

1 Introdução

Antes de darmos uma definição bem formalizada, *orbifolds* são uma generalização do conceito de variedades. Um *orbifold* pode ser pensado ingenuamente como um espaço geométrico que localmente se parece com um aberto de $\mathbb{R}^n$ quocientado pela ação linear de um grupo finito. Veremos que tal conceito abrange não tão somente variedades, como variedades com bordo, quocientes de variedades por grupos finitos (como almofadas), espaços topológicos com *quinas* ou *bicos*, dentre outros.

Ainda neste texto faremos a construção do fibrado de referenciais de um *orbifold*, o que nos permite em pensar em suas reduções e, conseqüentemente, em G -estruturas.

A bibliografia principal desse trabalho é [2], por seu detalhamento estrutural. O esqueleto deste texto segue a ordem lá estabelecida, descrevendo as mesmas estruturas. Todavia, aqui o leitor poderá encontrar alguns exemplos e interpretações pragmáticas e demonstrações mais detalhadas por parte deste que vos escreve.

Bom, então mãos a obra!

2 Orbifold

Antes de definirmos formalmente o conceito de *orbifold*, fixemos alguma linguagem básica.

No que se segue $\text{Dif}(M)$ é o grupo de difeomorfismos de uma variedade M . Para um subgrupo $G < \text{Dif}(M)$, denotamos o subgrupo de isotropia de um ponto $x \in M$ por $G_x := \{g \in G : gx = x\}$. Além disso, para cada $g \in G$ fixe

$$\Sigma_g = \{x \in M : gx = x\} \quad \text{e} \quad \Sigma_G := \{x \in M : G_x \neq \{1\}\}.$$

Note que $\Sigma_G = \bigcup_{1 \neq g \in G} \Sigma_g$.

Um subconjunto $S \subset M$ será dito **G -estável** se for conexo e se para cada $g \in G$ temos que $gS = S$ ou $gS \cap S = \emptyset$. O **grupo de isotropia** de S é $G_S := \{g \in G : gS = S\}$.

Note que os conjuntos G -estáveis, por serem conexos, são exatamente as componentes dos subconjuntos G -invariantes de M . Com efeito, se S é a componente de um conjunto G -invariante, como imagem de um subconjunto conexo por uma função contínua entre espaços Hausdorff é conexa, se $gS \cap S \neq \emptyset$, $gS \subset S$. Como o mesmo vale para g^{-1} , então $gS = S$. Por outro lado, claramente S é a componente de $G(S) = \{gs : g \in G, s \in S\}$, que é G -invariante.

Lema 2.1. *Se $G < \text{Dif}(M)$ é finito, o conjunto dos subconjuntos G -estáveis forma uma base pra topologia de M . Mais além, para cada $x \in M$ existe um subconjunto G -estável de M , S , tal que $G_x = G_S$.*

Demonstração. Se $G < \text{Dif}(M)$ é finito, podemos sempre escolher uma métrica riemanniana G -invariante em M . Outro resultado clássico de geometria riemanniana nos garante que a exponencial associada nos é um difeomorfismo local, no sentido de que existe um $\epsilon > 0$ t.q. $(\exp)_x$ leva $B(0, \epsilon) \subset T_x M$ a uma vizinhança $x \in W \subset M$ difeomorficamente. Além disso, como a métrica é G -invariante, para cada G -invariante, para cada $g \in G_x$, $(dg)_x$ é uma transformação ortogonal e $\exp_x \circ (dg)_x = g \circ \exp_x$; em particular, se $(dg)_x = \text{id}$, então $g|_W = \text{id}$. Portanto, $(dg)_x B(0, \epsilon) = B(0, \epsilon)$, de modo que $gW = W$. Suponha agora que $g \notin G_x$. Então, como $\exp_x \circ (dg)_x = g \circ \exp_{(gx)}$ e como M é Hausdorff, temos que $gW \cap W = \emptyset$, diminuindo W se necessário. $\square$

Antes de partimos para a teoria de orbifolds propriamente dita, lancemos mão dos dois seguintes lemas, que nos serão úteis futuramente.

Lema 2.2. *Sejam M uma variedade conexa e G um subgrupo finito de $\text{Dif}(M)$. Então Σ_G é fechado de interior vazio e a diferencial $d_x : G_x \rightarrow \text{Aut}(T_x M)$ é injetiva*

para cada $x \in M$; com $d_x g = dG_x := (dg)_x$ para qualquer $g \in G_x$.

Demonstração. Tome $g \in G_x$ t.q. $(dg)_x = \text{id}$. Defina $Z = \{y \in M : gy = y, (dg)_y = \text{id}\}$. Claramente $x \in Z$, portanto Z é não-vazio. Como a ação de G é suave, fica claro que Z é fechado. Pelo argumento do lema 2.1, Z também é aberto. Portanto $Z = M$, dado que M é conexo. Portanto, $g = \text{id}$. Logo d_x é injetiva.

Agora, seja $g \in G \setminus \{\text{id}\}$ e suponha que x é ponto interior de Σ_g . Então existe uma vizinhança V de x em Σ_g . Deste modo, para todo $y \in V$, $g \in G_y$, i.e., $gy = y$. Em particular, $(dg)_x = \text{id}$. O que implica que $g = \text{id}$. Absurdo. Portanto, Σ_g tem interior vazio. Consequentemente, Σ_G também. $\square$

Note que, como corolário, deste lema temos que qualquer difeomorfismo de ordem finita em uma variedade conexa.

Lema 2.3. *Sejam M uma variedade conexa e G um subgrupo finito de $\text{Dif}(M)$. Para cada mapa suave $f : V \rightarrow M$ definido num aberto V conexo e não-vazio de M satisfazendo $f(x) \in G(x)$, para cada $x \in V$, existe um único $g \in G$ tal que $f = g|_V$.*

Demonstração. Pelo Lema 2.2 temos que $A = M \setminus \Sigma_G$ é um aberto denso G -invariante de M e a projeção $\pi : A \rightarrow A/G$ é um G -fibrado principal. Portanto, $A \cap V$ é um aberto denso de V . Seja C uma componente de $A \cap V$. Note que para cada $x \in C$, $G_x = \{\text{id}\}$. Como $f(x) \in G(x)$, então $G_{f(x)} = \{\text{id}\}$; i.e., $f(x) \in A$. Portanto, por hipótese, $\pi \circ f|_C(x) = \pi|_C$. Assim, $f_C = g(x)x$, para uma aplicação suave $g : C \rightarrow G$. Temos que, como G é discreto, seu espaço tangente é trivial. Portanto, $g_* : TA \rightarrow TG$ é nula. Assim, g é localmente constante. Como C é conexo, existe um único $g_C \in G$ t.q. $f|_C = g|_C$. Em particular, $(df)_x = (dg|_C)_x$ para todo $x \in \overline{C}$.

Note que o argumento do Lema 2.1 nos garante que para cada $y \in \Sigma_G \cap V$ a ação de $g \in G_y$ é linear, e portanto, nessa carta, Σ_G é união finita de subespaços vetoriais. Em particular, há um número finito de componente de $A \cap V$ intersectando esta carta, e y está no bordo de todos eles. Mas, se C e C' são duas componentes de

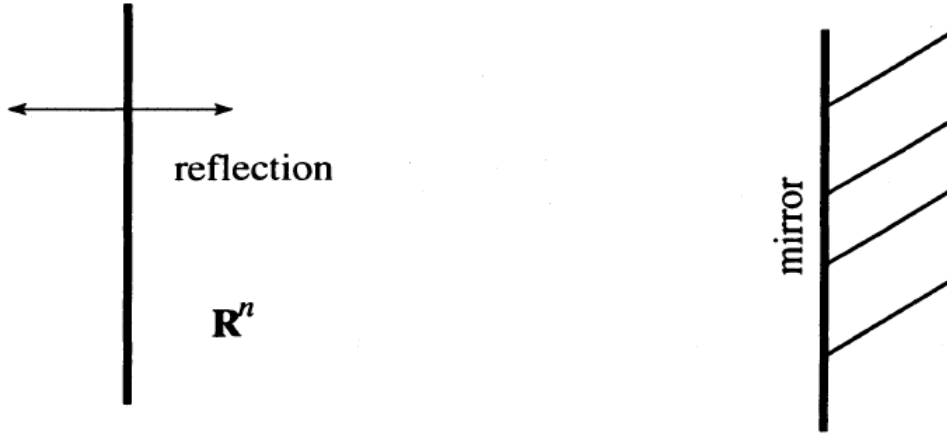
$A \cap V$ t.q. $y \in \overline{C} \cap \overline{C'}$, temos que $(dg_C)_y = df_y = (dg_{C'})_y$ e, portanto, pela Lema 2.2, $g_C = g_{C'}$. Como V é conexo, f coincide com um único g em todo V . $\square$

Definição 2.4. *Seja Q um espaço topológico. Uma **carta de orbifold** de dimensão $n \geq 0$ em Q é uma tripla (U, G, ϕ) , em que U é um subconjunto conexo de $\mathbb{R}^n$, G é um subgrupo de $\text{Dif}(U)$ e $\phi : U \rightarrow Q$ é uma aplicação aberta que induz um homeomorfismo de $U/G \rightarrow \phi(U)$.*

*Note que toda a informação topológica necessária é dada pela ação de G em U . Por isso, alguns autores chamam o par (U, G) , ou mesmo o espaço U/G , com certo abuso de linguagem, de **modelo local** de Q .*

O leitor, a esta altura, conhecendo a definição de uma variedade, já deve ter uma intuição do que virá a ser um *orbifold*. Isto é, ingenuamente, um *orbifold* será definido via um atlas de cartas de orbifold, com algumas restrições de *colagem* das cartas. Assim como no caso de variedades, veremos pela definição a seguir, que uma única carta já nos define uma estrutura de orbifold. O exemplo a seguir já nos sugere um fato verdadeiro, que variedades com bordo são orbifolds. O mesmo vale para as câmaras de Weil, caso o leitor esteja familiarizado com o conceito.

Exemplo 5. Seja $\mathbb{R}^n$ e H um hiperplano. Considere g a reflexão em H e $G = \{e, g\}$, que é claramente um subgrupo discreto de difeomorfismos de M . Seja $Q \subset \mathbb{R}^n$ um semiespaço de bordo H com a topologia quociente. Claramente $\pi|_Q : Q \rightarrow \mathbb{R}^n$ é um homeomorfismo. Defina $\phi = (\pi_Q)^{-1} \circ \pi$. Deste modo $(\mathbb{R}^n, G, \phi)$ é uma carta de orbifold.



□

Definição 2.6. *Um **mergulho** entre cartas de orbifolds é uma aplicação $\lambda : (V, H, \psi) \rightarrow (U, G, \phi)$ entre cartas de orbifolds sobre um mesmo espaço topológico subjacente, Q , tal que $\lambda : V \rightarrow U$ é um mergulho que satisfaz $\phi \circ \lambda = \psi$.*

Fica claro da definição acima que se (U, G, ϕ) é uma carta de orbifold sobre Q e $S \subset U$ é G -estável, a tripla (S, G_S, ϕ_S) é também uma carta de orbifold tal que a identidade é um mergulho. Neste caso, (S, G_S, ϕ_S) é dita **restrição** de (U, G, ϕ) .

Para formalizarmos a noção ingênua de colagem das cartas de um orbifold, precisaremos lançar mão de algumas propriedades de mergulhos entre cartas de orbifolds.

Proposição 2.7. *(i) Dado um mergulho $\lambda : (V, H, \psi) \rightarrow (U, G, \phi)$ entre cartas de orbifold sobre Q , tem-se que $\lambda(V)$ é um subconjunto aberto G -estável de U e existe um único isomorfismo $\bar{\lambda} : H \rightarrow G_{\lambda(V)}$ t.q. $\lambda(hx) = \bar{\lambda}(h)\lambda(x)$.*

(ii) A composta de quaisquer dois mergulhos entre cartas de orbifolds é também uma carta de orbifold.

(iii) Para cada carta de orbifold (U, G, ϕ) , qualquer difeomorfismo $g \in G$ é um mergulho de (U, G, ϕ) sobre si mesmo, e $\bar{g}(g') = gg'g^{-1}$.

(iv) Se $\lambda, \mu : (V, H, \psi) \rightarrow (U, G, \phi)$ são mergulhos entre duas cartas de manifolds, existe um único $g \in G$ com $\lambda = g \circ \mu$.

Demonstração. (i) Tome $h \in H$. Note que, para cada $x \in \Lambda(V)$, $\phi(\lambda \circ h \circ \lambda^{-1}(x)) = \psi(h\lambda^{-1}(x)) = \psi(\lambda^{-1}(x))$; dado que ψ induz um homeomorfismo $U/G \rightarrow \psi(V)$. Por outro lado, $\phi(x) = \phi(\lambda(\lambda^{-1}(x))) = \psi(\lambda^{-1}(x))$. Portanto, $\lambda \circ h \circ \lambda^{-1}$ é um difeomorfismo que leva fibra em fibra. Pelo Lema 2.3, existe um único $\bar{\lambda}(h) \in G$ que estende esse difeomorfismo a U . Portanto, temos que para todos $h, h' \in H$ e para todo $x \in V$, $\overline{\lambda(hh')}\lambda(x) = \bar{\lambda}(h)\bar{\lambda}(h')\lambda(x)$. Logo, $((\overline{\lambda(hh')})^{-1}\bar{\lambda}(h)\bar{\lambda}(h'))\lambda(x) = \lambda(x)$. Assim, pelo corolário do Lema 2.2, $\bar{\lambda}$ é um homomorfismo (claramente injetivo).

Agora, fixe $g \in G$.

Se existe $h \in H$ t.q. $g = \bar{\lambda}(h)$, então, para cada $x \in V$, $g\lambda(x) = \bar{\lambda}(h)\lambda(x) = \lambda(hx)$. Por outro lado, como $G < \text{Dif}(U)$, existe $y \in U$ t.q. $\bar{\lambda}(h)y = \lambda(x)$. Ou seja, $y = \bar{\lambda}(h^{-1})\lambda(x) = \lambda(h^{-1}x)$. Logo, neste caso, $g\lambda(V) = \lambda(V)$.

Em contrapartida, suponha que $g\lambda(V) \cap \lambda(V) \neq \emptyset$. Defina $A = U \setminus \Sigma_G$ que, pelo Lema 2.3 é um aberto denso G -invariante. Portanto, $A \cap g\lambda(V) \cap \lambda(V) \neq \emptyset$. Então existe $x \in A \cap V$ t.q. $g^{-1}x \in V$. Mais ainda, existe $h \in H$ t.q. $h\lambda^{-1}(g^{-1}x) = \lambda^{-1}(x)$, de modo que $\bar{\lambda}(h)g^{-1}x = x$. Como $x \notin \Sigma_G$, $\bar{\lambda}(h) = g$.

Os itens (ii) e (iii) seguem diretamente das definições.

(iv) Temos que $\psi = \phi \circ \lambda = \phi \circ \mu$. Portanto, λ e μ mandam elementos numa mesma órbita. O resultado segue do Lema 2.3. $\square$

Como o nome sugere, as cartas de orbifold devem ser capazes de definir um atlas sobre um espaço topológico subjacente. E assim como em variedades, esse atlas precisa de condições de *colagem*, ou, mais precisamente, de compatibilidade entre as cartas.

Definição 2.8. Dizemos que duas cartas de orbifold (U, G, ϕ) e (V, H, ψ) de dimensão $n > 0$ em Q são **compatíveis** se para cada $z \in \phi(U) \cap \psi(V)$ existe uma carta de orbifold (W, K, θ) em Q com $z \in \theta(W)$ e mergulhos entre cartas de orbifold $\lambda : (W, K, \theta) \rightarrow (U, G, \phi)$ e $\mu : (W, K, \theta) \rightarrow (V, H, \psi)$.

Um **atlas de orbifold** de dimensão n de um espaço topológico Q é um conjunto

$$\mathcal{A} = \{(U_i, G_i, \phi_i)\}_{i \in I}$$

de cartas de orbifold sobre Q duas-a-duas compatíveis t.q. $Q = \bigcup_{i \in I} \phi_i(U_i)$. Dois atlas de orbifold são **equivalentes** se sua união for também um atlas de orbifold.

Um **orbifold** de dimensão n é um par $(Q, \mathcal{A})$, com Q um espaço topológico segundo-contável e Hausdorff e $\mathcal{A}$ uma atlas de orbifold de dimensão n de Q maximal.

Cometeremos o abuso de chamar o espaço subjacente Q de orbifold. Além disso, todo atlas de orbifold de um espaço Hausdorff segundo-contável Q está contido em um único atlas maximal $\mathcal{A}$, que será dito atlas de orbifold do orbifold Q , assim como qualquer um de seus subatlas. Além disso, suas cartas serão ditas cartas de orbifold do orbifold Q .

Portanto o Exemplo 5 nos define uma estrutura de orbifold sobre o semiespaço de $\mathbb{R}^n$. Note ainda que as cartas de uma variedade podem ser vistas como cartas de um orbifold com ação do grupo trivial. Além disso, as condições de compatibilidade do atlas da variedade, nesse caso, fazem com o que suas cartas satisfaçam as condições de compatibilidade de cartas de orbifold. Com isso em mente e com o Exemplo 2, temos que tanto variedades diferenciáveis quanto variedades com bordo são exemplos de orbifolds. Mais ainda, não é difícil notar que se no Exemplo 2 tivéssemos considerado o grupo G como o grupo de reflexões em um número finito de hiperplanos, teríamos uma estrutura de orbifold sobre uma *câmara de Weyl*, caso o leitor esteja familiarizado com o conceito.

Mais ainda, se G é um grupo finito que age propriamente sobre uma variedade M , então o quociente M/G é Hausdorff e segundo-contável, que tem uma estrutura canônica de orbifold dada pela ação de G nas cartas da variedade M que têm pontos com isotropia não trivial e pela ação do grupo trivial nas outras cartas.

Proposição 2.9. *Para todo orbifold Q existe um atlas $\mathcal{A}$ tal que $U = \mathbb{R}^n$ e G é um subgrupo finito de $O(n)$*

Demonstração. Tome $q \in Q$ e seja (U, G, ϕ) uma carta de orbifold em Q t.q. $q = \phi(p)$ para algum $p \in U$. Fixe uma métrica G -invariante em U . Temos que a exponencial associada a essa métrica é um difeomorfismo de uma vizinhança aberta de zero em $T_p U$ numa vizinhança do ponto p . Além disso, G age linearmente sobre $T_p U$ preservando produto interno; i.e., G é um subgrupo de $O(n)$, o grupo de isometrias deste produto interno. A aplicação exponencial nos dá a conjugação dessa ação com a ação de G na vizinhança normal. $\square$

Como corolário da proposição acima temos que a vizinhança de um ponto em um orbifold é um cone no $(n-1)$ -orbifold esférico S^{n-1}/G , uma vez que a ação de um subgrupo finito $G < O(n)$ é determinada, a menos de conjugação, pelo quociente métrico S^{n-1}/G ; como mostra o Lema 1 do artigo [3].

Além disso, como conhecemos os subgrupos finitos de $O(1)$, de $O(2)$ e de $SO(3)$, é possível classificar os orbifolds de dimensões 1 e 2 e os *orbifolds orientáveis*, que viremos a definir mais à frente, de dimensão 3 – como feito em [4].

Agora que temos os objetos da nossa categoria bem definidos, vamos à definição dos morfismos.

Definição 2.10. *Sejam Q e Q' dois orbifolds. Uma **aplicação de orbifold** é uma aplicação contínua $f : Q \rightarrow Q'$ tal que para cada $z \in Q$ existem cartas de orbifold (U, G, ϕ) e (V, H, ψ) de Q e de Q' , respectivamente, com $z \in \phi(U)$, e uma aplicação suave $\tilde{f} : U \rightarrow V$ t.q. $\psi \circ \tilde{f} = f \circ \phi$. Neste caso, $\tilde{f}$ é dito **levantamento local** de f .*

É direta a verificação de que aplicações de orbifold são fechadas para composição, que é associativa, e de que a identidade tem a identidade do aberto subjacente da carta de orbifold em cada ponto como levantamento local. Deste modo, podemos falar na Categoria de orbifolds. Dois orbifolds são ditos isomorfos se são isomorfos em nessa categoria. Além disso, mapas de orbifolds $Q \rightarrow \mathbb{R}$, com contradomínio real, são ditos **funções suaves** no orbifold Q .

Fica claro da definição que aplicações entre variedades (com bordo) são aplicações de orbifolds. Outro exemplo trivial é o de aplicações constantes.

Nosso intuito agora é provar que é possível falar do grupo de isotropia de um ponto num orbifold; isto é, que o grupo do isotropia não depende (a menos de classe de conjugação em $GL(n, \mathbb{R})$) da escolha do modelo local do orbifold ao redor do ponto, tampouco de seu representante no modelo. Para tal, seja Q um orbifold. Fixe $z \in Q$. Note que, para cada carta de orbifold (U, G, ϕ) com $z \in \phi(U)$, existe um $x \in U$ tal que $\phi(x) = z$. Pelo Lema 2.2 d_x define uma representação fiel de G_x em $GL(n, \mathbb{R})$. Além disso, se $y \in U$ é tal que $\phi(y) = z$, então, como a aplicação ϕ induz um homeomorfismo $U/G \rightarrow \phi(U)$, por definição de carta de orbifold, existe $g \in G$ tal que $y = gx$. Neste caso, $G_y = G_{gx} = gG_xg^{-1}$. Deste modo, d_y e d_x estão na mesma classe de conjugação de $GL(n, \mathbb{R})$.

Agora suponha que $\lambda : (V, H, \psi) \rightarrow (U, G, \phi)$ é um mergulho entre cartas de orbifold tal que existe $w \in V$ tal que $\lambda(w) = x$. Para cada $h \in H_w$, $\bar{\lambda}(h)x = \bar{\lambda}(h)\lambda(w) = \lambda(hw) = \lambda(w) = x$, de modo que $\lambda(h) \in G_x$. Por outro lado, seja $g \in G_x$. Como $\bar{\lambda} : H \rightarrow G$ é isomorfismo, existe $h \in H$ tal que $\bar{\lambda}(h) = g$. Deste modo, $\lambda(hw) = gx = x = \lambda(w)$. Como λ é mergulho, $hw = w$. Assim, $H_w = G_x$.

Mais além, fixe $h \in H_w$. Note que,

$$(d\lambda)_w dh_w (d\lambda)_w^{-1} = (d\lambda)_w dh_w (d\lambda^{-1})_x = d(\lambda \circ h \circ \lambda^{-1})_x$$

Além disso, $\lambda \circ h \circ \lambda^{-1}(x) = x$, portanto, $\lambda \circ h \circ \lambda^{-1} \in G_x$. Deste modo,

$$(d\lambda)_w dH_w (d\lambda)_w^{-1} = dG_x.$$

Portanto, a classe de conjugação de dG_x depende apenas de z , como afirmado acima.

Assim, podemos definir o **grupo de isotropia** do ponto z , denotado por

$$\text{Iso}_z(Q),$$

como um subgrupo de $\text{GL}(n, \mathbb{R})$ determinado a menos de conjugação.

Defina o **lócus singular** de Q por

$$\Sigma_Q = \{z \in Q : \text{Iso}_z(Q) \neq 1\}.$$

Seja (U, G, ϕ) uma carta de orbifold de Q . Tome $z \in \Sigma_Q \cap \phi(U)$. Então existe $x \in U$ t.q. $\phi(x) = z$, como $\text{Iso}_z(Q)$ é, a menos de conjugação, o subgrupo de $\text{GL}(n, \mathbb{R})$ determinado por dG_x , temos que $G_x \neq 1$. Portanto, $z \in \phi(\Sigma_G)$. Simetricamente, $\phi(\Sigma_G) \subset \Sigma_Q \cap \phi(U)$. Portanto, $\Sigma_Q \cap \phi(U) = \phi(\Sigma_G)$. Assim, Σ_Q é fechado, por ter complementar aberto, e de medida nula, por ser união enumerável de conjuntos de medida nula.

Definição 2.11. *Seja Q um orbifold de atlas $\mathcal{A} = \{(U_i, G_i, \phi_i)\}_i$. Uma **métrica riemanniana** no orbifold Q é uma coleção $\rho = (\rho_i)_i$ de métricas riemannianas ρ_i em U_i , tais que qualquer mergulho entre cartas de orbifolds $\lambda : (U_i, G_i, \phi_i) \rightarrow (U_j, G_j, \phi_j)$ é uma isometria enquanto aplicação $(U_i, \rho_i) \rightarrow (U_j, \rho_j)$.*

Proposição 2.12. *Todo orbifold admite métrica riemanniana.*

Demonstração. Sejam $\{(U_i, G_i, \phi_i)\}_{i \in I}$ um atlas de Q que cuja cobertura $\phi_i(U_i)$ de Q é localmente finita (lembrando que Q é paracompacto) e $\alpha_i : \phi(U_i) \rightarrow \mathbb{R}$ uma partição da unidade subordinada a essa cobertura suave; i.e. $\alpha_i \circ \phi_i$ é suave para todo

i (a construção de tal partição é feita de maneira análoga à feita para variedades). Escolha para cada $i \in I$ uma métrica riemanniana $\langle \cdot, \cdot \rangle^{(i)}$ em U_i .

Fixe $x \in U_i$. Então existe um número finito de índices $j \in I$ t.q. $\phi_i(x) \in \phi_j(U_j)$. Deste modo, podemos escolher um subconjunto G_i -estável $S \subset U_i$ e mergulhos de cartas de orbifold $\lambda_j : (S, (G_i)_S, \phi_i|_S) \rightarrow (U_j, G_j, \phi_j)$ que garantem a compatibilidade entre as cartas (U_i, G_i, ϕ_i) e (U_j, G_j, ϕ_j) . Para cada par $u, v \in T_x(U_i)$ defina a métrica ρ_i em U_i como a seguinte combinação convexa de médias:

$$(\rho_i)_x(u, v) = \sum_{j \in I} \alpha_j(\phi_i(x)) \sum_{g \in G_j} \langle d(g \circ \lambda_j)_x(u), d(g \circ \lambda_j)_x(v) \rangle_{g\lambda_j(x)}^{(j)}$$

Note que, pela Proposição 2.7 (iv), as médias

$$\sum_{g \in G_j} \langle d(g \circ \lambda_j)_x(u), d(g \circ \lambda_j)_x(v) \rangle_{g\lambda_j(x)}^{(j)}$$

independem da escolha de S e dos mergulhos λ_j . Portanto, $(\rho_i)_x$ também não depende de tais escolhas.

A verificação de que $(\rho_i)_{i \in I}$ define de fato uma métrica riemanniana sobre Q é direta a partir das definições. $\square$

É importante termos o cuidado de não confundirmos um orbifold com uma métrica riemanniana com um **orbifold riemanniano**, que é dado pelo quociente de uma variedade riemanniana por um subgrupo finito $G < \text{Iso}(M)$ de isometrias. Note que pela construção acima a métrica de M induz naturalmente uma métrica sobre o orbifold M/G – todavia tal métrica não é única.

O restante deste texto será voltado para a definição do *fibrado de referenciais* de um orbifold, no qual pode-se definir canonicamente as ações $\text{GL}(n, \mathbb{R})$ e de $\text{GL}(n, \mathbb{C})$; neste último caso a partir da complexificação do fibrado tangente. Mas além, assim como no caso de variedades, as métricas riemannianas nos garantem uma redução do grupo de estruturas, i.e., uma G -estrutura no orbifold, com G sendo $SO(n)$ no caso

orientável e $U(n)$ no caso não orientável, mas a partir da complexificação do fibrado tangente e, conseqüentemente, do fibrado de referenciais. As demonstrações destes fatos podem ser encontradas no fim da seção 2.4 de [2], uma vez que elas dependem das teorias de foliações e de holonomia, que fogem ao escopo deste trabalho.

O fibrado de referenciais de uma variedade M de dimensão n será denotado por $F(M)$. Tal fibrado tem como fibras $F_x(M)$ a variedade formada por todas as bases ordenadas de $T_x M$, ou, equivalentemente, dos isomorfismos $e : \mathbb{R}^n \rightarrow T_x M$. Deste modo, a ação de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ sobre $F(M)$ via $e \cdot A = e \circ A$ define um fibrado principal de base M .

Agora, fixado um orbifold Q , para cada carta de orbifold (U_i, G_i, ϕ_i) em seu atlas temos que $F(U_i)$ é trivial, dado que $U_i \subset \mathbb{R}^n$. Podemos levantar a ação de G_i a $F(U_i)$ via composição com a derivada; i.e., $ge := (dg)_x e$ para cada referencial $e \in F_x(U_i)$. Essa ação claramente comuta com a ação à direita de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, uma vez que $(dg_x \circ e) \circ A = dg_x \circ (e \circ A)$, e, se $g \cdot e = e$, para algum $e \in F_x(M)$, então $dg_x e : \mathbb{R}^n \rightarrow T_x M$, de modo que $gx = x$. Assim, seguindo a argumentação do primeiro parágrafo do Lema 2.2, tal ação é livre. Portanto, $F(U_i)/G_i$ é variedade com uma ação à direita de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$.

Seja $\pi : F(U_i) \rightarrow U_i$ a submersão canônica do fibrado de referenciais, i.e., $\pi(e) = x$ se $e \in F_x(U_i)$, de modo que $\pi(eA) = \pi(e)$ se $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$. Podemos definir então $p_i : F(U_i)/G_i \rightarrow Q$ via $p_i(G_i(e)) = \phi_i(\pi(e))$; que está bem definida pois $\phi(x) = \phi(gx)$ para qualquer $g \in G_i$. Além disso, para cada $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, $p_i(G(e)A) = p_i(G(eA)) = \phi_i(\pi(eA)) = \phi_i(\pi(e)) = p_i(G(e))$. Portanto, $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ age ao longo das fibras de p_i .

Fixe agora $\lambda : (U_i, G_i, \phi_i) \rightarrow (U_j, G_j, \phi_j)$ um mergulho entre cartas de orbifold. Defina então o mergulho $\tilde{\lambda} : F(U_i) \rightarrow F(U_j)$ via $\tilde{\lambda}(e) = d\lambda \circ e$. Ademais, para cada $g \in G_i$ e para cada $e \in F_x(U_i)$,

$$\tilde{\lambda}(ge) = d\lambda_{gx} dg_x e = d(\lambda \circ g \circ \lambda^{-1})_{\lambda(x)} \circ d\lambda_x \circ e = d(\bar{\lambda}(g))_{\lambda(x)} \circ \tilde{\lambda}(e) = \bar{\lambda}(g) \tilde{\lambda}(e).$$

De modo que $\tilde{\lambda}$ define a aplicação $\lambda_* : F(U_i)/G_i \rightarrow F(U_j)/G_j$, que é um mergulho suave aberto, uma vez que $\lambda(U_j)$ é G_j -estável. Mais ainda, se $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} \lambda_*(G_i(e) \cdot A) &= \lambda_*(G_i(e \cdot A)) = G_j(\tilde{\lambda}(e \cdot A)) = G_j(d\lambda \circ (e \circ A)) \\ &= G_j((d\lambda \circ e) \circ A) = G_j((d\lambda \circ e)) \cdot A = \lambda_*(G_i(e)) \cdot A. \end{aligned}$$

Isto é, o mergulho λ_* comuta com a ação de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ e $p_j \circ \lambda_* = p_i$. Além disso, uma demonstração direta mostra que $g_* = \mathrm{id}$. Isto implica que, pelo item (iv) da Proposição 2.7, para quaisquer dois mergulhos entre cartas de orbifold $\lambda, \mu : (U_i, G_i, \phi_i) \rightarrow (U_j, G_j, \phi_j)$ temos que $\lambda_* = \mu_*$.

Deste modo, temos que $\langle F(U_i)/G_i, \lambda_*^{ij} \rangle$, com $\lambda_*^{ij} : (U_i, G_i, \phi_i) \rightarrow (U_j, G_j, \phi_j)$ um mergulho de cartas de orbifolds, é um sistema dirigido filtrado (*filtered directed system*). Definimos então o **fibrado de referenciais** do orbifold Q como o colimite deste sistema direto, i.e.,

$$F(Q) = \varinjlim \{F(U_i)/G_i, \lambda_*^{ij}\}.$$

Deste modo, $F(Q)$ é uma variedade, tal que cada $F(U_i)/G$ é uma subvariedade imersa e as aplicações p_i induzem uma aplicação aberta $p : F(Q) \rightarrow Q$, sobre a qual a ação de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ é transitiva ao longo das fibras. Em particular, $F(Q)/\mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \cong Q$. Além disso, para cada $\eta \in F(Q)$ temos que $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})_\eta \cong \mathrm{Iso}_{p(\eta)}(Q)$, de modo que os grupos de isotropia desta ação são todos finitos.

Índice Remissivo

G -estável, 2

Aplicação de orbifold, 8

Atlas de orbifold, 7

Carta de Orbifold, 4

Carta de orbifold

 Compatíveis, 7

Fibrado de referenciais, 13

Funções suaves, 9

Grupo de isotropia, 2

Lócus singular, 10

Levantamento local, 8

Métrica riemanniana, 10

Mergulho, 5

Modelo Local, 4

Orbifold, 7

Restrição, 5

Referências

- [1] Christian Lange. “Orbifolds from a metric viewpoint”. Em: **arXiv preprint arXiv:1801.03472** (2018).
- [2] Ieke Moerdijk e Janez Mrcun. **Introduction to foliations and Lie groupoids**. Vol. 91. Cambridge University Press, 2003.
- [3] Ed Swartz. “Matroids and quotients of spheres”. Em: **Mathematische Zeitschrift** 241.2 (2002), pp. 247–269.
- [4] *Three-dimensional Orbifolds and Cone-Manifolds*. <https://web.math.ucsb.edu/~cooper/37.pdf>. Accessed: 2019-05-01.