP*-difícil.*

Em outra palavras, o problema acima pede para provar que esquemas de aproximação como no Problema 6 não existem, a menos que $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$ (veja [19] e §4.11 abaixo).

**Problema 8.** *Encontre um algoritmo polinomial $\mathcal{A}$ com garantia de desempenho para construir $t$-spanners, i.e., para cada grafo $G$ com peso nas arestas e $t \geq 1$, o algoritmo $\mathcal{A}$ deve construir um $t$-spanner $G'$ de $G$ tal que o peso de $G'$ é no máximo $c\delta_{\mathrm{opt}}$ onde $c$ é uma constante absoluta e $\delta_{\mathrm{opt}}$ é o peso mínimo possível para um $t$-spanner de $G$.*

4.7. **Enumeração de grafos com subgrafos proibidos.** Seja dado um grafo $H$. Denotamos por $f(H,n,m)$ o número de grafos livres de $H$ de ordem $n$ e tamanho $m$, e pomos $g(H,n) = \sum_m f(H,n,m)$. Analogamente, denotamos por $f_{\mathrm{ind}}(H,n,m)$ o número de grafos de ordem $n$ e tamanho $m$ livres de cópias *induzidas* de $H$, e pomos $g_{\mathrm{ind}}(H,n) = \sum_m g_{\mathrm{ind}}(H,n,m)$. O estudo das funções $f$, $g$, $f_{\mathrm{ind}}$, $g_{\mathrm{ind}}$ é de natureza fundamental. Para $g$ e $g_{\mathrm{ind}}$, veja [4, 31, 131, 132, 133] e as referências lá citadas.

Seja $\mathcal{P}$ uma propriedade hereditária qualquer de grafos, *i.e.*, uma propriedade que é fechada com respeito à operação de se tomar subgrafos induzidos. Alekseev [4] e, independentemente, Bollobás e Thomason [31] provaram que o número $f_{\mathcal{P}}(n)$ de grafos de ordem $n$ com a propriedade $\mathcal{P}$ satisfaz $\log_2 f_{\mathcal{P}}(n) = (1 - 1/r + o(1))\binom{n}{2}$ conforme $n \to \infty$, onde $r = r(\mathcal{P}) \geq 1$ é um inteiro que pode ser descrito explicitamente em termos de $\mathcal{P}$. Um problema desafiador é o de generalizar este resultado para hipergrafos.

**Problema 9.** *Seja $\mathcal{P}$ uma propriedade de hipergrafos $r$-uniformes ($r \geq 3$). Descreva os valores possíveis de $\lim \binom{n}{r}^{-1} \log_2 f_{\mathcal{P}}(n)$, onde $f_{\mathcal{P}}(n)$ é o número de hipergrafos $r$-uniformes de ordem $n$ satisfazendo $\mathcal{P}$.*

Nos problemas acima, seria de grande interesse especificar não apenas a ordem mas também o *tamanho* dos grafos e hipergrafos que estamos enumerando. Os problemas que obtemos com estas condições extras são, entretanto, muito mais difíceis de serem tratados. De fato, o que se conhece atualmente sobre o comportamento das funções $f$ e $f_{\mathrm{ind}}$ é muito mais fraco do que o que sabemos sobre $g$ e $g_{\mathrm{ind}}$. Um resultado recente de Prömel e Steger [130] estabelece o comportamento assintótico fino da função $f(K^3,n,m)$ para uma ampla gama da função $m = m(n)$, mas determinar o comportamento desta função para todo $m = m(n)$ parece ainda elusivo.

Observamos que a investigação da função $f(H,n,m)$ para uma gama ampla de $m = m(n)$ será provavelmente útil no estudo da variável aleatória $Z_H(G_p) = \mathrm{ex}(G_p,H)$ discutida em §4.4 (cf. Problema 5). Encerramos este parágrafo com um problema específico sobre a função $f$. Considere a probabilidade $P_{\ell,n,m}$ de um grafo de ordem $n$ e tamanho $m$, escolhido uniformemente ao acaso, ser livre de $C^{2\ell}$. Assim $P_{\ell,n,m} = f(C^{2\ell},n,m)\binom{\binom{n}{2}}{m}^{-1}$.

**Problema 10.** *É verdade que*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{m} \log P_{\ell,n,m} = 0$$

*para toda função $m = m(n) = \omega n^{1+1/(2\ell-1)}$, onde $\omega = \omega(n) \to \infty$ conforme $n \to \infty$ e $\omega = o(n^{1/2(\ell-1)(2\ell-1)})$?*

Para o caso $\ell = 2$, veja Füredi [65]. Mais genericamente, em Kohayakawa, Kreuter, e Steger [100], uma variante do Problema 10 é estudada para $\ell$ genérico, e, como uma conseqüência de um resultado de enumeração assintótica de [100], o Problema 5 é resolvido no caso em que $H = C^{2\ell}$ e $p = p(n)$ pertence a um intervalo polinomial suficientemente pequeno em torno do limiar $n^{-1+1/(2\ell-1)}$. Este resultado implica em particular que existem grafos extremamente esparsos com a propriedade de que qualquer fração positiva de suas arestas geram um circuito de comprimento par pré-determinado.

4.8. **Objetos pseudo-aleatórios e suas aplicações.** Um tópico de bastante interesse em várias áreas da matemática e teoria da computação refere-se à noção de objetos 'típicos' ou 'pseudo-aleatórios.' Mencionamos um exemplo da teoria de complexidade computacional.

Uma vez descoberto que algoritmos probabilísticos parecem ser mais poderosos que algoritmos determinísticos, um problema fundamental que passou a exigir atenção é decidir se máquinas de Turing probabilísticas são efetivamente mais poderosas que as máquinas determinísticas usuais. Este ponto está longe de ser esclarecido; para uma introdução ao assunto, veja Luby e Wigderson [120]. Agora, um resultado interessante clássico que limita o poder computacional de processos aleatórios, devido a Sipser (veja, por exemplo, [120]) é que $\mathbf{BPP} \subset \Sigma_2$. Este resultado é obtido através da construção de certas famílias pseudo-aleatórias pequenas de palavras. Para trabalhos mais recentes nesta linha, veja Alon *et al.* [11, 12]. Veja também Alon [7] e Beck [26], e as monografias de Alon e Spencer [15] e Motwani e Raghavan [127] para a área de algoritmos probabilísticos em geral e processos de *derandomization*.

Em nosso projeto estaremos interessados na caracterização de objetos combinatórios pseudo-aleatórios.

4.8.1. *Grafos e estruturas correlatas.* Sem dúvida, o estudo de grafos, hipergrafos, e torneios pseudo-aleatórios já se encontra bastante desenvolvido. Podemos citar Rödl [138] como um dos trabalhos iniciais nesta linha. Seguiram-se Frankl, Rödl, e Wilson [63] e Thomason [150], que, independentemente, introduziram as técnicas básicas da área. Estas investigações ganharam uma estrutura mais uniforme com Chung, Graham, e Wilson [41] e Thomason [151]. Torneios pseudo-aleatórios são estudados por Chung e Graham [38]. Veja também Simonovits e Sós [147].

Uma teoria muito mais complexa está sendo desenvolvida para estender os resultados dos trabalhos acima para hipergrafos. Um trabalho 'maximal' nesta linha é Chung e Graham [37]. Veja também Chung [34, 35], Chung e Graham [36, 39], e Haviland e Thomason [81].

4.8.2. *Subconjuntos de inteiros.* O estudo de subconjuntos pseudo-aleatórios de inteiros módulo $n$ é o tema de Chung e Graham [40]. Este trabalho apresenta um estudo sistemático deste tópico, cujas várias facetas haviam surgido implicitamente em trabalhos anteriores, como no estudo de grafos de Paley (veja, por exemplo, Capítulo XIII de Bollobás [29]).

4.8.3. *Objetos esparsos e o lema de Szemerédi.* A teoria até agora desenvolvida sobre estruturas pseudo-aleatórias, discutida brevemente em §§4.8.1 e 4.8.2 acima, tratam bastante satisfatoriamente de objetos densos, especialmente no caso de grafos. Entretanto, uma teoria análoga para objetos esparsos parece ainda estar fora de alcance. Alguns resultados positivos iniciais nesta direção ocorrem em Thomason [150, 151]. Outra evidência de que podemos esperar um pouco mais de avanço nesta linha é uma observação feita independentemente por Kohayakawa e Rödl (cf. [98]) de que o poderoso lema de regularidade de Szemerédi [149] admite uma versão esparsa. Esta observação é crucial em [85, 86, 87, 99, 102, 104]. Estamos no momento elaborando conjuntamente com Rödl [106] as conseqüências algorítmicas de [98]. Neste trabalho, estaremos tratando, dentre outros, dos problemas investigados por Alon, Duke, Lefmann, Rödl, e Yuster [9] e por Duke, Lefmann, Rödl [46].

Objetivamos investigar extensões dos resultados mencionados em §§4.8.1 e 4.8.2 para estruturas pseudo-aleatórias esparsas usando, entre outros, a observação de Kohayakawa e Rödl acima.

Mais geralmente, estudaremos as impressionantes aplicações do lema de regularidade de Szemerédi encontradas recentemente (veja, por exemplo, Komlós, Sárközy e Szemerédi [108]) para investigar possíveis outras aplicações do resultado em [98]. Um extenso trabalho sobre o lema de Szemerédi, variações, e suas inúmeras aplicações é Komlós e Simonovits [109].

4.9. **Métodos algébricos e topológicos.** Uma das manifestações mais saudáveis das investigações correntes em matemática discreta é a sua surpreendente interdisciplinaridade. Embora esta área da matemática se preocupe principalmente com objetos finitos com pouca estrutura, vários trabalhos têm mostrado como ferramentas inesperadas, provenientes de ramos 'tradicionais' da matemática, podem se mostrar poderosas também aqui. Uma pequena seleção de exemplos ilustrativos são os trabalhos de Alon, Frankl, e Lovász [10], Björner e Lovász [28], Kříž [111], Lovász [118], e Yao [154]. Uma resenha sobre aplicações de métodos topológicos em combinatória foi escrita por Björner [27] para o *Handbook of Combinatorics*.

Mencionamos também que ferramentas algébricas, variando de ferramentas elementares da álgebra linear e multilinear até aquelas envolvendo geometria algébrica, têm sido aplicadas em combinatória. Como uma pequena seleção de trabalhos nesta linha podemos citar Alon [5, 6], Alon e Scheinerman [14], Alon e Tarsi [16], e Reiterman, Rödl, e Šiňajová [135]. Na maioria destes trabalhos, a ferramenta algébrica principal é um resultado devido a Warren [153]. Para uma resenha desta área, veja o capítulo escrito por Alon [8] no *Handbook*.

Dentro deste projeto, pretendemos estudar outras possíveis aplicações no estilo acima.

4.10. **Bases de Hilbert: uma versão inteira do teorema de Carathéodory.** Um cone poliedral (racional) é um conjunto da forma $\{x\colon Ax \le 0\}$ onde $A$ é uma $m \times n$-matriz racional. Devido a teoremas de Minkowski e Weyl (veja Schrijver [144]), sabemos que um cone $C$ é poliedral se e somente se existem vetores racionais $a_1, \dots, a_k$ tal que $C = \operatorname{cone}(a_1, \dots, a_k) := \{\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_k a_k \colon \lambda_i \ge 0,\ i = 1, \dots, k\}$. A dimensão de um cone $C$, denotada por $\dim(C)$, é a cardinalidade de um conjunto máximo de vetores linearmente independentes em $C$. Um teorema famoso de Carathéodory diz o seguinte.

**Teorema 11.** *Se $x \in C := \operatorname{cone}(a_1, \dots, a_k)$ então $x$ pode ser escrito como combinação linear não-negativa de no máximo $\dim(C)$ vetores em $\{a_1, \dots, a_k\}$.*

Cook, Fonlupt e Schrijver [42] consideraram uma versão inteira análoga ao teorema de Carathéodory. Um conjunto de vetores inteiros $\{h_1, \dots, h_k\}$ é dito uma base de Hilbert se todo vetor inteiro em $\operatorname{cone}(h_1, \dots, h_k)$ pode ser escrito como combinação linear inteira não-negativa dos vetores $\{h_1, \ldots, h_k\}$. Hilbert mostrou que todo cone poliedral é gerado por uma base de Hilbert finita (veja capítulo 16 de Schrijver [144]). Além disso van der Corput mostrou que se o cone $C$ é pontudo (*i.e.*, o único subespaço linear contido em $C$ é $\{0\}$) então $C$ é gerado por uma única base de Hilbert minimal (veja [142] e capítulo 16 de Schrijver [144]).

Suponha que $C$ é um cone poliedral em $\mathbb{R}^n$ e que $\{h_1, \ldots, h_k\}$ é uma base de Hilbert minimal de $C$. A versão inteira análoga ao teorema de Carathéodory considerada por Cook, Fonlupt e Schrijver é a seguinte: qual é o menor inteiro $t$ tal que todo vetor inteiro contido em $C$ pode ser escrito como a combinação inteira não-negativa de no máximo $t$ vetores em $\{h_1, \ldots, h_k\}$? Cook, Fonlupt e Schrijver observaram que em geral não existe limite superior para $t$ em termos da dimensão do cone $C$ e que se o cone $C$ é pontudo então $t \leq 2n - 1$. Sebő [145], refinando as técnicas empregadas por Cook, Fonlupt e Schrijver, mostrou que para cones pontudo $t \leq 2n - 2$ e que se $n \leq 3$ então $t = n$.

Um sistema racional $Ax \leq b$ é dito totamente dual integral (TDI) se o mínimo na equação de dualidade em programação linear

$$\max\{wx \colon Ax \leq b\} = \min\{yb \colon yA = w,\ y \geq 0\} \tag{1}$$

pode ser atingido por um vetor inteiro para todo vetor inteiro $w$ para o qual o ótimo existe (cf. Edmonds e Giles [49]). A questão sobre bases de Hilbert acima está relacionada com o seguinte problema (veja capítulo 22 de Schrijver [144]): dado um sistema TDI $Ax \leq b$, onde $A$ é uma matriz inteira, qual é o menor inteiro $t$ tal que para todo vetor inteiro $w$ para qual o mínimo em (1) existe o mínimo pode ser atingido por um vetor inteiro com no máximo $t$ entradas não nulas? Esta pergunta é uma generalização do problema considerado por Cunningham [43]. Cunningham considerou a seguinte questão relacionada ao teste de pertinência no poliedro de um matróide: se um vetor pode ser escrito como combinação linear inteira não-negativa das bases (vetores característicos) de um matróide, pode então esse vetor ser escrito como uma combinação linear inteira não-negativa de um número “pequeno” dessas bases? A resposta de Cunningham para esta pergunta foi de que $m^4 + 1$ bases são sempre suficientes, onde $m$ é o número de elementos do matróide. (Portanto, Cunningham mostrou que um número polinomial de bases é sempre suficiente.)

Para sistemas $Ax \leq b$ onde $A$ é uma $m \times n$-matriz totalmente unimodular (TU) é fácil ver que $t \leq n$. Devido a relação entre sistemas TDI e bases de Hilbert (cf. Giles e Pulleyblank [68]) os resultados de Cook, Fonlupt e Schrijver e de Sebő implicam que se $Ax \leq b$ é TDI então $t \leq 2n - 2$. Existem sistemas TDI $Ax \leq b,\ x \geq 0$ para os quais o $\min\{yb \colon yA \geq w,\ y \geq 0\}$ pode ser atingido por um vetor inteiro com no máximo $n$ entradas não-nulas; entre os sistemas que satisfazem esta propriedade estão os sistemas formados pela matriz de incidência dos cliques de um grafo perfeito (cf. Cook, Fonlupt e Schrijver [42]) e os sistemas que descrevem o poliedro dos emparelhamentos de um grafo (cf. Cunningham e Marsh [44]). Sistemas associados a *cross-free families* (cf. Schrijver [143]), também têm essa propriedade já que variáveis duais não-nulas podem sempre ser escolhidas de forma que a submatriz formada pelas linhas correspondentes a essas variáveis formem uma matriz TU. (Entre esses sistemas estão, entre outros, o sistema da intersecção de matróides de Edmonds, o sistema dos *branchings* de Fulkerson e o sistema dos cortes orientados de Lucchesi e Younger.) Uma lista de bases de Hilbert onde se conhece um limite melhor do que $2n - 2$ pode ser encontrada em Sebő [145].

Sebő [145] propôs algumas conjecturas relacionadas com o que foi descrito acima. A principal dessas conjecturas (e a que motivou todas as outras em seu artigo) é a seguinte.

**Conjectura 12.** *Se $H$ é uma base de Hilbert minimal de um cone pontudo em $\mathbb{R}^n$ e $w$ é um vetor inteiro contido em* $\mathrm{cone}(H)$*, então $w$ pode ser escrito como combinação linear inteira não-negativa de no máximo $n$ vetores de $H$. Além disso, tais vetores podem ser determinados em tempo polinomial.*

Seria interessante se verificássemos a validade da conjectura de Sebő mesmo que fosse apenas para algum caso particular (*e.g.*, para cones gerados por vetores característicos de árvores geradoras de grafos planares).

4.11. **Sistemas de demonstrações em teoria da computação.** Vários dos resultados recentes importantes dentro da teoria de complexidade tratam de 'sistemas de provas' ou 'sistemas de demonstrações' como entendido na ciência da computação. Exemplos importantes são *sistemas interativos de provas*, *sistemas de provas com conhecimento zero*, e *provas verificáveis probabilisticamente*, ou *provas transparentes* ou *holográficas*. Resultados nesta área têm conseqüências profundas em problemas de aproximação em otimização combinatória. De fato, surpreendentemente, estes resultados mostraram ser ferramentas poderosas para se provar limites inferiores para o desempenho de algoritmos polinomiais de aproximação. Referimos o leitor aos trabalhos de Babai [20], Goldreich [69], e Hougardy, Prömel, e Steger [92] para uma introdução excelente a esta linha de pesquisa.

Para um resultado recente que ilustra o poder destes sistemas de provas, mencionamos um resultado de Håstad [80]: *a menos que $\mathcal{NP} = co\mathcal{R}$, o número de clique de um grafo não pode ser determinado em tempo polinomial, mesmo a menos de um fator multiplicativo de $n^{1/2-o(1)}$*.

Em julho de 1995, dois dos proponentes deste projeto deram um curso introdutório sobre provas probabilisticamente verificáveis e a impossiblidade de aproximações para certos problemas de otimização no *20º Colóquio Brasileiro de Matemática* no IMPA. (Veja Kohayakawa e Soares [107].)

4.12. **Compressão de dados.** O objetivo da compressão de dados é reduzir o espaço necessário para se armazenar arquivos no computador ou reduzir o tempo necessário para se transmitir informações entre computadores.

O entendimento e aplicações secundárias dos métodos de compressão de dados envolvem diferentes áreas do conhecimento, tais como, Estrutura de Dados, Teoria da Informação, Criptografia, Complexidade Computacional, Lingüística e Estatística. Por outro lado, para a implementação dos algoritmos de compressão, uma vivência prática com linguagens de programação é requerida.

Pelo exposto acima, vemos que Compressão de Dados é uma área interessante de trabalho que propicia uma frutífera interação entre teoria e prática.

Embora não tenhamos na equipe nenhum especialista em Compressão de Dados, estamos começando um trabalho de pesquisa nessa área. Nossa proposta é desenvolver um compressor de textos especializado para o português brasileiro. Esse projeto deve se desenvolver em duas etapas. Inicialmente precisaremos desenvolver um modelo estatístico que represente de forma adequada as ocorrências de letras num texto escrito em português. Numa segunda etapa, um algoritmo de compressão baseado no modelo estatístico obtido deverá ser implementado.

4.13. **Medianas de partições.** Seja $X$ um conjunto finito com $n$ elementos, $\mathcal{P}$ o conjunto de todas as partições de $X$, e $m$ um inteiro positivo fixo. Um *perfil* de partições é uma $m$-upla $\Pi = (\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_m)$ de partições em $\mathcal{P}$. O conjunto de todos os perfis é denotado por $\mathcal{P}^m$. Se $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{R}$, uma $m$-upla em $\mathcal{P}^m$ é chamada um $\mathcal{P}$-*perfil*.

Se $d$ é uma métrica definida sobre $\mathcal{P}$, então a *distância* entre uma partição $\pi$ e um perfil $\Pi = (\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_m)$, denotada por $D(\pi, \Pi)$, é definida da seguinte forma:

$$D(\pi, \Pi) := \sum_{k=1}^{m} d(\pi, \pi_i).$$

A partição $\pi$ que minimiza a função $D$ é chamada *mediana* de $\Pi$.

São vários os problemas sobre medianas de partições: alguns de caráter puramente combinatório [22, 23, 113, 114], outros relativos a otimização e complexidade computacional [74, 75, 122, 123, 152].

O conceito de mediana que definimos para *partições* também se aplica a outras estruturas, e não apenas a reticulados semi-modulares (como é o caso dos reticulados das partições). Trata-se de um conceito bastante investigado, sendo vasta a literatura a respeito.

Pretendemos investigar alguns problemas relativos a medianas de partições, e eventualmente de outras estruturas (como por exemplo, reticulados modulares). Em particular, um dos problemas que será objeto de estudo é o cálculo da função

$$\varphi(\mathcal{P}, m, n) := \max_{\Pi \in \mathcal{P}^m} \{\min_{\pi \in \mathcal{P}} D(\pi, \Pi)\}.$$

O valor da função $\varphi$ é de interesse para o cálculo de coeficientes estatísticos de concordância de partições. Trata-se de um problema em aberto sobre o qual apenas limites inferiores e superiores são conhecidos. Há algum tempo atrás obtivemos alguns resultados preliminares mas estes ainda não foram publicados. Estamos interessados, entre outros, no caso em que a métrica $d(x, y)$ entre duas partições $x$ e $y$ é o número mínimo de operações necessárias para obter $x$ de $y$; onde uma "operação" consiste na *união* de duas classes ou na *subdivisão* de uma classe em duas outras. Alguns progressos nesses estudos foram feitos, durante a visita de M. Loebl (veja §5.2).

4.14. **Problemas de empacotamento tridimensional.** Temos interesse no desenvolvimento de algoritmos de aproximação (polinomiais) e na análise de desempenho assintótico de algoritmos para o seguinte problema:

**Problema 13.** [Problema de Empacotamento Tridimensional ($PET$)] *Dados uma caixa $B = (a, b, \infty)$ com altura ilimitada e uma lista de caixas $L = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$, encontrar um empacotamento de $L$ em $B$ cuja altura seja a menor possível.*

Para descrever formalmente os resultados obtidos, consideremos as seguintes notações e definições. Se $\mathcal{A}$ é um algoritmo para o $PET$ e $L$ é uma lista de caixas, então $\mathcal{A}(L)$ denota a altura do empacotamento gerado pelo algoritmo $\mathcal{A}$ quando aplicado a uma lista $L$, e $OPT(L)$ denota a altura de um empacotamento ótimo de $L$. Dizemos que $\alpha$ é um *limite de desempenho assintótico* de um algoritmo $\mathcal{A}$ se existe uma constante $\beta$ tal que para toda lista $L$, cujas caixas têm altura no máximo $Z$, tem-se que $\mathcal{A}(L) \leq \alpha \cdot OPT(L) + \beta \cdot Z$.

Um dos melhores resultados que se conhecia a respeito de algoritmos de aproximação para o $PET$ era um algoritmo devido a Li e Cheng [115], com limite de desempenho assintótico $\alpha$ próximo de 2.89. Tal algoritmo tem como desvantagem o fato de que, à medida que $\alpha$ se aproxima de 2.89, a constante $\beta$ cresce. Em 1994 desenvolvemos um algoritmo com limite de desempenho assintótico $\alpha = 2.71$ (apresentado no XV International Symposium on Mathematical Programming, Michigan). Recentemente, desenvolvemos um outro algoritmo de complexidade igual à do algoritmo de Li e Cheng, com um limite de desempenho assintótico que converge para 2.67, sem a desvantagem quanto ao crescimento do valor da contante $\beta$. Este resultado será publicado em [125].

No caso do $PET$, o empacotamento deve ser ortogonal e orientado nas três dimensões. Ou seja, cada caixa em $L$ deve ser guardada em $B$ ortogonalmente em relação às três dimensões e de modo que os eixos que definem a largura, o comprimento e a altura fiquem paralelos aos eixos $x$, $y$ e $z$, respectivamente. Trata-se do caso conhecido como *empacotamento ortogonal orientado*.

Estamos interessados em uma outra variante do $PET$. Trata-se do caso *ortogonal e orientado na dimensão $z$*. Neste caso permite-se que as caixas a serem empacotadas sofram rotações ortogonais sobre o fundo. Esta variante é bastante interessante do ponto de vista prático, mas ainda não foi largamente estudada. Há poucas referências sobre esta variante na literatura. Recentemente, obtivemos alguns resultados preliminares sobre este caso. Estamos também investigando casos especiais do $PET$ onde as instâncias constituem-se só de listas de caixas quadradas e/ou a caixa $B$ é quadrada. Nesses casos, algoritmos com limites de desempenho assintótico melhores estão sendo obtidos. Alguns desses resultados são apresentados em [126].

4.15. **Caminhos e circuitos em grafos.** Temos interesse no estudo de tópicos relativos a *modularidade de caminhos e circuitos em grafos*. Em particular, estamos interessados em problemas a respeito da existência em um grafo (orientado ou não) de circuitos ou caminhos de comprimento côngruos a $p$ mod $q$ (onde $p$ e $q$ são naturais, $0 \le p < q$), em algoritmos de busca de tais objetos, e na complexidade computacional de tais problemas. Resultados interessantes nessa linha foram obtidos por Arkin, Papadimitriou e Yannakakis [18], Lapaugh e Papadimitriou [112], Gallucio e Loebl [67], bem como Seymour e Thomassen [146]. Entre os resultados que obtivemos até o momento citamos um algoritmo linear para circuitos ímpares em grafos orientados, uma heurística para o problema dos circuitos pares em grafos orientados e alguns resultados sobre a complexidade computacional de alguns desses problemas para grafos bipartidos. Observamos que a complexidade computacional do problema de decidir se um grafo orientado contém um circuito par está em aberto há mais de 20 anos. Não se conhece algoritmo eficiente para este problema, e nem foi provado que o problema é difícil. Trata-se, sem dúvida, de um problema de grande interesse. Problemas de mesmo tipo, relativos a circuitos induzidos também são temas de nosso interesse.

4.16. **Fatores e empacotamentos em grafos.** Seja $\mathcal{F}$ uma família de grafos conexos. Dado um grafo $H$ qualquer, $G$ é um *$\mathcal{F}$-empacotamento* de $H$ se $G$ é um subgrafo de $H$ e cada componente de $G$ é isomorfa a um elemento de $\mathcal{F}$. Se $V(G) = V(F)$, então $G$ é um *$\mathcal{F}$-fator* de $H$.

Estamos interessados em problemas da forma *"dado um grafo $H$, decidir se $H$ tem um $\mathcal{F}$-fator"*, que chamaremos genericamente de *problemas de fatorização*. Problemas de fatorização têm sido estudados desde o final da década de 70. Em 1978, Hell e Kirkpatrick [88] apresentaram uma caracterização da complexidade do problema para famílias $\mathcal{F}$ unitárias, mostrando que, em essência, o problema do emparelhamento perfeito é o único dentre tais problemas que não é $\mathcal{NP}$-completo. Posteriormente, diversos problemas de fatorização foram caracterizados como sendo $\mathcal{NP}$-completos [89, 90, 91]. Ao mesmo tempo, outros problemas foram caracterizados como polinomialmente solúveis, como o problema de fatorização por famílias sequenciais de estrelas [91] e os problemas de fatorização por famílias finitas de grafos hipo-emparelháveis, juntamente com o grafo $K_2$ [90]. Do estudo desses problemas surgiu uma fascinante generalização da teoria clássica dos emparelhamentos e de suas técnicas [48, 119].

Em 1988, Loebl e Poljak [116] apresentaram uma nova classe de famílias de grafos—as famílias matroidais—que inclui todas as famílias para as quais se sabia na época que o respectivo problema de fatorização é polinomial. Usando essa nova classe, Loebl e Poljak em [117] caracterizaram a complexidade dos problemas de $\{K_2, G\}$-fatorização e apresentaram uma nova sub-classe das famílias matroidais para os quais o problema de fatorização é polinomial: as famílias boas. Baseados nesses resultados, Loebl e Poljak conjecturaram que um problema de fatorização é polinomial se e somente se a família de grafos que o define é matroidal. Sabe-se que para problemas de fatorização por $\{K_2, G\}$ essa conjectura é válida, mas o caso geral é uma intrigante questão que está em aberto desde 1988.

4.17. **Investigação poliédrica de problemas combinatórios.** No tocante aos *métodos poliédricos*, é nosso objetivo desenvolver algoritmos baseados na estratégia *branch and cut* para alguns problemas difíceis de otimização combinatória (por exemplo, problemas de partição de grafos e hipergrafos, cobertura de grafos por caminhos, problemas de cortes com terminais). A subárea em que se insere esta pesquisa é conhecida como combinatória poliédrica. A literatura nessa subárea tem crescido enormemente nos últimos anos, tendo nossa equipe acompanhado os avanços da pesquisa de ponta que tem sido feita nessa área.

Tal estratégia tem obtido cada vez maior aceitação na comunidade internacional, sendo responsável pelo surgimento de grupos em vários centros do exterior que fazem pesquisa nesta linha (TU e ZIB Berlim, CORE–Louvain, IASI–Roma). Esta abordagem tem sido considerada especialmente indicada para resolver problemas reais de grande porte.

Temos tentado divulgar essa área, oferecendo cursos de pós-graduação aqui na USP e formando pessoas. Faz parte desses esforços, o mini-curso intitulado *"Combinatória Poliédrica e Planos-de-Corte Faciais"* que dois dos integrantes desta equipe oferecerão na X Escola de Computação a ser realizada na UNICAMP, no período de 8–13 julho deste ano (veja [60]).

Neste contexto, é fundamental a obtenção de resultados teóricos a respeito da estrutura facial dos poliedros associados aos problemas em questão. Além disso, o estudo da complexidade computacional bem como o desenvolvimento de algoritmos heurísticos eficientes para os problemas de separação relativos a tais poliedros constituem objetivos principais de nossa pesquisa. Trabalharemos também no desenvolvimento e na implementação de algoritmos baseados nesta abordagem. Veja em [57, 58, 59, 75, 76, 77, 78] alguns dos trabalhos anteriores de integrantes deste projeto relacionados com este tema. A seguir mencionamos dois dos problemas que estão sendo pesquisados sob esta abordagem.

4.17.1. *Decomposição de matrizes.* Suponha que são dados uma matriz $A$ e inteiros $B$ e $K$, onde $B$ é o número de blocos e $K$ a capacidade de cada bloco. O objetivo é associar um número máximo de linhas de $A$ aos blocos, de tal forma que não exista nenhuma coluna com entradas não nulas em linhas de blocos diferentes, e cada bloco tenha no máximo $K$ linhas a ele associadas. Esse problema pode ser aplicado em algoritmos de paralelização de operações com matrizes, tais como inversão, decomposição LU, *etc.*

Dada a matriz $A$, podemos construir um hipergrafo $G[A] = (V, E)$, onde os vértices do hipergrafo são as linhas da matriz e as colunas formam suas arestas. Com isso, podemos formular o problema de decomposição de matrizes como um problema de partição de hipergrafos. Seja $G = (V, E)$ o hipergrafo definido acima. O problema é achar uma partição $V_0, V_1, \ldots, V_B$ de $V$ com $|V_0|$ mínimo e tal que $V_b \leq K$ para $b \in M := \{1, \ldots, B\}$ e não existem vértices $u \in V_r$ e $v \in V_s$ adjacentes com $r \neq s$.

No caso da paralelização da fatoração LU de uma matriz, podemos interpretar o número de blocos como o número de processadores disponíveis. Como capacidade de cada bloco podemos usar $m/K$, onde $m$ é o número de linhas da matriz $A$, para obter um balanceamento entre os processadores. A idéia é resolver independentemente o problema para as linhas associadas a cada bloco, e então, em seguida, resolver o problema da interação entre os diversos blocos, representados nas linhas de $V_0$.

Em uma pesquisa conjunta de C.E. Ferreira com os pesquisadores A. Martin e R. Borndörfer do Konrad-Zuse-Zentrum für Informationstechnik Berlin, estudos da estrutura de um poliedro associado ao problema acima, bem como a implementação de um algoritmo *branch and cut* estão sendo desenvolvidos. Resultados preliminares obtidos até o momento são bastante encorajadores, já que esses estudos permitiram resolver de forma ótima várias instâncias de até 200 linhas (disponíveis nas bibliotecas `netlib` e `miplib`), e conduziram a bons limitantes inferiores e superiores para problemas maiores. Tais resultados foram apresentados recentemente em uma conferência internacional.

Nosso objetivo é continuar a investigação da estrutura facial do poliedro em questão (procurando melhorar o limite inferior obtido com esta abordagem), assim como iniciar os testes com novas heurísticas primais para o problema (para melhorar o limitante superior).

4.17.2. *Rearranjo de seqüências de DNA.* Seja $\Sigma$ um alfabeto finito e $\ell$ um inteiro positivo. Se $s$ é um cadeia de caracteres sobre $\Sigma$, então denotamos por $\ell$-*last*$(s)$ (resp. $\ell$-*first*$(s)$) a subcadeia de $s$ contendo os $\ell$ últimos (resp. primeiros) caracteres de $s$.

Para cada inteiro positivo $k$, definimos o *problema do $k$-contig mínimo* da seguinte forma. Dada uma coleção $\mathcal{C}$ de cadeias sobre $\Sigma$, queremos concatenar as cadeias de forma a obter uma coleção $\mathcal{C}'$ de cardinalidade mínima. Cada cadeia $z$ em $\mathcal{C}'$, chamada de *$k$-contig*, deve ser uma concatenação $s_1 s_2 \ldots s_m$ de cadeias de $\mathcal{C}$ com a propriedade de que para quaisquer duas cadeias consecutivas $s_j$ e $s_{j+1}$, $\ell$-*last*$(s_j) = \ell$-*first*$(s_{j+1})$ para algum $\ell \geq k$ (chamamos $s_1 s_2 \ldots s_m$ de *esqueleto de um $k$-contig*). Nesse caso, dizemos que tal $k$-contig *cobre* as cadeias $s_1$, $s_2, \ldots, s_m$. Além disso, se existir em $\mathcal{C}$ uma cadeia $u$ que é subcadeia de alguma cadeia $s_i$ de $z$, dizemos que $z$ também cobre $u$. O objetivo é, então, concatenar as cadeias de $\mathcal{C}$ de forma a obter um número mínimo de $k$-contigs na coleção $\mathcal{C}'$.

Este problema tem aplicações em reconstrução de fragmentos de DNA. Uma estratégia usada para se determinar a seqüência de bases de uma molécula de DNA (que é uma cadeia sobre o alfabeto {A, C, G, T}) é a seguinte. Inicialmente várias cópias da molécula são criadas, e depois, quebradas em diversos pedaços que os biólogos são capazes de reconstruir. O problema a resolver é *como juntar esses pedaços de forma a reconstruir a molécula inicial?*

Em um projeto conjunto de C.E. Ferreira e Y. Wakabayashi com o pesquisador C.C. de Souza (IC da UNICAMP), é sugerida uma formulação para o problema baseada em programação inteira e teoria dos grafos. Alguns resultados interessantes a respeito dessa formulação e do uso do método *branch and cut* foram obtidos e apresentados em um congresso nacional [56]. Estudos complementares estão em andamento. Pretendemos analisar propriedades estruturais do modelo proposto, em especial das instâncias vindas da aplicação de reconstrução de moléculas de DNA. É nossa suspeita que, com grande freqüência, o grafo gerado em nosso modelo é, nas instâncias reais, acíclico, o que torna o problema tratável computacionalmente. Além disso, pretendemos verificar com especialistas de biologia molecular, as reais necessidades e aplicações de uma estratégia de otimização combinatória a problemas deste tipo.

## Bibliografia


1. M. Ajtai, J. Komlós, J. Pintz, J. Spencer, and E. Szemerédi, *Extremal uncrowded hypergraphs*, Journal of Combinatorial Theory (A) **32** (1982), 321–335.
2. M. Ajtai, J. Komlós, and E. Szemerédi, *A note on Ramsey numbers*, Journal of Combinatorial Theory (A) **29** (1980), 354–360.
3. M. Albert, A. Frieze, and B. Reed, *Multicoloured Hamilton cycles*, Electronic Journal of Combinatorics **2** (1995), R10.
4. V.E. Alekseev, *On the entropy values of hereditary classes of graphs*, Discrete Mathematics and Applications **3** (1993), 191–199.
5. N. Alon, *The number of polytopes, configurations and real matroids*, Mathematika **33** (1986), no. 1, 62–71.
6. ———, *Ramsey graphs cannot be defined by real polynomials*, Journal of Graph Theory **14** (1990), no. 6, 651–661.
7. ———, *A parallel algorithmic version of the local lemma*, Random Structures and Algorithms **2** (1991), no. 4, 367–378.
8. ———, *Tools from higher algebra*, Handbook of Combinatorics (R.L. Graham, M. Grötschel, and L. Lovász, eds.), North-Holland, Amsterdam, 1995, pp. 1749–1784.
9. N. Alon, R.A. Duke, H. Lefmann, V. Rödl, and R. Yuster, *The algorithmic aspects of the regularity lemma*, Journal of Algorithms **16** (1994), no. 1, 80–109.
10. N. Alon, P. Frankl, and L. Lovász, *The chromatic number of Kneser hypergraphs*, Transactions of the American Mathematical Society **298** (1986), 359–370.
11. N. Alon, O. Goldreich, J. Håstad, and R. Peralta, *Simple constructions of almost $k$-wise independent random variables*, Random Structures and Algorithms **3** (1992), no. 3, 289–304.
12. ———, *Addendum to: "Simple constructions of almost $k$-wise independent random variables"*, Random Structures and Algorithms **4** (1993), no. 1, 119–120.
13. N. Alon, H. Lefmann, and V. Rödl, *On an anti-Ramsey type result*, Sets, Graphs and Numbers, vol. 60, Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai, North-Holland, 1991, pp. 9–22.
14. N. Alon and E.R. Scheinerman, *Degrees of freedom versus dimension for containment orders*, Order **5** (1988), 11–16.
15. N. Alon and J. Spencer, *The probabilistic method*, Wiley-Interscience Series in Discrete Mathematics, John Wiley & Sons, New York, 1992.
16. N. Alon and M. Tarsi, *Colorings and orientations of graphs*, Combinatorica **12** (1992), no. 2, 125–134.
17. I. Althöfer, G. Das, D. Dobkin, D. Joseph, and J. Soares, *On sparse spanners of weighted graphs*, Discrete and Computational Geometry **9** (1993), 81–100.
18. E.M. Arkin, C.H. Papadimitriou, and M. Yannakakis, *Modularity of cycles and paths in graphs*, Journal of the Association for Computing Machenery **38** (1991), 255–274.

19. S. Arora, C. Lund, R. Motwani, M. Sudan, and M. Szegedy, *Proof verification and hardness of approximation problems*, Proc. 33rd Ann. IEEE Symp. on Foundations of Computer Science, IEEE, 1992, pp. 14–23.
20. L. Babai, *Transparent proofs and limits to approximation*, First European Congress of Mathematics, Paris, 1992 (Basel), vol. I, Progr. Math., no. 119, Birkhäuser, 1994, pp. 31–91.
21. L. Babai, M. Simonovits, and J. Spencer, *Extremal subgraphs of random graphs*, Journal of Graph Theory **14** (1990), 599–622.
22. H.J. Bandelt and J.P. Barthélemy, *Medians in median graphs*, Discrete Applied Mathematics **8** (1984), 131–142.
23. J.P. Barthélemy and B. Monjardet, *The median procedure in cluster analysis and social choice theory*, Math. Soc. Sci. **1** (1981), 235–268.
24. J. Beck, *On size Ramsey number of paths, trees, and circuits I*, Journal of Graph Theory **7** (1983), 115–129.
25. ———, *On size Ramsey number of paths, trees, and circuits II*, Mathematics of Ramsey Theory, Algorithms and Combinatorics, vol. 5, Springer-Verlag, Berlin, 1990, pp. 34–45.
26. ———, *An algorithmic approach to the Lovász local lemma I*, Random Structures and Algorithms **2** (1991), no. 4, 343–365.
27. A. Björner, *Topological methods*, Handbook of Combinatorics (R.L. Graham, M. Grötschel, and L. Lovász, eds.), North-Holland, Amsterdam, 1995, pp. 1819–1872.
28. A. Björner and L. Lovász, *Linear decision trees, subspace arrangements, and Möbius functions*, Journal of the American Mathematical Society **7** (1994), 677–706.
29. B. Bollobás, *Random graphs*, Academic Press, London, 1985.
30. ———, November 1992, personal communication.
31. B. Bollobás and A.G. Thomason, *Hereditary and monotone properties of graphs*, to appear.
32. J. Bourgain, *A Szemerédi type theorem for sets of positive density in* $\mathbb{R}^k$, Israel Journal of Mathematics **54** (1986), 307–316.
33. G.R. Brightwell and Y. Kohayakawa, *Ramsey properties of orientations of graphs*, Random Structures and Algorithms **4** (1993), 413–428.
34. F.R.K. Chung, *Quasi-random classes of hypergraphs*, Random Structures and Algorithms **1** (1990), no. 4, 363–382.
35. ———, *Regularity lemmas for hypergraphs and quasi-randomness*, Random Structures and Algorithms **2** (1991), no. 1, 241–252.
36. F.R.K. Chung and R.L. Graham, *Quasi-random hypergraphs*, Random Structures and Algorithms **1** (1990), no. 1, 105–124.
37. ———, *Quasi-random set systems*, Journal of the American Mathematical Society **4** (1991), no. 1, 151–196.
38. ———, *Quasi-random tournaments*, Journal of Graph Theory **15** (1991), no. 2, 173–198.
39. ———, *Cohomological aspects of hypergraphs*, Transactions of the American Mathematical Society **334** (1992), no. 1, 365–388.
40. ———, *Quasi-random subsets of* $\mathbb{Z}_n$, Journal of Combinatorial Theory (A) **61** (1992), no. 1, 64–86.
41. F.R.K. Chung, R.L. Graham, and R.M. Wilson, *Quasi-random graphs*, Combinatorica **9** (1989), no. 4, 345–362.
42. W. Cook, J. Fonlupt, and A. Schrijver, *An integer analogue of Carathéodory's theorem*, Journal of Combinatorial Theory (B) **40** (1986), 63–70.
43. W.H. Cunningham, *Testing membership in matroid polyhedra*, Journal of Combinatorial Theory (B) **36** (1984), 161–188.
44. W.H. Cunningham and A.B. Marsh, *A primal algorithm for optimum matching*, Mathematical Programming Study **8** (1978), 50–72.
45. W. Deuber, *A generalization of Ramsey's theorem*, Infinite and Finite Sets (Keszthely, 1973) (A. Hajnal, R. Rado, and V.T. Sós, eds.), Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai, vol. 10, North-Holland, 1975, pp. 323–332.
46. R.A. Duke, H. Lefmann, and V. Rödl, *A fast approximation algorithm for computing the frequencies of subgraphs in a given graph*, SIAM Journal on Computing **24** (1995), no. 3, 598–620.
47. R.A. Duke, H. Lefmann, and V. Rödl, *On uncrowded hypergraphs*, Random Structures and Algorithms **6** (1995), no. 2–3, 209–212.
48. J. Edmonds, *Paths, trees and flowers*, Canadian Journal of Mathematics **17** (1965), 449–467.

49. J. Edmonds and R. Giles, *A min-max relation of submodular functions on graphs*, Studies in Integer Programming (P.L. Hammer et al., ed.), Annals of Discrete Mathematics, vol. 1, North-Holland, 1977, pp. 185–204.
50. P. Erdős, R.L. Graham, P. Montgomery, B.L. Rothschild, J. Spencer, and Straus E.G., *Euclidean Ramsey theorems II*, Infinite and finite sets (Keszthely, 1973) (A. Hajnal, R. Rado, and V.T. Sós, eds.), Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai, vol. 10, North-Holland, 1975, pp. 529–557.
51. ———, *Euclidean Ramsey theorems III*, Infinite and finite sets (Keszthely, 1973) (A. Hajnal, R. Rado, and V.T. Sós, eds.), Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai, vol. 10, North-Holland, 1975, pp. 559–583.
52. P. Erdős, R.L. Graham, P. Montgomery, B.L. Rothschild, J. Spencer, and E.G. Straus, *Euclidean Ramsey theorems I*, Journal of Combinatorial Theory (A) **14** (1973), 341–363.
53. P. Erdős, A. Hajnal, and L. Pósa, *Strong embeddings of graphs into colored graphs*, Infinite and Finite Sets (Keszthely, 1973) (A. Hajnal, R. Rado, and V.T. Sós, eds.), Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai, vol. 10, North-Holland, 1975, pp. 585–595.
54. P. Erdős and L. Lovász, *Problems and results on* 3*-chromatic hypergraphs and some related questions.*, Infinite and finite sets (Keszthely, 1973) (A. Hajnal, R. Rado, and V.T. Sós, eds.), Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai, vol. 10, North-Holland, 1975, pp. 609–627.
55. P. Erdős and G. Purdy, *Extremal problems in combinatorial geometry*, Handbook of Combinatorics (R.L. Graham, M. Grötschel, and L. Lovász, eds.), North-Holland, Amsterdam, 1995, pp. 809–874.
56. C.E. Ferreira, C.C. de Souza, and Y. Wakabayashi, *Reconstruction of DNA fragments: a graph model (extended abstract)*, Anais do XVIII Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional, 1995, pp. 90–94.
57. C.E. Ferreira, A. Martin, C.C. de Souza, R. Weismantel, and L.A. Wolsey, *Formulations and valid inequalities for the node capacitated graph partitioning problems*, submitted.
58. ———, *The node capacitated graph partitioning problem: a computational study*, Mathematical Programming (1996), to appear.
59. C.E. Ferreira, A. Martin, and R. Weismantel, *Solving multiple knapsack problems by cutting planes*, SIAM Journal on Optimization (1996), to appear.
60. C.E. Ferreira and Y. Wakabayashi, *Combinatória poliédrica e planos-de-corte faciais*, X Escola de Computação, 1996, to appear.
61. P. Frankl and V. Rödl, *Near perfect coverings in graphs and hypergraphs*, European Journal Combinatorics **6** (1985), 317–326.
62. ———, *A partition property of simplices in Euclidean space*, Journal of the American Mathematical Society **3** (1990), no. 1, 1–7.
63. P. Frankl, V. Rödl, and R.M. Wilson, *The number of submatrices of a given type in a Hadamard matrix and related results*, Journal of Combinatorial Theory (B) **44** (1988), no. 3, 317–328.
64. A.M. Frieze and B. Reed, *Polychromatic Hamilton cycles*, Discrete Mathematics **118** (1993), 69–74.
65. Z. Füredi, *Random Ramsey graphs for the four-cycle*, Discrete Mathematics **126** (1994), 407–410.
66. ———, *Extremal hypergraphs and combinatorial geometry*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Zürich 1994) (S.D. Chatterji, ed.), Birkhäuser, 1995, pp. 1343–1352.
67. A. Galluccio and M. Loebl, *Even/odd dipath in planar digraphs*, Optimisation Methods and Software **3** (1994), 225–236.
68. R. Giles and W.R. Pulleyblank, *Total dual integrality and integer polyhedra*, Linear Algebra and Its Applications **25** (1979), 191–196.
69. O. Goldreich, *Probabilistic proof systems (a survey)*, Electronic Colloquium on Computational Complexity (1994), no. TR94–008.
70. D. Grable, *More-than-nearly-perfect packings and partial designs*, September 1994.
71. R.L. Graham, *Recent trends in Euclidean Ramsey theory*, Discrete Mathematics **136** (1994), no. 1–3, 119–127.
72. ———, *Euclidean Ramsey theory*, CRC Handbook of Discrete and Computational Geometry (J.E. Goodman and J. O'Rourke, eds.), CRC Press, 1996, to appear.

73. R.L. Graham and V. Rödl, *Numbers in Ramsey theory*, Surveys in Combinatorics 1987 (C. Whitehead, ed.), London Mathematical Society Lecture Note Series, vol. 123, Cambridge University Press, Cambridge, 1987, pp. 112–153.
74. M. Grötschel, M. Jünger, and G. Reinelt, *A cutting plane algorithm for the linear ordering problem*, Operations Research **32** (1985), 1195–1220.
75. M. Grötschel and Y. Wakabayashi, *A cutting plane algorithm for a clustering problem*, Mathematical Programming **45** (1989), 59–96.
76. ———, *Facets for the clique partitioning polytope*, Mathematical Programming **47** (1990), 367–388.
77. M.A.M.C. Gurgel and Y. Wakabayashi, *Adjacency of vertices of the complete pre-order polytope*, DM, to appear.
78. ———, *The complete pre-order polytope: Facets and separation problem*, Tech. Report RT-MAC-9306, Instituto de Matemática e Estatística - USP, 1993, submitted.
79. G. Hahn and C. Thomassen, *Path and cycle sub-Ramsey numbers and an edge-colouring conjecture*, Discrete Mathematics **62** (1986), 29–33.
80. J. Håstad, *Testing of the long code and hardness for clique*, Proceedings 28th Annual ACM Symposium on the Theory of Computing, 1996.
81. J. Haviland and A.G. Thomason, *Pseudo-random hypergraphs*, Discrete Mathematics **75** (1989), no. 1–3, 255–278.
82. P.E. Haxell and Y. Kohayakawa, *Ramsey and Turán type results for cycles in pseudo-random graphs*, manuscript, 1992.
83. ———, *On an anti-Ramsey property of Ramanujan graphs*, Random Structures and Algorithms **6** (1995), no. 4, 417–431.
84. ———, *The size-Ramsey number of trees*, Israel Journal of Mathematics **89** (1995), 261–274.
85. P.E. Haxell, Y. Kohayakawa, and T. Łuczak, *The induced size-Ramsey number of cycles*, Combinatorics, Probability, and Computing **4** (1995), no. 3, 217–239.
86. ———, *Turán's extremal problem in random graphs: forbidding even cycles*, Journal of Combinatorial Theory (B) **64** (1995), 273–287.
87. ———, *Turán's extremal problem in random graphs: forbidding odd cycles*, Combinatorica **16** (1996), no. 1, 107–122.
88. P. Hell and D.G. Kirkpatrick, *On the completeness of a generalized matching problem*, Proceedings of the Tenth Annual ACM Symposium on Theory of Computing (San Diego, CA), 1978, pp. 240–245.
89. ———, *On the complexity of general graph factor problems*, SIAM Journal on Computing **12** (1983), 601–609.
90. ———, *Packing by cliques and by finite families of graphs*, Discrete Mathematics **49** (1984), 45–59.
91. ———, *Packing by complete bipartite graphs*, SIAM Journal of Algebraic and Discrete Methods **7** (1986), 199–209.
92. S. Hougardy, H.-J. Prömel, and A. Steger, *Probabilistically checkable proofs and their consequences for approximation algorithms*, Discrete Mathematics **136** (1994), 175–223.
93. J. Kahn, *On some hypergraph problems of Paul Erdős and the asymptotics of matchings, covers, and colorings*, preprint, 1994.
94. ———, *Asymptotics of hypergraph matching, covering and coloring problems*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Zürich 1994) (S.D. Chatterji, ed.), Birkhäuser, 1995, pp. 1353–1362.
95. G. Kalai, *Combinatorics and convexity*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Zürich 1994) (S.D. Chatterji, ed.), Birkhäuser, 1995, pp. 1363–1374.
96. X. Ke, *The size Ramsey number of trees with bounded degree*, Random Structures and Algorithms **4** (1993), 85–97.
97. J.H. Kim, *The Ramsey number $R(3,t)$ has order of magnitude $t^2/\log t$*, Random Structures and Algorithms **7** (1995), no. 3, 173–207.
98. Y. Kohayakawa, *The regularity lemma of Szemerédi for sparse graphs*, manuscript, August 1993.
99. Y. Kohayakawa and B. Kreuter, *Threshold functions for asymmetric Ramsey properties involving cycles*, Random Structures and Algorithms, submitted, 1996.
100. Y. Kohayakawa, B. Kreuter, and A. Steger, *An extremal problem for random graphs and the number of graphs with large even-girth*, Combinatorica, submitted, 1995.

101. Y. Kohayakawa and T. Łuczak, *Sparse anti-Ramsey graphs*, Journal of Combinatorial Theory (B) **63** (1995), 146–152.
102. Y. Kohayakawa, T. Łuczak, and V. Rödl, *On $K^4$-free subgraphs of random graphs*, Combinatorica, submitted, 1995.
103. ______, *Ramsey-type results for oriented trees*, Journal of Graph Theory, to appear.
104. ______, *Arithmetic progressions of length three in subsets of a random set*, Acta Arithmetica **LXXV** (1996), no. 2, 133–163.
105. Y. Kohayakawa, H.-J. Prömel, and V. Rödl, *Induced Ramsey numbers* (tentative title), in preparation, 1996, 1996.
106. Y. Kohayakawa and V. Rödl, *Checking pseudo-randomness of graphs fast* (tentative title), in preparation, 1996.
107. Y. Kohayakawa and J. Soares, *Provas transparentes e a impossiblidade de aproximações*, 20º· Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA, Rio de Janeiro, 1995.
108. J. Komlós, G.N. Sárközy, and E. Szemerédi, *Blow-up Lemma*, Combinatorica, submitted.
109. J. Komlós and M. Simonovits, *Szemerédi's Regularity Lemma and its applications in graph theory*, Combinatorics—Paul Erdős is eighty (D. Miklós, V.T. Sós, and T. Szőnyi, eds.), Bolyai Society Mathematical Studies, vol. 2, János Bolyai Mathematical Society, Budapest, 1996, pp. 295–352.
110. I. Kříž, *Permutation groups in Euclidean Ramsey Theory*, Proceedings of the American Mathematical Society **112** (1991), no. 3, 899–907.
111. ______, *Equivariant cohomology and lower bounds for chromatic numbers*, Transactions of the American Mathematical Society **333** (1992), no. 2, 567–577.
112. A.S. Lapaugh and C.H. Papadimitriou, *The even-path problem for graphs and digraphs*, Networks (1984), 597–614.
113. B. Leclerc, *Lattice valuations, medians and majorities*, Discrete Mathematics **111** (1993), 345–356.
114. B. Leclerc and J.P. Barthélemy, *Median procedure for partitions: contributions of the lattice approach*, Workshop on Partitioning Data Sets: with Applications to Psychology, Vision and Target Tracking, DIMACS, 1993.
115. K. Li and K.-H. Cheng, *Heuristic algorithms for on-line packing in three dimensions*, Journal of Algorithms **13** (1992), 589–605.
116. M. Loebl and S. Poljak, *On matroids induced by packing subgraphs*, Journal of Combinatorial Theory (B) **44** (1988), 338–354.
117. ______, *Efficient subgraph packing*, Journal of Combinatorial Theory (B) **59** (1993), 106–121.
118. L. Lovász, *Kneser's conjecture, chromatic number, and homotopy*, Journal of Combinatorial Theory (A) **25** (1978), no. 3, 319–324.
119. L. Lovász and M.D. Plummer, *Matching theory*, Annals of Discrete Mathematics, vol. 29, North-Holland, Amsterdam, 1986.
120. M. Luby and A. Wigderson, *Pairwise independence and derandomization*, Tech. Report 95-035, International Computer Science Institute, July 1995.
121. T. Łuczak and V. Rödl, *On induced Ramsey numbers for graphs with bounded maximum degree*, Journal of Combinatorial Theory (B), to appear.
122. J.F. Marcotorchino and P. Michaud, *Optimisation en analyse des donnés relationnelles*, Data Analysis and Informatics (R. Diday et al., ed.), North-Holland, 1980, pp. 655–670.
123. ______, *Optimization in exploratory data analysis*, Proceedings of V International Symposium on Operations Research, Physica-Verlag, 1981.
124. J. Matoušek and V. Rödl, *On Ramsey sets in spheres*, Journal of Combinatorial Theory (A) **70** (1995), 30–44.
125. F.K. Miyazawa and Y. Wakabayashi, *An algorithm for the three-dimensional packing problem with asymptotic performance analysis*, Algorithmica, to appear.
126. ______, *Approximation algorithms for the orthogonal $z$-oriented three-dimensional packing problem*, submitted, 1996.
127. R. Motwani and P. Raghavan, *Randomized algorithms*, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
128. D. Peleg and A. Schäffer, *Graph spanners*, Journal of Graph Theory **13** (1989), 99–116.
129. N. Pippenger and J. Spencer, *Asymptotic behaviour of the chromatic index for hypergraphs*, Journal of Combinatorial Theory (A) **51** (1989), 24–42.

130. H.-J. Prömel and A. Steger, *On the asymptotic structure of sparse triangle free graphs*, Journal of Graph Theory, to appear.
131. ______, *Excluding induced subgraphs: quadrilaterals*, Random Structures and Algorithms **2** (1991), 55–71.
132. ______, *The asymptotic number of graphs not containing a fixed color-critical subgraph*, Combinatorica **12** (1992), 463–473.
133. ______, *Excluding induced subgraphs III: a general asymptotic*, Random Structures and Algorithms **3** (1992), no. 1, 19–31.
134. H.-J. Prömel and B. Voigt, *Canonizing Ramsey theorems for finite graphs and hypergraphs*, Discrete Mathematics **54** (1985), 49–59.
135. J. Reiterman, V. Rödl, and E. Šiňajová, *Embeddings of graphs in euclidean spaces*, Discrete and Computational Geometry **4** (1989), no. 4, 349–364.
136. V. Rödl, *The dimension of a graph and generalized Ramsey theorems*, Master's thesis, Charles University, 1973.
137. ______, *On a packing and covering problem*, European Journal Combinatorics **5** (1985), 69–78.
138. ______, *On universality of graphs with uniformly distributed edges*, Discrete Mathematics **59** (1986), no. 1-2, 125–134.
139. V. Rödl and A. Ruciński, *Lower bounds on probability thresholds for Ramsey properties*, Combinatorics—Paul Erdős is eighty (D. Miklós, V.T. Sós, and T. Szőnyi, eds.), Bolyai Society Mathematical Studies, vol. 1, János Bolyai Mathematical Society, Budapest, 1993, pp. 317–346.
140. ______, *Threshold functions for Ramsey properties*, Journal of the American Mathematical Society **8** (1995), no. 4, 917–942.
141. V. Rödl and Zs. Tuza, *Rainbow subgraphs in properly edge-coloured graphs*, Random Structures and Algorithms **3** (1992), 175–182.
142. A. Schrijver, *On total dual integrality*, Linear Algebra and Its Applications **38** (1981), 27–32.
143. ______, *Proving total dual integrality with cross-free families—a general framework*, Mathematical Programming **29** (1984), 15–27.
144. ______, *Theory of linear and integer programming*, John Wiley & Sons, 1986.
145. A. Sebő, *Hilbert bases, Carathéodory's theorem and combinatorial optimization*, Integer Programming and Combinatorial Otimization (R. Kannan and W.R. Pulleyblank, eds.), 1990, pp. 431–455.
146. P. Seymour and C. Thomassen, *Characterization of even directed graphs*, Journal of Combinatorial Theory (B) **42** (1987), 36–45.
147. M. Simonovits and V.T. Sós, *Szemeredi's partition and quasirandomness*, Random Structures and Algorithms **2** (1991), no. 1, 1–10.
148. J. Soares, *Graph spanners*, Ph.D. thesis, University of Chicago, 1992, Technical Report CS 92-14.
149. E. Szemerédi, *Regular partitions of graphs*, Problèmes Combinatoires et Théorie des Graphes (Orsay), Colloques Internationaux CNRS n. 260, 1976, pp. 399–401.
150. A.G. Thomason, *Pseudorandom graphs*, Random graphs '85 (Poznán, 1985), North-Holland Math. Stud., vol. 144, North-Holland, Amsterdam-New York, 1987, pp. 307–331.
151. ______, *Random graphs, strongly regular graphs pseudorandom graphs*, London Mathematical Society Lecture Note Series, vol. 123, Cambridge University Press, Cambridge-New York, 1987.
152. Y. Wakabayashi, *Medians of binary relations:computational complexity*, Tech. Report Preprint SC 92-4, Konrad-Zuse-Zentrum für Informationstechnik Berlin, 1992.
153. H.E. Warren, *Lower bounds for approximation by nonlinear manifolds*, Transactions of the American Mathematical Society **133** (1968), 167–178.
154. A.C.-C. Yao, *Algebraic decision trees and Euler characteristics*, Theoretical Computer Science **141** (1995), 133–150.

## 5. Resultados de Auxílios Anteriores

Abaixo enumeramos os resultados das atividades da nossa equipe no período de 1991 a 1996 financiadas pela FAPESP.

**5.1. Publicações.** As seguintes publicações contaram com o apoio da FAPESP:


1. B. Bollobás and Y. Kohayakawa, *The hitting time of Hamilton cycles in random bipartite graphs*, Graph Theory, Combinatorics, Algorithms, and Applications (Philadelphia) (Y. Alavi, F.R.K. Chung, R.L. Graham, and D.F. Hsu, eds.), SIAM, 1991, pp. 26–41. Processo FAPESP MAP86/0904–8.
2. ———, *An extension of the Erdős–Stone theorem*, Combinatorica **14** (1994), no. 3, 279–286. Processo FAPESP MAP86/0904–8.
3. B. Bollobás, Y. Kohayakawa, and T. Łuczak, *The evolution of random subgraphs of the cube*, Random Structures and Algorithms **3** (1992), 55–90. Processo FAPESP MAP86/0904–8.
4. ———, *On the evolution of random Boolean functions*, Extremal Problems for Finite Sets (Budapest) (P. Frankl, Z. Füredi, G. Katona, and D. Miklós, eds.), Bolyai Society Mathematical Studies, 1994, pp. 137–156. Processo FAPESP MAP86/0904–8.
5. ———, *Connectivity properties of random subgraphs of the cube*, Random Structures and Algorithms **6** (1995), no. 2–3, 221–230. Processos FAPESP 92/3169–8 e 93/0232–3.
6. G.R. Brightwell and Y. Kohayakawa, *Ramsey properties of orientations of graphs*, Random Structures and Algorithms **4** (1993), 413–428. Processo FAPESP MAP86/0904–8.
7. P. Erdős, A. Gyárfás, and Y. Kohayakawa, *The size of the largest bipartite subgraphs*, Discrete Mathematics, submitted. Processos FAPESP 93/0603–1 e 94/2813–6.
8. P.A. Ferrari, L.R.G. Fontes, and Y. Kohayakawa, *Invariant measures for a two species asymmetric process*, Journal of Statistical Physics **76** (1994), no. 5/6, 1153–1177. Processos FAPESP 90/3918–5 e 93/0603–01.
9. P.E. Haxell and Y. Kohayakawa, *Partitioning by monochromatic trees*, Journal of Combinatorial Theory, Series B, to appear. Processo FAPESP 93/0603–1.
10. ———, *The size-Ramsey number of trees*, Israel Journal of Mathematics **89** (1995), no. 1–3, 261–274. Processo FAPESP 93/0603-1.
11. P.E. Haxell, Y. Kohayakawa, and T. Łuczak, *The induced size-Ramsey number of cycles*, Combinatorics, Probability and Computing **4** (1995), no. 3, 217–239. Processos FAPESP 93/0603–1 e 93/0232–3.
12. ———, *Turán's extremal problem in random graphs: forbidding even cycles*, Journal of Combinatorial Theory, Series B **64** (1995), 273–287. Processos FAPESP 93/0603–1 e 93/0232–3.
13. ———, *Turán's extremal problem in random graphs: forbidding odd cycles*, Combinatorica **16** (1996), no. 1, 107–122. Processo FAPESP 93/0603–1.
14. Y. Kohayakawa, *A note on induced cycles in Kneser graphs*, Combinatorica **11** (1991), 245–251. Processo FAPESP MAP86/0904–8.
15. Y. Kohayakawa, B. Kreuter, and A. Steger, *An extremal problem for random graphs and the number of graphs with large even-girth*, Combinatorica (1995), submitted. Processo FAPESP 93/0603–1.
16. Y. Kohayakawa and T. Łuczak, *Sparse anti-Ramsey graphs*, Journal of Combinatorial Theory, Series B **63** (1995), 146–152. Processos FAPESP 93/0603–1 e 93/0232–3.
17. Y. Kohayakawa, T. Łuczak, and V. Rödl, *Ramsey-type results for oriented trees*, Journal of Graph Theory, to appear. Processo FAPESP 93/0603–1.
18. ———, *On $K^4$-free subgraphs of random graphs*, Combinatorica (1995), submitted. Processos FAPESP 93/0603–1 e 94/4276–8.
19. ———, *Arithmetic progressions of length three in subsets of a random set*, Acta Arithmetica **LXXV** (1996), no. 2, 133–163. Processo FAPESP 93/0603–1.
20. Y. Kohayakawa and I. Simon (eds.), *Special number of Resenhas IME–USP, dedicated to Professor Paul Erdős*, Resenhas IME–USP **2**, no. 2, 1995. Processos FAPESP 94/4099–9 e 94/2813–6.
21. Y. Kohayakawa and J.A.R. Soares, *Demonstrações transparentes e a impossibilidade de aproximações*, Livro do 20º Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, julho 1995, $x + 107$pp. Processo FAPESP 93/0603–1.
22. Y. Kohayakawa and J. Wojciechowski, *On small graphs with highly imperfect powers*, Discrete Mathematics **104** (1992), 245–261. Processo FAPESP MAP86/0904–8.

23. F.K. Miyazawa and Y. Wakabayashi, *An algorithm for the three-dimensional packing problem with asymptotic performance analysis*, Algorithmica, to appear. Processo FAPESP 93/0603–1.
24. J.C. de Pina, *Applications of shortest path methods*, Ph.D. thesis, Universiteit van Amsterdam, 1995. Processo FAPESP 90/1173–2.
25. M.A.M.C. Gurgel and Y. Wakabayashi, *Adjacency of vertices of the complete pre-order polytope*, Discrete Mathematics, to appear. Processo FAPESP 93/0603–1.

5.1.1. *Processos* FAPESP *citados.* Os processos FAPESP mencionados na lista de publicações acima são os seguintes:

1. Processo FAPESP MAP86/0904–8. Bolsa de doutoramento no exterior de Y. Kohayakawa.
2. Processo FAPESP 90/3918–5. Projeto temático FAPESP *Transição de Fase Dinâmica em Sistemas Evolutivos*.
3. Processo FAPESP 92/3169–8. Auxílio à vinda de pesquisador visitante. Visitante: B. Bollobás.
4. Processo FAPESP 93/0232–3, Auxílio à vinda de pesquisador visitante. Visitante: T. Łuczak.
5. Processo FAPESP 93/0603–1. Auxílio à pesquisa; projeto *Aspectos Fundamentais da Ciência da Computação*, sob responsabilidade de Siang W. Song.
6. Processo FAPESP 94/2813–6. Auxílio à vinda de pesquisador visitante. Visitante: P. Erdős.
7. Processo FAPESP 94/4099–9. Auxílio à organização de evento científico. Evento: *Semana de Combinatória*, IME–USP, 9 a 11 de novembro de 1994.
8. Processo FAPESP 94/4276–8. Auxílio à vinda de pesquisador visitante. Visitante: T. Łuczak.
9. Processo FAPESP 90/1173–2. Bolsa de doutoramento no exterior de J.C. de Pina.

5.2. **Atividades de intercâmbio internacional.**

1. Béla Bollobás, *University of Cambridge*, 1 a 31 de dezembro de 1992. Processo FAPESP 92/3169–8. (Contrapartida da *British Council.*)
2. Martin Loebl, *Charles University*, Praga, 14 de maio a 23 de junho de 1995 (Contrapartida do CNPq). Processo FAPESP 95/0630–4.
3. Paul Erdős, Academia Húngara de Ciências, 1 a 22 de novembro de 1994. Processo FAPESP 94/2813–6.
4. Tomasz Łuczak, Poznań e Academia Polonesa de Ciências, 1 de maio a 1 de julho de 1993, e 17 de janeiro a 10 de abril de 1995. Processos FAPESP 93/0232–3 (contrapartida do CNPq) e 94/4276–8.

5.3. **Viagens de membros da equipe.**

1. Yoshiko Wakabayashi foi responsável pelo auxílio FAPESP que financiou a participação dos membros da comunidade de ciência da computação do estado de São Paulo na *8a. Escola de Computação*, Gramado, 3 a 12 de agosto de 1992. Processo FAPESP 92/2581–2.
2. Arnaldo Mandel foi responsável pelo auxílio FAPESP que financiou a participação dos membros da comunidade de ciência da computação do estado de São Paulo na *9a. Escola de Computação*, Recife, 1994.
3. Yoshiharu Kohayakawa, participou da Sessão Especial de Teoria de Ramsey na *Burlington MathFest*, Burlington, VT, EUA, evento conjunto da AMS e da MAA, 6 a 8 de agosto de 1995, e visitou a Emory University, Atlanta, EUA, a convite de V. Rödl, 31 de julho a 5 de agosto de 1995. Processo FAPESP 95/2815–1.

5.4. **Organização de eventos.** Fomos responsáveis pela organização dos seguintes eventos:

1. *LATIN'92, Latin American Theoretical INformatics Symposium*, IME–USP, 6 a 10 de abril de 1992. O simpósio teve a cooperação da ACM/SIGACT, EATCS, IFIP, IEEE, e outras associações profissionais. O comitê de programa

foi presidido por Imre Simon e o comitê organizador foi presidido por Paulo Feofiloff.

2. *Semana de Combinatória*, IME–USP, 7 a 11 de dezembro de 1992, evento que contou com a participação de Béla Bollobás, visitante que recebeu auxílio à vinda de pesquisador visitante da FAPESP, processo 92/3169–8. O coordenador principal deste evento foi José Augusto R. Soares.
3. *Semana de Combinatória*, IME–USP, 9 a 11 de novembro de 1994, um evento dedicado a Paul Erdős na ocasião de sua visita ao Brasil. Processo FAPESP 94/4099–9. Este evento foi coorganizado por Yoshiharu Kohayakawa e Imre Simon.

5.5. **Bolsas.**

- Bolsa de doutoramento no exterior de J. Coelho de Pina. O bolsista completou o seu programa de doutoramento na Universidade de Amsterdã, sob orientação de A. Schrijver. Processo FAPESP 90/1173–2.

## 6. Apresentação da Equipe

6.1. **Equipe proponente.** A equipe proponente consiste dos seguintes membros do Departamento de Ciência da Computação da USP:

1. *Arnaldo Mandel*, PhD, Waterloo, 1982, pesquisador CNPq nível 2A; especialidades: matróides, teoria de anéis
2. *Carlos E. Ferreira*, Dr. rer. nat., Tech. Uni., Berlim, 1994, pesq. CNPq 2C; métodos poliédricos em otimização combinatória
3. *José Augusto Ramos Soares*, PhD, Chicago, 1992, pesq. CNPq 2C; algoritmos combinatórios, problemas extremais, compressão de dados
4. *José Coelho de Pina Júnior*, Doctor, Amsterdã, 1995; algoritmos combinatórios
5. *Maria Angela de Campos Gurgel*, Doutora, USP, 1992; métodos poliédricos em otimização combinatória
6. *Paulo Feofiloff*, PhD, Waterloo, 1983; otimização combinatória, identidades min-max
7. *Yoshiharu Kohayakawa*, PhD, Cambridge, 1990, pesq. CNPq 2A, métodos probabilísticos, problemas extremais
8. *Yoshiko Wakabayashi*, Dr. rer. nat., Augusburg, 1986, pesq. CNPq 1C, métodos poliédricos e otimização combinatória em geral
9. *Cristina Gomes Fernandes*,[5] Mestre, USP; algoritmos *on-line* e algoritmos de aproximação

6.1.1. *Alunos envolvidos.* A nossa equipe é responsável pelos seguintes alunos de doutoramento do nosso departamento:

1. Flávio Keidi Miyazawa, Mestre, USP,
2. Jair Donadelli Júnior, Mestre, USP,
3. Orlando Lee, Mestre, USP.

Além disso, os seguintes alunos de *mestrado* são orientados por membros da equipe: Alexandre Daniel Bizetti, Álvaro L.S. Nunes, Armando Ramos Gouveia, César Alberto Bravo Pariente, Claus Akira Matsushigue, Francisco Elói Soares de Araujo, Glauber Ferreira Cintra, Estela Maris Rodrigues, e Marco Aurélio Stefanes. Os alunos de *iniciação científica* do grupo são os seguintes: Alexandre Cardoso Garcia Leite, Bruno Ohana, Carlos Eduardo R. do Valle, Claudia C. M. dos Santos, Glauco Galves Bordin, Gustavo Gattass Ayub, Luciano Silva, Marco Alexandre de Lima Santos, Paulo Yamada, Rogério Brito.

6.1.2. *Página na Teia.* Mencionamos que o nosso grupo mantém uma página da *World Wide Web*, onde mais informações podem ser encontradas. Em particular, assim que este projeto estiver em andamento, a presente proposta de projeto, incluindo a bibliografia em estilo BIBTEX, assim como os resultados alcançados estarão acessíveis em nosso página. O nosso endereço é

`http://www.ime.usp.br/~yoshi/index_combinatorics.html`

6.1.3. *Colaboradores internacionais.* A nossa equipe tem contado com a colaboração regular dos seguintes bem-conhecidos pesquisadores de centros de fora do Brasil:

1. B. Bollobás, Cambridge

[5] Em afastamento para cumprir programa de doutoramento na *Georgia Tech* desde setembro de 1992.

2. M. Grötschel, Tech. Uni. Berlin e ZIB
3. T. Łuczak, Poznań, Polônia
4. H.-J. Prömel, Humboldt-Uni. Berlin
5. V. Rödl, Emory University

Enumeramos abaixo alguns outros pesquisadores de centros de fora do Brasil com quem membros da nossa equipe efetivamente produziram trabalhos publicados, aceitos ou submetidos no período de 1991 a 1996:

1. G.R. Brightwell, London School of Economics
2. P. Erdős, Academia Húngara de Ciências
3. A. Gyárfás, Academia Húngara de Ciências
4. P.E. Haxell, Waterloo
5. S. Kiefl, Siemens Nixdorf
6. B. Kreuter, Humboldt-Uni. Berlin
7. L. Krispenz, Siemens Nixdorf
8. A. Martin, ZIB Berlin
9. A. Steger, Munique
10. R. Weismantel, ZIB Berlin
11. J. Wojciechowski, West Virginia University
12. L. Wolsey, CORE, Bélgica

6.1.4. *Teses e dissertações orientadas.* Membros da equipe proponente foram os orientadores das seguintes teses de doutoramento e dissertações de mestrado defendidas no período de 1991 a 1996:

- Tese de doutoramento:
  1. *Poliedros de Grafos Transitivos*, Maria Angela de Campos Gurgel, 1992
- Dissertações de mestrado:
  1. *Complexidade de Problemas Multilineares*, Daniel Panário Rodriguez, 1991
  2. *Fluxos Máximos em Redes: Algoritmos e Estruturas de Dados*, Roberto Duó, 1992
  3. *Problemas Circulatórios em Grafos*, Cristina Gomes Fernandes, 1992
  4. *Algoritmos Paralelos em Grafos: Listas, Florestas e Coleções de Florestas*, Stephen W. Kassner, 1992
  5. *Poliedros e Clutters Bloqueadores e Anti-bloqueadores*, Karina Marcus, 1992
  6. *Complexidade Aleatória de Problemas Computacionais*, Edson Tadashi Miyamoto, 1992
  7. *Empacotamento Tri-dimensional: Novas Estratégias e Análises de Desempenho*, Flávio K. Miyazawa, 1993
  8. *Homeomorfismo em Grafos: Algoritmos e Complexidade Computacional*, Haroldo G. Benatti, 1993
  9. *Circuitos e Caminhos Pares/Ímpares em Grafos e Digrafos*, Ronaldo F. Hashimoto, 1994
  10. (*) *O Problema do Subgrafo Planar Ótimo*, Renato J.S. Carmo, 1994. *Primeiro colocado no Concurso de Teses e Dissertações da SBC, 1995.*
  11. *Passeios e Conexidade em Grafos Mistos: Algoritmos e Complexidade Computacional*, Orlando Lee, 1994
  12. *Construção de Algoritmos Eficientes para Problemas NP-difíceis em Grafos*, Fábio Henrique Carvalheiro, 1994
  13. (*) *Sistemas de Arquivos Distribuídos*, Fábio Kon, 1994. *Melhor trabalho em nível de mestrado do Simpósio Brasileiro de Redes de Computadores, 1995.*
  14. *Uma aplicação do Método de Branch and Cut a um problema de Roteamento de Veículos*, Marko Loparić, 1995

15. *Arranjos de Subespaços, Colapso de Complexos Simpliciais e Complexidade Computacional*, Jair Donadelli Junior, 1996

(*) dissertações premiadas

6.1.5. *Disciplinas de combinatória e seminários.* Os membros da equipe proponente são responsáveis ou ministram com freqüência as seguintes disciplinas de pós-graduação do nosso departamento:

1. MAC 711 - Análise de Algoritmos
2. MAC 722 - Introdução à Teoria da Complexidade de Algoritmos
3. MAC 747 - Geometria Computacional
4. MAC 770 - Introdução à Teoria dos Grafos
5. MAC 771 - Teoria dos Grafos
6. MAC 773 - Teoria dos Matróides
7. MAC 774 - Teoria Extremal dos Conjuntos
8. MAC 775 - Métodos Probabilísticos em Combinatória e em Teoria da Computação I
9. MAC 776 - Métodos Probabilísticos em Combinatória e em Teoria da Computação II
10. MAC 780 - Programação Inteira
11. MAC 781 - Otimização Combinatória
12. MAC 790 - Programação Linear
13. MAC 880 - Poliedros em Otimização Combinatória
14. MAC 881 - Combinatória Poliédrica e o Método dos Planos-de-corte
15. MAC 827 - Tópicos em Combinatória
16. MAC 8xx - Complexidade Computacional

Os membros da nossa equipe têm mantido um seminário regular de combinatória e otimização combinatória ao longo dos anos. No primeiro semestre de 1996, temos dois seminários registrados na Comissão de Pós-graduação do nosso instituto, a saber, *Tópicos em Otimização Combinatória*[6] e *Métodos Topológicos e Algébricos em Combinatória.*

Durante a vigência deste projeto, manteremos este nível de atividade no que concerne a seminários.

6.2. **Distribuição das responsabilidades.** A estrutura administrativa da equipe será como segue:

1. *Coordenador*: Y. Kohayakawa
2. *Organizadora dos seminários do grupo*: Y. Wakabayashi
3. *Material de informática*: a compra dos equipamentos de informática estará sob responsabilidade de A. Mandel e J.A.R. Soares. Mencionamos que A. Mandel é o principal administrador da rede do nosso instituto.
4. *Páginas na Teia*: a nossa equipe manterá uma página na *World Wide Web*, que será mantida por vários membros da equipe.

6.3. **Pesquisas conjuntas da equipe.** Os membros da equipe colaboraram entre si até o presente da seguinte forma.

6.3.1. *Orientações.* O seguinte quadro de orientações ilustra o bem-sucedido processo de formação de pessoal na área de combinatória em nosso departamento:

- Y. Wakabayashi orientou C.E. Ferreira (mestrado) e M.A.C.M. Gurgel (doutoramento).
- A. Mandel orientou Y. Kohayakawa (mestrado) e J.C. de Pina (mestrado).
- P. Feofiloff orientou J.A.R. Soares (mestrado) e C.G. Fernandes (mestrado).

[6] Veja `http://www.ime.usp.br/~cef/seminarios.html`

Embora haja um grande número de relações de orientação entre os membros do grupo, cabe mencionar que apenas dois dos nove membros do grupo estudaram sob o mesmo orientador para o seu doutoramento, e apenas dois deles obtiveram o seu doutoramento no mesmo centro. Há assim uma mescla ideal entre a proximidade pessoal e profissional dos membros da equipe e a distância entre suas especialidades. Visamos cultivar esta característica da equipe dentro deste projeto.

6.3.2. *Publicações.* Enumeramos a seguir todas as publicações conjuntas entre os membros da equipe e seus alunos.


1. C.E. Ferreira, C.C. de Souza, and Y. Wakabayashi, *Reconstruction of DNA fragments: a graph model (extended abstract)*, Anais do XVIII Congresso de Matemática Aplicada e Computacional, 1995, 90–94.
2. C.E. Ferreira and Y. Wakabayashi (eds.), *Anais da I Oficina Nacional em Problemas Combinatórios, Algoritmos e Aplicações*, Tech. Report RT-MAC-9515, IME-USP, 1995.
3. ———, *Combinatória poliédrica e planos-de-corte faciais*, livro para a 10ª Escola de Computação, UNICAMP, julho de 1996.
4. C.E. Ferreira and A.L.S. Nunes, *Uma implementação de simulated annealing iterado aplicada a problemas de partição de grafos (resumo estendido)*, Anais do XXVI Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional, 1994.
5. M.A.M.C. Gurgel and Y. Wakabayashi, *A note on Hamilton-connected graphs*, Tech. Report RT-MAP-8202, Instituto de Matemática e Estatística, USP, 1982.
6. ———, *Embeddings of trees*, Proceedings of the International Congress on Mathematical Programming (Rio de janeiro) (R.W. Cottle *et al.*, ed.), North-Holland, 1984, pp. 177–184.
7. ———, *On $k$-leaf-connected graphs*, Journal of Combinatorial Theory (B) **41** (1986), 1–16.
8. ———, *The complete pre-order polytope: Facets and separation problem*, Tech. Report RT-MAC-9306, Instituto de Matemática e Estatística, USP, 1993, submitted.
9. ———, *Adjacency of vertices of the complete pre-order polytope*, Discrete Mathematics, to appear.
10. Y. Kohayakawa and J.A.R. Soares, *Demonstrações transparentes e a impossibilidade de aproximações*, livro do 20º Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, julho 1995, $x + 107$pp.
11. O. Lee and Y. Wakabayashi, *Caminhos mínimos em grafos mistos (resumo estendido)*, Anais do XVIII Congresso de Matemática Aplicada e Computacional, 1995, pp. 329–333.
12. F.K. Miyazawa and Y. Wakabayashi, *An algorithm for the three-dimensional packing problem with asymptotic performance analysis*, Algorithmica, to appear.
13. ———, *Approximation algorithms for the orthogonal $z$-oriented 3-D packing problem*, submitted.


6.3.3. *Projetos conjuntos.* Os seguintes projetos contam com a participação dos membros da equipe:

- *ProComb—Problemas Combinatórios: Teoria, Algoritmos e Aplicações* (todos da equipe proponente são membros deste projeto).
- *Problemas de Empacotamento e Partição de Grafos e Hipergrafos* (Ferreira e Wakabayashi).
- *Combinatória Extremal e Métodos Probabilísticos* (Kohayakawa e Soares).

Para maiores detalhes sobre estes projetos, veja §10.2.

6.4. **Outras informações.** Expomos a seguir outras informações que ilustram o perfil da equipe proponente. Lembramos que em §5, *Resultados de Auxílios Anteriores*, enumeramos diversas atividades anteriores da equipe financiadas pela FAPESP e relevantes a este projeto. Aqui apresentaremos informações *complementares*, sobre atividades correlatas financiadas por outras instituições. *Restringimo-nos a atividades no período de 1991 a 1996.*

6.4.1. *Publicações.* [Publicações no período que não mencionam a FAPESP.]


1. I. Althöfer, G. Das, D. Dobkin, D. Joseph, and J. Soares, *On sparse spanners of weighted graphs*, Discrete and Computational Geometry **9** (1993), 81–100.
2. B. Bollobás and Y. Kohayakawa, *Percolation in high dimensions*, European Journal of Combinatorics **15** (1994), 113–125.
3. ———, *A note on long-range percolation*, Graph Theory, Combinatorics, and Algorithms (New York) (Y. Alavi and A.J. Schwenk, eds.), vol. 1, Wiley, 1995, pp. 97–113.
4. B. Bollobás, Y. Kohayakawa, and T. Łuczak, *On the diameter and radius of random subgraphs of the cube*, Random Structures and Algorithms **5** (1994), no. 5, 627–648.
5. B. Chandra, G. Das, G. Narasimhan, and J. Soares, *New sparseness results on graph spanners*, Proc. 8th ACM Symp. Computational Geometry, 1992, pp. 192–201.
6. ———, *New sparseness results on graph spanners*, International Journal of Computational Geometry and Applications **5** (1995), no. 1–2, 125–144.
7. C.E. Ferreira, *On combinatorial optimization problems arising in computer system design*, Ph.D. thesis, Technische Universität Berlin, January 1994.
8. C.E. Ferreira, M. Grötschel, S. Kiefl, C. Krispenz, R. Weismantel, and A. Martin, *Some integer programs arising in the design of main frame computers*, Zeitschrift für Operations Research **38** (1993), no. 1, 77–100.
9. C.E. Ferreira, A. Martin, C.C. de Souza, R. Weismantel, and L.A. Wolsey, *The node capacitated graph partitioning problem: a computational study*, Mathematical Programming, to appear.
10. ———, *Formulations and valid inequalities for the node capacitated graph partitioning problem*, Mathematical Programming, to appear.
11. C.E. Ferreira, A. Martin, and R. Weismantel, *Solving multiple knapsack problems by cutting planes*, SIAM Journal on Optimization (1996), to appear.
12. C.E. Ferreira and A.L.S. Nunes, *Uma implementação de simulated annealing iterado aplicada a problemas de partição de grafos (resumo estendido)*, Anais do XXVI Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional, 1994.
13. C.E. Ferreira and Y. Wakabayashi (eds.) *Anais da I Oficina Nacional em Problemas Combinatórios, Algoritmos e Aplicações*, USP, fevereiro de 1995, Relatório Técnico RT-MAC-9515, 1995.
14. ———, *Combinatória poliédrica e planos-de-corte faciais*, livro para a 10ª Escola de Computação, UNICAMP, julho de 1996.
15. C.E. Ferreira, C.C. de Souza and Y. Wakabayashi, *Reconstruction of DNA fragments: a graph model (extended abstract)*, Anais do XVIII Congresso de Matemática Aplicada e Computacional, 1995, 90–94.
16. A. Giambruno, J.Z. Gonçalves, and A. Mandel, *Rings with algebraic $n$-Engel elements*, Communications in Algebra **22** (1994), 1685–1703.
17. J.Z. Gonçalves and A. Mandel, *Semigroup identities in the group of units of algebras*, Archiv der Mathematik **57** (1991), 539–545.
18. M.A.M.C. Gurgel, *Poliedros de grafos transitivos*, Ph.D. thesis, Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, 1992.
19. M.A.C.M. Gurgel and Y. Wakabayashi, *Adjacency of vertices of the complete pre-order polytope*, Discrete Mathematics, to appear.
20. ———, *The complete pre-order polytope: Facets and separation problem*, Tech. Report RT-MAC-9306, Instituto de Matemática e Estatística, USP, 1993, submitted.
21. P.E. Haxell and Y. Kohayakawa, *On an anti-Ramsey property of Ramanujan graphs*, Random Structures and Algorithms **6** (1995), no. 4, 417–431.
22. ———, *Packing and covering triangles in tripartite graphs*, Graphs and Combinatorics, submitted, 1995.
23. Y. Kohayakawa and B. Kreuter, *Threshold functions for asymmetric Ramsey properties involving cycles*, Random Structures and Algorithms, submitted, 1996.
24. O. Lee and Y. Wakabayashi, *Caminhos mínimos em grafos mistos (resumo estendido)*, Anais do XVIII Congresso de Matemática Aplicada e Computacional, 1995, pp. 329–333.
25. F.K. Miyazawa and Y. Wakabayashi, *Approximation algorithms for the orthogonal $z$-oriented 3-D packing problem*, submitted, 1996.
26. J. Soares, *Maximum diameter of regular digraphs*, Journal of Graph Theory **16** (1992), no. 5, 437–450.

27. ———, *Graph spanners: a survey*, Congressus Numerantium **89** (1992), 225–238.
28. ———, *Approximating Euclidean distances by small degree graphs*, Discrete and Computational Geometry **11** (1994), 213–233.
29. Y. Wakabayashi, *Medians of binary relations: computational complexity*, Technical Report SC/92 - Konrad Zuse Zentrum für Informationstechnik Berlin, 1992.
30. Y. Wakabayashi, *Contribuições a Teoria dos Grafos e Otimização Combinatória.* Monografia apresentada no concurso de livre-docência – USP, 1995.

6.4.2. *Atividades de intercâmbio internacional.* Os pesquisadores abaixo visitaram o departamento a convite de membros da nossa equipe. Damos a duração da visita e a fonte de financiamento.

1. R. Borndörfer, Konrad-Zuse-Zentrum e Technische Universität, Berlim, 5 semanas (1996), CAPES/DAAD.
2. G.R. Brightwell, London School of Economics, 3 semanas (1994), CNPq.
3. A. Fraenkel, Weizmann Institute of Science, 1 semana (1991), Weizmann.
4. P.E. Haxell, University of Waterloo, 4 semanas (1995), NSERC.
5. R. Holzaman, Weizmann Institute of Science, 1 semana (1991), Weizmann.
6. Y. Ishigami, University of Electro-Communications, Tóquio, 4 semanas (1995), governo japonês.
7. A. Martin, Konrad-Zuse-Zentrum, Berlim, 2 semanas em 1994 e 3 semanas em 1995, CAPES/DAAD.
8. E. Upfal, Weizmann Institute of Science, 1 semana (1991), Weizmann.

Damos a seguir uma lista de pesquisadores que visitaram o IME–USP especialmente para proferirem palestras, a convite dos membros da nossa equipe.

1. Daniel Younger, University of Waterloo
2. Frederic Maffray, CNRS, Grenoble
3. Gerhard Reinelt, Universität Heidelberg
4. Hazel Everett, l'Université du Québec à Montréal
5. Ilda Perez Fernandez Silva, Universidade de Lisboa
6. Michael Shub, IBM, Yorktown Heights
7. Pavol Hell, Simon Fraser University
8. Stephen Smale, Berkeley
9. U.S.R. Murty, University of Waterloo

6.4.3. *Viagens de membros da equipe.* Enumeramos aqui visitas de maior duração a centros de pesquisa e respectivas fontes de financiamento.

1. Arnaldo Mandel
    - Universidade de Paris 7, 4 de outubro a 2 de dezembro de 1992, BID–USP.
2. Carlos E. Ferreira
    - ZIB Berlin, 5 semanas em julho/agosto de 1995, CAPES/DAAD.
3. Paulo Feofiloff
    - University of Waterloo, 13 de agosto a 13 de novembro de 1991, BID/USP.
4. Yoshiharu Kohayakawa
    - University of Cambridge, janeiro a julho de 1991, Senior Rouse Ball Fellow do Trinity College, Cambridge.
    - Universität Bielefeld, agosto de 1991, pesquisador visitante.
    - University of Cambridge, janeiro e fevereiro de 1992, BID/USP e Churchill College, Cambridge.
    - University of Cambridge, agosto a dezembro de 1992, Research Fellow do Churchill College, Cambridge.
    - Emory University, janeiro e fevereiro de 1994, CNPq.
    - Universität Bonn, julho de 1994, USP/DAAD.
    - Humboldt-Universität zu Berln, janeiro e fevereiro de 1996, CAPES/DAAD.
5. Yoshiko Wakabayashi

- ZIB Berlin, outubro de 1991 a fevereiro de 1992, visita financiada pelo BID–USP e DFG (Deutsche Forschungsgemeinschaft).

6.4.4. *Organização de eventos.*

1. A. Mandel organizou o *Encontro de Teoria da Computação e Combinatória*, um evento conjunto com o *Weizmann Institute of Science*, IME–USP, 26 a 30 de agosto de 1991. O evento contou com a participação de A. Fraenkel, R. Holzman, e E. Upfal (Weizmann) e de vários pesquisadores da comunidade brasileira.
2. C.E. Ferreira organizou a *Primeira Oficina Nacional em Problemas Combinatórios: Teoria, Algoritmos e Aplicações*, um evento no âmbito do projeto ProComb (veja §10.2), IME–USP, 1 a 3 de fevereiro de 1995.
3. Y. Wakabayashi coordenou a *Sessão Especial de Combinatória* do *20º Colóquio Brasileiro de Matemática*, IMPA, Rio de Janeiro, 24–28 de julho 1995.
4. Y. Wakabayashi organizou uma sessão na área de *Polyhedral Combinatorics* no *15th International Symposium on Mathematical Programming*, Ann Arbor, Michigan, 15 a 19 de agosto de 1994.

### 6.5. Assinaturas dos membros da equipe.

1. Arnaldo Mandel
2. Carlos E. Ferreira
3. José Augusto Ramos Soares
4. José Coelho de Pina Júnior
5. Maria Angela de Campos Gurgel
6. Paulo Feofiloff
7. Yoshiharu Kohayakawa
8. Yoshiko Wakabayashi
9. Cristina Gomes Fernades

## 7. Orçamento Justificado

7.1. **Despesas de capital.**

- 10 X-terminais NCD HMX 17, monitor colorido 17", 16MB de memória. Preço unitário: US$ 4.100 *Total: US$ 41.000*
- 1 microcomputador portátil marca ICC, modelo ICCXP6, 520MBytes de disco, com unidade de CD-ROM, Pentium 75 MHz, 16(!) MB de memória RAM, monitor colorido. *Preço unitário: R$ 6.000*
- 1 impressora HP DeskJet 850C, jato de tinta colorida, 6ppm/600dpi *R$ 900*
- Extensão de uma licença do *software* CPLEX para permitir acesso simultâneo de um maior número de usuários. *US$ 3.000*

**Subtotal:** R$ 50.900

7.2. **Despesas de custeio.**

- Material de consumo: cartuchos para impressora, papel, [outros] *R$ 4.000*

**Subtotal:** *R$ 4.000*

7.3. **Total.** *R$ 54.900*

7.4. **Justificativa.**

7.4.1. *Justifica para os X-terminais.* O IME tem uma boa rede, construída com apoio da FAPESP, plano de Infra-Estrutura I, a qual suporta sem problemas o tráfego gerado pelos terminais. Além disso, o nosso instituto tem concentrado esforços na compra de servidores potentes para disco e processamento, o que é compatível com o uso de X-terminais; aliás, esse uso é recomendado pela administração da rede local, uma vez que a incorporação e manutenção de X-terminais é bem mais simples que a de estações de trabalho. Os X-terminais disponibilizam imediadamente todo o parque de *software* já instalado no IME.

Prevemos neste pedido um X-terminal para cada membro do projeto e um para o pós-doutor que planejamos manter durante o decorrer do projeto.

7.4.2. *Microcomputador.* O microcomputador portátil atenderá, entre outros, os pesquisadores visitantes que o grupo receberá durante o decorrer deste projeto. Ele também será útil aos alunos vinculados ao grupo.

7.4.3. *Extensão da licença CPLEX.* No momento, a licença que temos é para apenas uma máquina. Isto impossibilita o uso amplo, em particular, os alunos do IME–USP têm hoje pouco acesso a este *software*.

## 8. Cronograma de Execução do Projeto

8.1. **Duração do projeto.** As investigações propostas neste projeto serão executadas por um período de quatro anos.

8.2. **Eventos.**

8.2.1. *Anúncio da posição de pós-doutoramento.* As posições para pós-doutores serão para um período de um ano, renovável por um segundo ano. A abertura da primeira posição será internacionalmente anunciada em breve. Uma vez que tenhamos selecionado um candidato e este projeto esteja em andamento, faremos um pedido complementar de uma bolsa de pós-doutoramento à FAPESP.

Outros pedidos complementares deste gênero e a renovação destas bolsas serão feitas de forma a sempre manter pelo menos um pós-doutor na nossa equipe, desde que haja candidatos compatíveis com o presente projeto.

8.2.2. *Organização de encontros.* A nossa equipe organizará *Semanas de Combinatória* nos moldes das semanas que a nossa equipe organizou na ocasião da visita de B. Bollobás em 1992 e de P. Erdős em 1994 (cf. §5.4). Prevemos a organização de duas a quatro tais *Semanas* durante a vigência deste projeto, sempre levando em conta o cronograma de visitas ao nosso instituto de pesquisadores estrangeiros de renome que atuam em combinatória ou em teoria da computação. Estes eventos serão objeto de pedidos complementares à FAPESP.

8.2.3. *Seminários e atividades de orientação.* A equipe manterá os atuais níveis de atividade no que concerne a seminários de pós-graduação e ensino em geral (cf. §§6.1.1, 6.1.4, 6.1.5). A equipe deseja um aumento nas atividades de orientação, especialmente em nível de doutoramento.

## 9. Cronograma de Aplicação dos Recursos

O processo de compra do material de informática será inicializado assim que a verba correspondente for alocada, com a exceção de 1 X-terminal, que será adquirido quando Cristina G. Fernandes retornar de seu programa de doutoramento na *Georgia Tech.*

A verba para despesas de custeio será divida igualmente entre os quatro anos de vigência deste projeto.

Finalmente, mencionamos que os pedidos complementares junto à FAPESP serão feitos de acordo com o descrito em §8, *Cronograma de Execução do Projeto.*

## 10. Infra-estrutura Disponível

10.1. **A instituição.** Inicialmente, mencionamos que o Departamento de Ciência da Computação do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo tem posto grande esforço nas áreas de combinatória e teoria da computação. No que concerne ao ensino em nível de graduação, mencionamos que este departamento é responsável pelo Bacharelado em Ciência da Computação da USP, que conta atualmente com 270 alunos matriculados e formou até hoje 604 profissionais. A nossa pós-graduação conta atualmente com 64 alunos e já formou 76 mestres e 2 doutores. Em termos de pesquisa, o nosso departamento tem sido um centro de ponta nas áreas de combinatória e teoria da computação no Brasil desde a década de 70. Os pesquisadores deste departamento tiveram papel importante em atividades pioneiras na área da ciência da computação no país, como a organização do *LATIN '92*, *Latin American Theoretical INformatics Symposium*, que teve lugar em 1992 na USP. Na área de combinatória, o departamento tem mantido um intenso nível de intercâmbio internacional, ilustrado pela visita do Professor Paul Erdős, da Academia Húngara de Ciências, e de muitos outros expoentes da área (cf. §§5.2, 6.4.2, 6.4.3, e 10.2.2.)

As atividades passadas do nosso departamento demonstram a importância dada em nossa instituição às atividades de pesquisa propostas neste projeto. Ademais, mencionamos que a equipe proponente, com nove pesquisadores (uma professora associada, sete professores doutores, e uma professora assistente) formam uma fração considerável do nosso departamento, que conta com 37 docentes, dentre os quais 22 têm o título de doutor.

10.1.1. *Equipamento computacional.* O nosso instituto tem um laboratório disponível aos alunos, com cerca de 90 microcomputadores 386, 90 486 DX/2-66 da Olivetti, um AS 400, mais de 25 workstations SUN e HP, uma servidora Sparc 1000 com 4 CPUs e 702 MBytes de memória, dois servidores Sparc 20, um servidor Sparc 10, 46 X-terminais, além de uma máquina paralela Parsytec PowerXplorer com 16 nós, 32 processadores e 512 MBytes de memória, interligados em uma rede local que está conectada à Internet. Computadores de grande porte da USP (como Cray, Unisys, CDC, IBM, Convex) são acessíveis através da rede do IME ou por linha discada.

10.1.2. *A biblioteca do IME.* O instituto conta com uma excelente biblioteca, reunindo um acervo de aproximadamente 35.000 volumes, incluindo 650 títulos correntes de periódicos com 300 coleções completas. Em particular, a nossa equipe conta com uma boa coleção de livros e um excelente acervo de periódicos das várias áreas da combinatória e da ciência da computação. Assinamos os seguintes periódicos especializados:

*Algorithmica*
*Combinatorica*
*Combinatorics, Probability and Computing*
*Discrete Applied Mathematics*
*Discrete Mathematics*
*Discrete Mathematics and Applications*
*Discrete and Computational Geometry*
*European J. Combinatorics*
*European J. Operational Research*
*Graphs and Combinatorics*
*Information and Computation*
*Inf. Process. Lett.*
*International J. of Algebra and Computation*
*Journal of Algorithms*
*J. Combinatorial Theory*, Séries A e B
*J. Complexity*
*J. Comput. Syst. Sci.*
*J. Graph Theory*
*Mathematical Programming*
*Mathematics of Operations Research*
*ORSA Journal on Computing*
*Operations Research*

*Operations Research Letters*
*Random Structures and Algorithms*
*SIAM Journal on Computing*
*SIAM Journal on Discrete Mathematics*
*SIAM Journal on Optimization*
*Zeitschrift für Operations Research*

Naturalmente, periódicos de matemática e ciência da computação sem área específica de concentração, como *J. Amer. Math. Soc.*, *Trans. Amer. Math. Soc.*, *Israel J. Mathematics*, *Comm. ACM*, *J. ACM*, *Theoretical Computer Science*, *etc*, são assinados pela nossa biblioteca. Ademais, temos a coleção quase completa das atas das conferências mais importantes em teoria da computação, a saber, da *IEEE Symposium on Foundations of Computer Science*, *ACM Symposium on Theory of Computing*, e *ACM–SIAM Symposium on Discrete Algorithms.*

Recentemente, uma verba de R$ 30.000,00 foi liberada pelo CNPq para atualização do acervo da biblioteca do nosso instituto na área de ciência da computação. Ademais, o projeto ProComb (veja §10.2 abaixo) prevê uma verba de R$ 3.000,00 para o nosso grupo para aquisição de material bibliográfico.

Finalmente, observamos que a nossa biblioteca está em processo de assinatura do *MathSciNet*, o serviço de acesso *on-line* via a Teia ao *Mathematical Reviews.* A biblioteca naturalmente assina o *Reviews* e o *Zentralblatt für Mathematik und ihre Grenzgebiete* em papel e passou assinar a versão em CD do *Reviews* já há algum tempo.

10.1.3. *Espaço físico.* Os nove membros da equipe proponente ocupam sete salas do nosso instituto, cabendo aqui observar que um dos membros da equipe se encontra atualmente afastada, em programa de doutoramento no exterior.

10.2. **Projetos correlatos.**

10.2.1. *Projetos Temáticos Multiinstitucionais CNPq.* Atualmente, dois projetos dentro do Projeto Temático Multiinstitucional em Ciência da Computação, ProTeM–CC (Fase II), do CNPq, são coordenados por membros deste departamento:

- *Teoria da Computação—Pesquisa em Algoritmos e Complexidade* (TCPAC),
- *Problemas Combinatórios: Teoria, Algoritmos e Aplicações* (ProComb).

De fato, o projeto ProComb é coordenado por Yoshiko Wakabayashi, um dos proponentes deste projeto temático. Todos os proponentes são membros do ProComb. A parcela da verba deste projeto alocada ao nosso grupo é de R$ 50.000.[7]

10.2.2. *Projetos de intercâmbio internacional CAPES/DAAD.* Os seguintes dois projetos dentro do programa PROBRAL, um programa de intercâmbio entre o Brasil e a Alemanha financiado pela CAPES e pelo DAAD (Serviço Alemão de Intercâmbio Acadêmico), estão em andamento:

- *Problemas de Empacotamento e Partição de Grafos e Hipergrafos*[8]
  - ($i$) Instituições participantes:
    - ($a$) *Konrad-Zuse-Institut für Informationstechnik Berlin*, equipe coordenada por Martin Grötschel
    - ($b$) *Universidade de São Paulo*, equipe coordenada por Yoshiko Wakabayashi
  - ($ii$) Período: setembro de 1994 a agosto de 1997

[7] Maiores detalhes sobre este projeto podem ser encontrados em `http://www.ime.usp.br/mac/procomb/indexeng.html`

[8] Maiores detalhes em `http://www.ime.usp.br/mac/probral`

- *Combinatória Extremal e Métodos Probabilísticos*[9]
  - (*i*) Instituições participantes:
    - (*a*) *Humboldt-Universität zu Berlin*, equipe coordenada por Hans-Jürgen Prömel
    - (*b*) *Univesidade de São Paulo*, equipe coordenada por Yoshiharu Kohayakawa
  - (*ii*) *Período*: setembro de 1995 a agosto de 1998

Os projetos acima financiam visitas periódicas em ambas as direções, de até três meses de duração para portadores de título de doutor e de até seis meses para alunos de doutoramento. Eles também fornecem uma pequena verba para custeio e material permanente. A CAPES fornece R$ 2.000 para custeio e o DAAD DM 5.000 para material permanente.

[9] Maiores detalhes em `http://www.ime.usp.br/~yoshi/index_DAAD.html`

## 11. Informações Curriculares

Anexamos a seguir os *Cadastros de Pesquisador* de todos os 9 membros da equipe proponente. Anexamos também as *informações curriculares* dos seguintes membros da equipe:

1. Arnaldo Mandel
2. Carlos Eduardo Ferreira
3. José Augusto Ramos Soares
4. Paulo Feofiloff
5. Yoshiharu Kohayakawa
6. Yoshiko Wakabayashi