

Teoria Homológica de Digrafos

André Gomes

Dissertação de Mestrado, Janeiro 2018



Homologia de caminhos de Digrafos

 Espaço de caminhos e o operador bordo

 Formas diferenciais e o diferencial exterior

Teorema de Hodge

 Homologia para grafos localmente finitos

 Equação do Calor

Digrafos aleatórios

Passeios p -preguiçosos

Homologia de caminhos de Digrafos

Espaço de caminhos e o operador bordo

Formas diferenciais e o diferencial exterior

Teorema de Hodge

Homologia para grafos localmente finitos

Equação do Calor

Digrafos aleatórios

Passeios p -preguiçosos

Fixe $G = (V, E)$ um digrafo finito e $\mathbb{K}$ um corpo de escalares.

Definição

Dado um inteiro não negativo p , um p -caminho elementar de G é uma sequência de $p + 1$ vértices $\{i_k\}_{k=0}^p$. Para $p = -1$ fixe um caminho como sendo o conjunto vazio $\emptyset$.

O p -caminho $\{i_k\}_{k=0}^p$ será denotado também por $i_0 \cdots i_p$ (sem delimitadores entre os vértices) ou por $e_{i_0 \dots i_p}$; de modo que $e = \emptyset$.

Além disso, $i_0 \cdots i_p$ é dito **permitido** em G se $i_k \rightarrow i_{k+1}$ para todo $k = 0, \dots, p - 1$.

Definição

O $\mathbb{K}$ -espaço vetorial das $\mathbb{K}$ -combinações lineares formais de todos os p -caminhos elementares será denotado por $\Lambda_p = \Lambda_p(V, \mathbb{K})$ e seus elementos serão chamados por p -caminhos em V .

Segue da definição que $\{e_{i_0 \dots i_p} : i_0, \dots, i_p \in V\}$ é uma base para Λ_p de modo que cada p -caminho v tem uma única representação da forma

$$v = \sum_{i_0, \dots, i_p \in V} v^{i_0 \dots i_p} e_{i_0 \dots i_p} \quad (1)$$

na qual $v^{i_0 \dots i_p} \in \mathbb{K}$. Deste modo, $\Lambda_{-1} \cong \mathbb{K}$.

Espaço de caminhos e o operador bordo

Para que possamos introduzir o conceito de homologia faz-se necessária a seguinte definição:

Definição

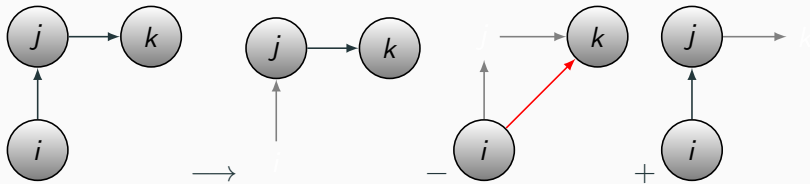
Dado um inteiro $p \geq 0$, o **operador bordo** $\partial : \Lambda_p \rightarrow \Lambda_{p-1}$ é o operador linear que definimos sobre os p -caminhos elementares de seguinte maneira:

$$\partial e_{i_0 \dots i_p} = \sum_{q=0}^p (-1)^q e_{i_0 \dots \widehat{i}_q \dots i_p} \quad (2)$$

em que o circunflexo $\widehat{i}_q$ denota a omissão do índice i_q .

Exemplo bordo

$$\partial e_{ijk} = e_{jk} - e_{ik} + e_{ij}$$



Note que o bordo de um p -caminho permitido não precisa, necessariamente, ser um $p - 1$ -caminho permitido. Nos restringiremos ao **espaço dos caminhos de bordo permitido**,

$$\Omega_p := \{v \in \Lambda_p : \partial v \in \Lambda_{p-1}\}.$$

Lema

$$\partial^2 = 0.$$

Deste modo temos o complexo de cadeia bem definido

$$0 \leftarrow \mathbb{K} \leftarrow \Omega_0 \leftarrow \cdots \leftarrow \Omega_{p-1} \leftarrow \Omega_p \leftarrow \cdots \quad (3)$$

em que as setas são dadas pelo operador ∂ .

E sua versão truncada

$$0 \leftarrow \Omega_0 \leftarrow \cdots \leftarrow \Omega_{p-1} \leftarrow \Omega_p \leftarrow \cdots \quad (4)$$

Sobre tais complexos definimos os espaços (grupos) homológicos H_n por

$$H_n := \frac{\ker \partial_n}{\operatorname{Im} \partial_{n+1}}.$$

Também chamados de **homologias**.

Nosso principal objeto de estudos é $\dim H_n$, que nos retorna invariantes topológicos do digrafo. Como por exemplo, o número de “buracos” dele.

Definição

Considere o inteiro $p \geq -1$. Denote por $\Lambda^p = \Lambda^p(V)$ o $\mathbb{K}$ -espaço vetorial das aplicações de

$$V^{p+1} = \underbrace{V \times \dots \times V}_{p+1 \text{ termos}}$$

sobre o corpo. Deste modo, $\Lambda^0 = \{\text{aplicações de } V \text{ em } \mathbb{K}\}$, e, fixando $V^0 := \{0\}$, identificamos Λ^{-1} com $\mathbb{K}$.

Os elementos de Λ^p são denominados por **p -formas** sobre V .

A imagem do ponto $(i_0, i_1, \dots, i_p) \in V^{p+1}$ pela forma $\omega \in \Lambda^p$ será denotada por $\omega_{i_0 \dots i_p}$.

Fixando as p -formas ditas **elementares** como as da forma $e^{j_0 \cdots j_p} = \mathbb{I}_{\{(j_0, \dots, j_p)\}}$; em que $\mathbb{I}_A$ é a função indicadora do conjunto A , temos claramente que uma dada forma $\omega \in \Lambda^p$ pode ser escrita como

$$\omega = \sum_{j_0, \dots, j_p \in V} \omega_{j_0 \cdots j_p} e^{j_0 \cdots j_p};$$

donde extrai-se que $\{e^{j_0 \cdots j_p} : j_0, \dots, j_p \in V\}$ figura uma base para Λ^p .

Sejam agora $\omega \in \Lambda^p$ e $v \in \Lambda_p$. Definimos o pareamento natural entre p -formas e p -caminhos da seguinte maneira:

$$(\omega, v) := \sum_{i_0, \dots, i_p \in V} \omega_{i_0 \dots i_p} v^{i_0 \dots i_p}. \quad (5)$$

Donde Λ_p e Λ^p são duais com respeito a este pareamento.

Formas diferenciais e o diferencial exterior

Definição

Definimos o operador **diferencial exterior** $d : \Lambda^p \rightarrow \Lambda^{p+1}$ por

$$(d\omega)_{i_0 \dots i_{p+1}} = \sum_{q=0}^{p+1} (-1)^q \omega_{i_0 \dots \hat{i}_q \dots i_{p+1}}, \quad (6)$$

para cada $\omega \in \Lambda^p$.

Dadas estas definições concluímos:

Lema

Os operadores $\partial : \Lambda_{p+1} \rightarrow \Lambda_p$ e $d : \Lambda^p \rightarrow \Lambda^{p+1}$ são duais, i.e., dado $p \geq -2$ vale que para cada p -forma ω e para cada $(p+1)$ -caminho v ,

$$(d\omega, v) = (\omega, \partial v)$$

Formas diferenciais e o diferencial exterior

Disso segue que $d^2 = 0$.

Novamente podemos definir uma forma **permitida** como sendo uma forma ω tal que

$$\omega_{i_0 \dots i_p} = 0 \text{ se } i_0 \dots i_p \notin \Omega_p.$$

E definimos os espaços das formas de diferencial permitido Ω^p .

Deste modo temos o complexo de cocadeia

$$0 \rightarrow \mathbb{K} \rightarrow \Omega^0 \rightarrow \dots \rightarrow \Omega^p \rightarrow \Omega^{p+1} \rightarrow \dots \quad (7)$$

cujas setas são dadas pelo operador d . Este complexo é dual ao complexo (3).

Sobre tais complexos definimos os espaços (grupos) cohomológicos H^n por

$$H^n := \frac{\ker d^n}{\operatorname{Im} d^{n-1}}.$$

Também chamados de **cohomologias**.

Novamente, nosso interesse é estudar a dimensão destes espaços.

Homologia de caminhos de Digrafos

 Espaço de caminhos e o operador bordo

 Formas diferenciais e o diferencial exterior

Teorema de Hodge

 Homologia para grafos localmente finitos

 Equação do Calor

Digrafos aleatórios

Passeios p -preguiçosos

- Note que, analogamente ao feito pro caso finito, dado um conjunto enumerável V podemos definir sobre ele o $\mathbb{K}$ -espaço dos p -caminhos como sendo o espaço das $\mathbb{K}$ -combinações lineares formais das sequências de $p + 1$ -vértices sobre V .

- Note que, analogamente ao feito pro caso finito, dado um conjunto enumerável V podemos definir sobre ele o $\mathbb{K}$ -espaço dos p -caminhos como sendo o espaço das $\mathbb{K}$ -combinações lineares formais das sequências de $p + 1$ -vértices sobre V .
- Definimos o espaço (módulo) das p formas Λ^p , os operadores bordo e diferencial exterior e todo o resto da teoria homológica, podendo agora falar de digrafos localmente finitos.

Caso localmente finito

Definimos então, para cada $x \in V$, $m(x) = |\{y \in V : y \sim x\}|$; em que $y \sim x$ quer dizer que $(x, y) \in E$. $m(x)$ é dita a **valência de x** , ou o grau de x .

Restringiremos ao caso de digrafos de valência limitada (localmente finito).

Espaços l^2 e C_c

Para todo inteiro $p \geq -1$, defina $\Lambda^p = \Lambda^p(V)$ como sendo o espaço dual ao Λ_p . Este espaço será denominado espaço das p -formas, cujos elementos serão chamados por p -formas, obviamente. Fixamos $\Lambda^{-1} = \{0\}$.

Nos restringiremos aos dois seguintes subespaços (que são Hilbert):

$$l^2(\Lambda_p) := \{f : \Lambda_p \rightarrow \mathbb{K}; \sum_{x \in \Lambda_p} f^2(x) < \infty\}$$

$$C_c(\Lambda_p) := \{f : \Lambda_p \rightarrow \mathbb{K}; |\{x : f(x) \neq 0\}| < \infty\}$$

Em que fixamos o seguinte produto interno:

$$\langle f, g \rangle = \sum_{x \in \Lambda_p} f(x)g(x).$$

Operadores bordo

E os operadores $d : \Lambda^{p-1} \rightarrow \Lambda^p$ e $\partial : \Lambda^p \rightarrow \Lambda^{p-1}$ da seguinte maneira:

$$df(i_0 \cdots i_p) = \sum_{q=0}^p (-1)^q f(i_0 \cdots \widehat{i_q} \cdots i_p),$$

$$\partial f(i_0 \cdots i_p) = \sum_{k \in V} \sum_{q=0}^{p+1} (-1)^q f(i_0 \cdots i_{q-1} k i_q \cdots i_p);$$

Logicamente, os operadores $d : \Lambda^{-1} \rightarrow \Lambda^0$ e $\partial : \Lambda^0 \rightarrow \Lambda^{-1}$ são identicamente nulos.

Segue destas definições que tais operadores são adjuntos, com respeito ao produto interno fixado. Isto é, $\langle df, g \rangle = \langle f, \partial g \rangle$.

Defina o operador **Laplaciano**, denotado por Δ , sobre o espaço das p -formas da seguinte maneira:

$$\Delta = d\partial + \partial d.$$

Segue do fato de d e ∂ serem adjuntos que Δ é autoadjunto.

Proposição

Seja f uma p -forma. $\Delta f = 0$ se, e somente se, $df = 0$ e $\partial f = 0$.

Definição

Defina

$$H^P = \{\varphi \in \Omega^P : \Delta\varphi = 0\}.$$

Dito espaço das p -formas harmônicas.

Lema

Seja f uma p -forma. $f \in H^P$ se, e somente se, $f \in (\operatorname{Im} d)^\perp \cap \ker d$.

Teorema de decomposição de Hodge [Novo]

Estamos finalmente em condições de enunciar o

Teorema de decomposição de Hodge

Existem operadores lineares H (**projeção harmônica**) e G (**operador de Green**) de Ω^p , para todo p , caracterizados pelas seguintes propriedades

- $H(\alpha)$ é harmônica;
- $G(\alpha)$ é ortogonal ao espaço das formas harmônicas;
- $\alpha = H(\alpha) + \Delta G(\alpha)$.

Note que isso implica que $\Omega^p = \Delta(\Omega^p) \oplus H^p = d\partial(\Omega^p) \oplus \partial d(\Omega^p) \oplus H^p = d(\Omega^p) \oplus \partial(\Omega^p) \oplus H^p$.

Roteiro da Demonstração

- Existência e unicidade de solução, $T_t(u_0) = u(t, x)$ do problema de Cauchy.
- $\|u(t, x)\|^2$ é não crescente.
- Propriedade de semigrupo: $T_{t+s} = T_t T_s$.
- T_t é autoadjunto.
- $T_t \alpha$ converge para uma forma harmônica $H\alpha$.
- Compacidade de T_t .
- Existência do operador de Green (ortogonal ao espaço das formas).

$$\Delta G(\alpha) = \alpha - H\alpha$$

Fixaremos, de agora em diante, G localmente finito e **conexo**.

Problema de Cauchy (PC)

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u + \Delta u &= 0 \\ u(0, x) &= u_0(x) \end{cases}$$

em $[0, T[\times V$ com condição inicial $u_0 : V \rightarrow \mathbb{R}$; com $T \in]0, \infty[$.

Solução fundamental

Dizemos que uma função $p :]0, \infty[\times V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ é uma solução fundamental da equação do calor

$$\frac{\partial}{\partial t} u + \Delta u = 0$$

se para qualquer condição inicial limitada $u_0 : V \rightarrow \mathbb{R}$ a função

$$u(t, x) = \sum_{y \in V} p(t, x, y) u_0(y), \quad t > 0, x \in V$$

for diferenciável em relação a t , for solução da equação do calor e para todo $x \in V$

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} u(t, x) = u_0(x).$$

Defina sobre G a métrica usual $d : V \times V \rightarrow \mathbb{Z}$ da seguinte maneira: $d(x, x) = 0$ e , se $x \neq y$, existe um número finito de vértices $x = x_0 \sim x_1 \sim \cdots \sim x_k = y \in V$ que conectam x e y . Fixe $d(x, y)$ como sendo o menor número k de tais vértices – ressalta-se a conexidade de G .

Seja $G = (V, E)$ um grafo tal que existem $x_0 \in V$ e $C \geq 0$ com $\Delta d(\cdot, x_0) \geq -C$ (curvatura de Ricci). Então as seguintes afirmações são verdadeiras:

- Existe uma única solução fundamental $p :]0, \infty[\times V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ da equação do calor.
- G é estocasticamente completo, i.e.,

$$\sum_{y \in V} p(t, x, y) = 1$$

para todos $t > 0$ e $x \in V$.

- Para todo $u_0 \in l^1(V)$ e para toda solução correspondente de (PC) u , temos que

$$\sum_{x \in V} u(t, x) = \sum_{x \in V} u_0(x)$$

para todo $t > 0$. Ainda,

$$u(t, x) = \sum_{y \in V} p(t, x, y) u_0(y).$$

Nas afirmações que seguem fixaremos um grafo G que satisfaz as condições do teorema acima.

Proposição

Se $u(t, x)$ é solução de (PC), então $\|u(t, x)\|^2$ é não crescente.

Prova

$$\frac{\partial}{\partial t} \|u(t, x)\|^2 = 2 \left\langle \frac{\partial}{\partial t} u, u \right\rangle = -2 \langle \Delta u, u \rangle = -2(\|du\|^2 + \|\partial u\|^2) \leq 0.$$

Defina

$$T_t(u_0) = \sum_{y \in V} p(t, x, y) u_0(y)$$

com p como no último teorema. Esta é, como vimos, a única solução de (PC).

Proposição

Vale a propriedade de semigrupo $T_{t_1+t_2} = T_{t_1} T_{t_2}$.

Prova: Note que $u(t_1 + t_2, x)$ pode ser obtido resolvendo a equação do calor com condição inicial $u(t_2, x)$ e então calculando-a em t_1 .

Proposição

Proposições

T_t é autoadjunto.

Prova: Note que

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} \langle T_t \alpha, T_\tau \beta \rangle &= \left\langle \frac{\partial}{\partial t} T_t \alpha, T_\tau \beta \right\rangle = -\langle \Delta T_t \alpha, T_\tau \beta \rangle \\ &= -\langle T_t \alpha, \Delta T_\tau \beta \rangle = \left\langle T_t \alpha, \frac{\partial}{\partial \tau} T_\tau \beta \right\rangle = \frac{\partial}{\partial \tau} \langle T_t \alpha, T_\tau \beta \rangle,\end{aligned}$$

de sorte que podemos escrever $\langle T_t \alpha, T_\tau \beta \rangle = g(t + \tau)$. Assim,

$$\langle T_t \alpha, \beta \rangle = g(t + 0) = g(0 + t) = \langle \alpha, T_t \beta \rangle.$$

Proposição

Proposição

$T_t\alpha$ converge a uma forma harmônica $H(\alpha)$.

Prova: Temos que

- $\|T_{t+2h}\alpha - T_t\alpha\|^2 = \|T_{t+2h}\alpha\|^2 + \|T_t\alpha\|^2 - 2\|T_{t+h}\alpha\|^2.$

Proposição

Proposição

$T_t\alpha$ converge a uma forma harmônica $H(\alpha)$.

Prova: Temos que

- $\|T_{t+2h}\alpha - T_t\alpha\|^2 = \|T_{t+2h}\alpha\|^2 + \|T_t\alpha\|^2 - 2\|T_{t+h}\alpha\|^2.$
- Como o quadrado da norma da solução de (PC) é positivo e não crescente, $\|T_t\alpha\|^2$ converge.

Proposição

$T_t\alpha$ converge a uma forma harmônica $H(\alpha)$.

Prova: Temos que

- $\|T_{t+2h}\alpha - T_t\alpha\|^2 = \|T_{t+2h}\alpha\|^2 + \|T_t\alpha\|^2 - 2\|T_{t+h}\alpha\|^2$.
- Como o quadrado da norma da solução de (PC) é positivo e não crescente, $\|T_t\alpha\|^2$ converge.
- Assim, $\|T_{t+2h}\alpha - T_t\alpha\|^2$ pode ser tomado arbitrariamente pequeno. I.e., $T_t\alpha$ é Cauchy.

Proposição

$T_t\alpha$ converge a uma forma harmônica $H(\alpha)$.

Prova: Temos que

- $\|T_{t+2h}\alpha - T_t\alpha\|^2 = \|T_{t+2h}\alpha\|^2 + \|T_t\alpha\|^2 - 2\|T_{t+h}\alpha\|^2$.
- Como o quadrado da norma da solução de (PC) é positivo e não crescente, $\|T_t\alpha\|^2$ converge.
- Assim, $\|T_{t+2h}\alpha - T_t\alpha\|^2$ pode ser tomado arbitrariamente pequeno. I.e., $T_t\alpha$ é Cauchy.
- l^2 é completo, então $T_t\alpha$ converge, no sentido l^2 , para uma forma $H(\alpha) \in l^2$.

- Para provar que $H(\alpha)$ é de fato harmônica, basta tomar $\tau > 0$ e notar que a relação $T_t\alpha = T_\tau T_{t-\tau}\alpha$ implica no limite que $T_\tau H(\alpha) = H(\alpha)$.

- Para provar que $H(\alpha)$ é de fato harmônica, basta tomar $\tau > 0$ e notar que a relação $T_t\alpha = T_\tau T_{t-\tau}\alpha$ implica no limite que $T_\tau H(\alpha) = H(\alpha)$.
- Então $T_t H(\alpha)$ é constante em t . Assim,
$$0 = \frac{\partial}{\partial t} T_t H(\alpha) = \frac{\partial}{\partial t} H(\alpha) = -\Delta H(\alpha).$$
 Logo, $H(\alpha)$ é de fato harmônica.

Continuação da demonstração

- Para provar que $H(\alpha)$ é de fato harmônica, basta tomar $\tau > 0$ e notar que a relação $T_t\alpha = T_\tau T_{t-\tau}\alpha$ implica no limite que $T_\tau H(\alpha) = H(\alpha)$.
- Então $T_t H(\alpha)$ é constante em t . Assim,
$$0 = \frac{\partial}{\partial t} T_t H(\alpha) = \frac{\partial}{\partial t} H(\alpha) = -\Delta H(\alpha).$$
 Logo, $H(\alpha)$ é de fato harmônica.
- $\langle H\alpha, \beta \rangle = \lim_{t \rightarrow \infty} \langle T_t \alpha, \beta \rangle = \lim_{t \rightarrow \infty} \langle \alpha, T_t \beta \rangle = \langle \alpha, H\beta \rangle$. Assim, H é autoadjunto.

Proposição

T_t é compacto para todo t .

A demonstração é usual.

Proposição

O operador de Green, dado pela integral

$$G(\alpha) = \int_0^\infty (T_t \alpha - H\alpha) dt$$

está bem definido. E vale a seguinte igualdade

$$\Delta G(\alpha) = \alpha - H\alpha.$$

Ainda, $G(\alpha)$ é ortogonal ao espaço das formas harmônicas qualquer que seja α .

Mostremos que a norma $\|T_t\alpha(x) - H\alpha(x)\|$ decai rapidamente a ponto de que a integral está bem definida.

É um resultado clássico em espaços de Hilbert que se T é um operador compacto **autoadjunto** num espaço de Hilbert, H , e

$$m(T) := \sup\{|\langle Tx, x \rangle| : x \in H, \|x\| \leq 1\},$$

então $m(T)$ ou $-m(T)$ é o maior autovalor de T e vale que

$$\|T\| = |m(T)|.$$

Dessa forma para o máximo do problema variacional:

$$m(T_t) := \sup\{|\langle T_t \alpha, \alpha \rangle| : \|\alpha\| \leq 1 \text{ e } H\alpha = 0\},$$

tem solução. Denominaremos por $\beta(t)$ o máximo e $\lambda(t)$ o correspondente valor máximo.

Note que, pela propriedade de semigrupo temos que $T_{2t}\beta = \lambda^2(t)\beta$. Mas, por outro lado, $T_{2t}\beta = \lambda(2t)\beta$. Logo, $\lambda(t+t) = \lambda(t) \cdot \lambda(t)$. Portanto a função $\lambda(t)$ é multiplicativa e assim $\lambda(t) = e^{-\lambda_1 t}$, com $\lambda_1 > 0$.

Como $\|T_t\alpha - H\alpha\| = \|T_t(\alpha - H\alpha)\| \leq \|T_t\beta\|$, temos que $\|T_t\alpha - H\alpha\| \leq e^{-\lambda_1 t} \|\beta\| \leq e^{-\lambda_1 t}$. E assim decai rapidamente.

Agora,

$$\begin{aligned}\Delta G(\alpha) &= \int_0^\infty \Delta(T_t \alpha - H\alpha) dt = \int_0^\infty \Delta T_t \alpha dt = \\ &= - \int_0^\infty \frac{\partial T_t \alpha}{\partial t} dt = \alpha - H(\alpha).\end{aligned}$$

Por último, seja β harmônica. Então

$$\langle G(\alpha), \beta \rangle = \int_0^\infty \langle (T_t - H)\alpha, \beta \rangle dt = \int_0^\infty \langle \alpha, (T_t - H)\beta \rangle dt = 0.$$

Homologia de caminhos de Digrafos

 Espaço de caminhos e o operador bordo

 Formas diferenciais e o diferencial exterior

Teorema de Hodge

 Homologia para grafos localmente finitos

 Equação do Calor

Digrafos aleatórios

Passeios p -preguiçosos

Digrafo aleatório

Definição

Definimos como **(di)grafo aleatório** um (di)grafo $G(p)$ obtido a partir de um grafo G pré-fixado pelo processo aleatório de remover cada *elo* (aresta) com probabilidade $1 - p$ ou de mantê-lo com probabilidade p (**percolação de elos independente**). Tais grafos são também conhecidos como (di)grafos de Erdős-Rényi.

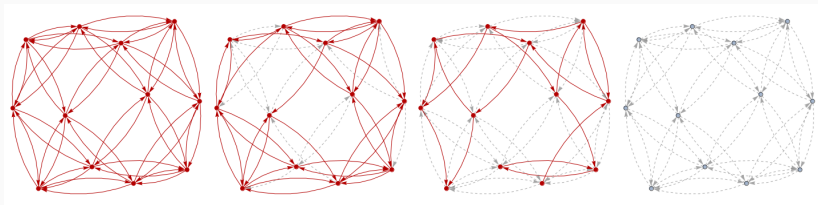


Figura 1: (Di)grafos Aleatórios Modelo de Percolação de Bernoulli para $p = 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1$

Fixamos, A^n como sendo os digrafos de Cayley associados aos grupos abelianos de ordem n com respeito a um conjunto gerador $\{n_1^{\pm 1}, \dots, n_d^{\pm 1}\}$.

Toros aleatórios encaixantes

Para cada $p \in [0, 1]$ defina $[A^n]^p$ como sendo o subgrafo aleatório de A^n dado pelo processo de percolação de elos $\{X_e^p\}_{e \in E(A^n)}$, de modo que, para cada aresta e de A^n , $p \geq p' \Rightarrow X_e^p \geq X_e^{p'}$. Note que isso garante que $[A^n]_{p'}' \subset [A^n]_p$. Nessas condições, dizemos que $\{[A^n]_p\}_p$ é uma **família de subgrafos aleatórios encaixantes** de A^n .

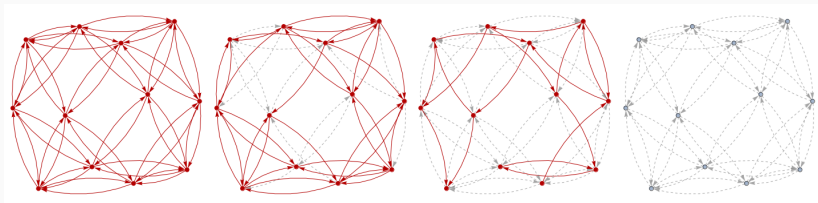


Figura 2: (Di)grafos Aleatórios Modelo de Percolação de Bernoulli para $p = 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1$

Toros aleatórios encaixantes

Na Figura abaixo apresentamos um exemplo comparando a média das dimensões do segundo grupo de homologia dos grafo aleatórios obtidos a partir $\mathbb{Z}_{12}$ com geradores $\{3, 4\}$ efetivamente calculadas e a curva teórica esperada se fosse válido o Teorema do Limite Central. No eixo x temos $30.p$ e no y $\dim H_2([\mathbb{Z}_{12}]_p)$.

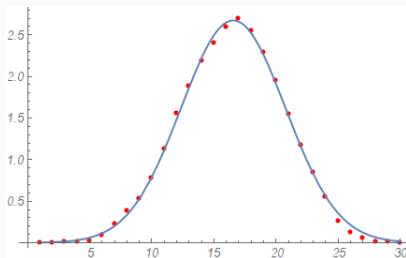


Figura 3: Dimensão de H_2 para o grupo abeliano $\mathbb{Z}_{12}$ com geradores $\{3, 4\}$.

Teorema do Limite Central

As mais diversas simulações nos fizeram crer que

$$P_p \left(\frac{\dim H_k(T_d^{(n)}) - E_p(\dim H_k(T_d^{(n)}))}{\sqrt{\text{Var}_p(\dim H_k(T_d^{(n)}))}} \leq u \right) \rightarrow \int_{-\infty}^u \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

para todo u e para todo $k = 0, 1, \dots, d$, quando $\min\{n_1, \dots, n_d\} \rightarrow \infty$.

Teorema do Limite Central

Com efeito, como corolário direto do teorema central de [15], temos que

$$P_p \left(\frac{\dim H_0(T_d^{(n)}) - E_p(\dim H_0(T_d^{(n)}))}{\sqrt{\text{Var}_p(\dim H_0(T_d^{(n)}))}} \leq u \right) \rightarrow \int_{-\infty}^u \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

para todo u quando $\min\{n_1, \dots, n_d\} \rightarrow \infty$.

Homologia de caminhos de Digrafos

 Espaço de caminhos e o operador bordo

 Formas diferenciais e o diferencial exterior

Teorema de Hodge

 Homologia para grafos localmente finitos

 Equação do Calor

Digrafos aleatórios

Passeios p -preguiçosos

Dado um d -caminho orientado (com sinal $\pm$) $v = e_{i_0 \dots i_d}$ em G , dizemos que $w \sim v$ (w é vizinho de v) se para algum $k \in V$ e para alguns $r, q \in \{0, 1, \dots, p\}$

$$w = \begin{cases} (-1)^{q+r} e_{i_0 \dots \hat{i}_r \dots i_{q-1} k i_q \dots i_d}, & \text{if } r < q \\ (-1)^{q+r+1} e_{i_0 \dots i_{q-1} k i_q \dots \hat{i}_r \dots i_d}, & \text{if } r \geq q. \end{cases}$$

Denotamos por $m(v)$ a valência ou número de vizinhos de v em G .

Nos restringiremos a grafos de d -valência limitada

Passeio p -preguiçoso

O passeio aleatório p -preguiçoso em G partindo do d -caminho elementar v^* é a cadeia de Markov em $\Omega_d(G)$ com probabilidades de transição:

$$P(X_{n+1} = v' | X_n = v) = \begin{cases} p, & v' = v \\ \frac{1-p}{m(v)}, & v' \sim v \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Denotamos a probabilidade de que um passeio aleatório começando em v atinja w no tempo n por $\mathbf{p}_n^v(w)$.

Processo esperança

Para $d \geq 2$, o **processo esperança** em G partindo de v é a sequência de d -formas $\{\mathcal{E}_n^v\}_{n=0}^\infty$ definidas por

$$\mathcal{E}_n^v(w) = \mathbf{p}_n^v(w) - \mathbf{p}_n^v(-w).$$

O nome “esperança” se dá pelo fato de que para qualquer d -forma f ,

$$\mathbb{E}[f] = \sum_{w \in G_d^\pm} \mathbf{p}_n^v(w) f(w) = \sum_{w \in G_d^\pm} \mathbf{p}_n^v(w) f(w) = \sum_{w \in G_d^+} \mathcal{E}_n^v(w) f(w).$$

Convergência do processo esperança normalizado

Existe uma constante M , que depende da valência máxima dos d -caminhos em G , t.q. o processo normalizado



Donu Arapura. *Algebraic geometry over the complex numbers*. Springer Science & Business Media, 2012.



Raoul Bott e Loring W Tu. *Differential forms in algebraic topology*. Vol. 82. Springer Science & Business Media, 2013.



Manfredo Perdigao do Carmo. *Geometría diferencial de curvas y superficies*. Alianza Editorial, 1990.



Manfredo P Do Carmo. *Differential forms and applications*. Springer Science & Business Media, 2012.



William Fulton. *Algebraic topology: a first course*. Vol. 153. Springer Science & Business Media, 2013.

-  Alexander Grigor'yan et al. "Homologies of path complexes and digraphs". Em: *arXiv preprint arXiv:1207.2834* (2012).
-  Alexander Grigor'yan et al. "On the path homology theory of digraphs and Eilenberg-Steenrod axioms". Em: (2016).
-  Erwin Kreyszig. *Introductory functional analysis with applications*. Vol. 1. wiley New York, 1989.
-  William S Massey. *Algebraic topology: an introduction*. 1987.
-  Ori Parzanchevski. "High Dimensional Expanders". Tese de doutoramento. Hebrew University of Jerusalem, 2014.



Ori Parzanchevski e Ron Rosenthal. “Simplicial complexes: spectrum, homology and random walks”. Em: *Random Structures & Algorithms* 50.2 (2017), pp. 225–261.



Lekh R Vermani. *An elementary approach to homological algebra*. CRC Press, 2003.



Frank W Warner. *Foundations of differentiable manifolds and Lie groups*. Vol. 94. Springer Science & Business Media, 2013.



Andreas Weber. “Analysis of the physical Laplacian and the heat flow on a locally finite graph”. Em: *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 370.1 (2010), pp. 146–158.



Yu Zhang. “A martingale approach in the study of percolation clusters on the $\mathbb{Z}^d$ lattice”. Em: *Journal of Theoretical Probability* 14.1 (2001), pp. 165–187.