ESTUDO PARA TESTE DE PLANARIDADE EM GRAFOS

ALEXANDRE NOMA

Orientadores: José Coelho de Pina Jr. e Cristina Gomes Fernandes

Resumo. Dado um grafo finito e não-orientado G, dizemos que G é um grafo é *planar* se G pode ser desenhado no plano de modo que não existam duas aresta em G que se intersectem exceto num vértice extremo em comum.

1. Introdução

Dado um grafo finito e não-orientado G, o *teste de planaridade* de G consiste em decidir se existe uma ordenação, digamos no sentido horário, em torno de cada vértice de G tal que G pode ser desenhado no plano de modo que não existam duas arestas de G que se intersectem exceto no vértice extremo em comum. Chamaremos de *imersão de G no plano*, o desenho obtido.

Existem alguns algoritmos lineares para *teste de planaridade*, entre eles o de Hopcroft e Tarjan [2], e o algoritmo de Lempel, Even e Cederbaum [3], que mais tarde foi melhorado por Booth e Lueker [1] através do uso da estrutura de dados chamada de árvores-PQ.

Recentemente, foi publicado o artigo de Hsu e Shih (*H&S*) [5] com a descrição de um algoritmo *"simples"* para testar planaridade em grafos em tempo linear. Mais tarde, este artigo foi reescrito por Robin Thomas (*RThomas*) [6], numa tentativa de simplificar um pouco mais a sua descrição.

Os dois últimos artigos mencionados acima (*H&S* e *RThomas*) foram escolhidos como alvos de nossos estudos, e serão parcialmente descritos neste relatório.

Observação. Os termos *nó* e *vértice* são utilizados para referenciar um nó numa árvore T e um vértice num grafo G, respectivamente. Neste relatório, abusaremos um pouco da notação e nó será a mesma coisa que um vértice.

2. Preliminares

Um *grafo não-orientado* G é um par $(V(G), E(G))$, onde $V(G)$ é um conjunto finito e $E(G)$ um conjunto de pares não ordenados de elementos de $V(G)$. Denotaremos $n = |V(G)|$ o número de vértices de G, e $m = |E(G)|$ o número de arestas de G.

Um *grafo orientado* (ou dirigido) D é um par $(V(D), A(D))$, onde $V(D)$ é um conjunto finito e $A(D)$ um conjunto de pares ordenados de elementos de

---

Date: 7 de dezembro de 2000.

$V(D)$. Denotaremos $n = |V(D)|$ o número de vértices de D, e $m = |A(D)|$ o número de arcos de D. D é chamado de *digrafo*.

Um grafo finito G é dito *simples* se não conter arestas múltiplas ou loops. Arestas múltiplas unem o mesmo par de vértices, enquanto que um loop une um vértice a ele mesmo. Se G contém arestas múltiplas ou loops, G é chamado de *multigrafo*.

Se $(u, v) \in E(G)$, então os vértices u e v são ditos *adjacentes*, e u é *vizinho* de v.

O *grau de um vértice* v de um grafo G é o número de arestas incidentes a v, denotada por $d(v)$.

Dizemos que G' é *subgrafo* de G se $V(G') \subseteq V(G)$ e $E(G') \subseteq E(G)$. Dizemos que G' é *subgrafo induzido* por $V' \subseteq V(G)$ se $V(G') = V'$ e $E(G')$ contém todas as arestas com extremidades em V'.

Seja H um subgrafo de G e v um vértice de G. Denotaremos por $H + v$ o subgrafo de G induzido pelos vértices de H juntamente com v. Similarmente, considere $v_1, v_2, ..., v_k$ vértices de G. Denotaremos por $H + \{v_1, v_2, ..., v_k\}$ o subgrafo induzido pelos vértices de H juntamente com os vértices em $\{v_1, v_2, ..., v_k\}$.

Se $V' \subseteq V(G)$ então $G - V'$ é o subgrafo de G obtido removendo-se todos os vértices de V' e todas as arestas incidentes em V'. Similarmente, se $E' \subseteq E(G)$ então $G - E'$ é o subgrafo de G otido pela remoção das arestas contidas em E'.

Denotaremos por G/e o grafo obtido através da contração de uma aresta e de G. Contrair uma aresta $e = (x, y)$ significa removê-la de G e colapsar os dois vértices x e y num único vértice, digamos z. Para $E' \subset E$, denotaremos por G/E' o grafo resultante de sucessivas contrações de arestas em E'. O grafo G/E' é chamado de uma *contração* de G.

Um *passeio* em G de comprimento k é uma seqüência alternada de vértices e arestas de G: $v_0, e_1, v_1, ..., v_{k-1}, e_k, v_k$, começando e terminando num vértice, e cada aresta incidente nos dois vértices antecessor e sucessor a ela na seqüência. Um *caminho* é um passeio sem repetição de vértices ou arestas. Um *circuito* é um caminho a menos de $v_0 = v_k$.

Um grafo G é *conexo* se para todo $\{u, v\}$ par de vértices distintos existe um caminho P entre u e v. Um *componente* (conexo) de um grafo G é um subgrafo conexo maximal. O grafo vazio é um grafo conexo.

Um *vértice de corte* é um vértice cuja remoção aumenta o número total de componentes. Similarmente, uma aresta é uma *ponte* se sua remoção aumentar o número total de componentes.

Um grafo G é dito *2-conexo* (ou biconexo) se G é conexo e não conter nenhum vértice de corte.

Um *bloco* de G é um subgrafo 2-conexo maximal de G.

Um *par de separação* de um grafo 2-conexo G é um par de vértices cuja remoção desconecta G. Se G não conter nenhum par de separação ou vértice de corte então G é *3-conexo*.

Um grafo sem nenhum ciclo (ou circuito) é chamado de *floresta*. Uma *árvore* é uma floresta conexa.

Um grafo onde cada par de vértices distintos são adjacentes é chamado de *grafo completo*, denotado por K_n, onde n é o número de vértices.

Um grafo G é dito *bipartido* se $V(G)$ pode ser particionado em V_1 e V_2 de tal modo que para todo $(i,j) \in E(G)$, se $i \in V_1$ então $j \in V_2$. Se todo $i \in V_1$ é ligado a todo $j \in V_2$, então G é chamado de grafo bipartido completo, denotado por $K_{s,r}$, onde $s = |V_1|$ e $r = |V_2|$.

Um grafo G é *planar* se G pode ser desenhado no plano de tal modo que não existam duas arestas que se intersectem exceto num vértice extremo em comum. Tal desenho é chamado de imersão de G no plano.

Um grafo G' é chamado de uma *subdivisão* de um grafo G se G' é obtido através de subdivisões de arestas de G, ou seja, através da substituição de arestas por caminhos contendo no máximo os vértices extremos em comum.

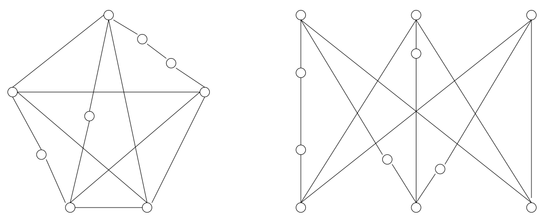
Dizemos que G é *k-colorível* se os vértices de G podem ser pintados com k cores de modo que não existam dois vértices de G que sejam consecutivos e tenham a mesma coloração.

3. Teorema de Kuratowski

Um dos mais belos teoremas em teoria dos grafos é o *teorema de Kuratowski.* Este teorema caracteriza grafos planares em termos de "estruturas proibidas".

Teorema 1. *(Kuratowski 1930) Um grafo é planar se e somente se ele não contém nenhuma subdivisão de K_5 e $K_{3,3}$.*

As subdivisões K_5 e $K_{3,3}$, chamadas de *subgrafos de Kuratowski*, e são grafos *não planares.*



subdivisão K_5 subdivisão $K_{3,3}$

Figura 1. Subgrafos de Kuratowski.

Teorema 2. *A imersão de um grafo planar G 2-conexo é única se e somente se G é uma subdivisão de um grafo 3-conexo.*

Lema 3. *Se G é um grafo 3-conexo com $n \geq 5$, então G contém uma aresta e tal que o grafo G/e obtido de G contraindo e é 3-conexo.*

Prova. Suponha que a afirmação acima não seja verdade. Então G/e não é 3-conexo para todo $e = (x,y)$ de G. Como G/e não tem nenhum vértice de corte, deve existir um par de separação contendo o vértice z obtido da contração de e. Assim, G tem um conjunto de separação da forma $\{x,y,z\}$. Assuma que e e z são escolhidos de modo que o maior componente H de $G - \{x,y,z\}$ é o maior possível. Sejam H' um outro componente de $G - \{x,y,z\}$, e $e' = (z,u)$ uma aresta de H'. Como G/e' não é 3-conexo, G tem um conjunto de separação da forma $\{z,u,v\}$. (Veja figura 2) Claramente ou v está em H ou $v = x$ ou y. Se v está em H', então

$G-\{z,u,v\}$ tem um componente $H+\{x,y\}$, contradizendo a maximalidade de H. Então $v=x$ ou y. Assuma $v=x$. Então o subgrafo $H+y$ de G é conexo, pois caso contrário $\{z,x\}$ seria um par de separação de G. Assim, o componente $H+y$ contradiz a maximalidade de H. ∎

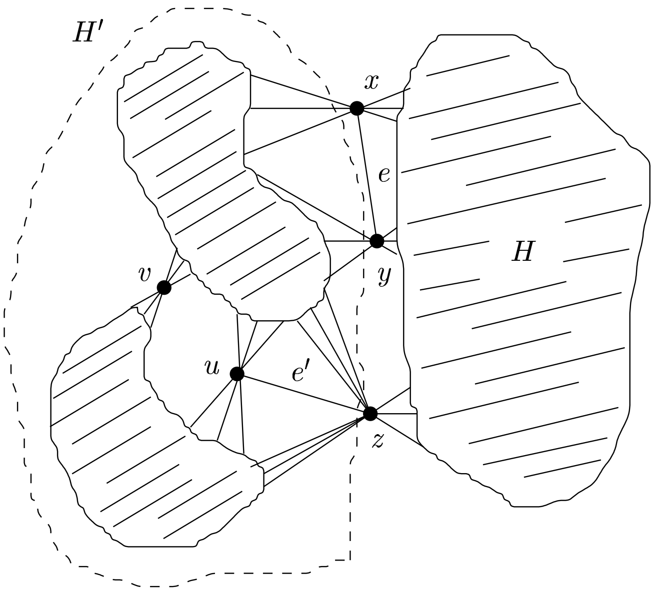


FIGURA 2. Ilustração da prova do Lema 3

Lema 4. *Seja e uma aresta de G. Se G/e contém uma subdivisão do K_5 ou $K_{3,3}$, então G também contém uma subdivisão do K_5 e $K_{3,3}$.*

Prova. Seja $e=(x,y)$ e z o vértice obtido pela contração de e. Seja S uma subdivisão do K_5 ou $K_{3,3}$ contida em G/e. Cada aresta (z,v) de G/e corresponde a arestas (v,x) e (y,v) de G. Escolhendo-se arbitrariamente uma delas para cada aresta incidente em z, construimos um subgrafo T de G induzido pelas arestas em S juntamente com e. Se z tem grau 2 em S, então claramente T (e portanto G) contém uma subdivisão do K_5 ou $K_{3,3}$. Então podemos assumir que z tem grau ≥ 3. Além disso, se x ou y tem grau 2 em T, então claramente T (e portanto G), contém uma subdivisão do K_5 ou $K_{3,3}$. Assim, S deve ser uma subdivisão do K_5 e x e y devem ter grau 3 em T (conforme mostrado na figura 3), e T (e portanto G) contém uma subdivisão do $K_{3,3}$. ∎

Prova. (Teorema 1) Provaremos por indução no número de vértices n do grafo G: G é planar se G não contém nenhuma subdivisão do K_5 ou $K_{3,3}$. Como K_5-e é planar para cada aresta e em k_5, a hipótese de indução vale para $n\leq 5$. Assuma então que $n\geq 6$ e que a hipótese vale para grafos com até $n-1$ vértices. Temos dois casos a considerar:

Caso 1: G não é 3-conexo. Claramente um grafo G é planar se e somente se cada bloco de G é planar. Então podemos assumir que G é 2-conexo. Assim, G tem um par de separação $\{x,y\}$. Sejam G_1 e G_2 a divisão devida ao par $\{x,y\}$. Claramente G_1 e G_2 contém menos vértices

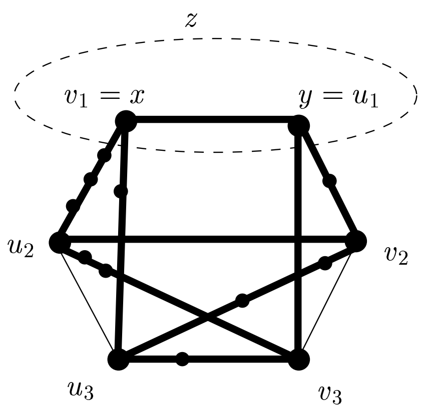


FIGURA 3. Subgrafo T em G contendo uma subdivisão do $K_{3,3}$.

que G, e por hipótese de indução, G_1 e G_2 são planares. Além disso, ambas têm imersão no plano de modo que a aresta (x, y) esteja contida na fronteira da face externa. Logo com as duas imersões planas, juntamente com x e y, podemos obter a imersão de G no plano.

Caso 2: G é 3-conexo. Pelo Lema 3, temos que G contém uma aresta $e = (x, y)$ tal que G/e é 3-conexo. Seja z o vértice resultante da contração de e. Pelo Lema 4, G/e não tem nenhuma subdivisão do K_5 ou $K_{3,3}$, e pela hipóteste de indução, G/e é planar. Considere um grafo planar G/e e o subgrafo $G/e - z$. Como G/e é 3-conexo, pelo Teorema 2, a imersão plana de G/e é única. Sejam F a face do grafo planar $G/e - z$ contendo o ponto z, e C a fronteira de F. Claramente todos os vizinhos de x ou y, exceto eles mesmos, devem estar em C. Sejam $x_1, x_2, ..., x_k$ os vizinhos de x em C na ordem cíclica e seja P_i o subcaminho de C ligando x_i a x_{i+1} tal que P_i não contenha nenhum x_j, $j \neq i, i + 1$ onde $x_{k+1} = x_1$ (veja figura 4). Se todos os vizinhos de y, exceto x, estão contidos em algum P_i, então a imersão plana de G pode ser facilmente obtida da imersão de G/e. Supomos então que nem todos os vizinhos de y, exceto x, estejam contidos em um único P_i. Então, como y tem três ou mais vizinhos, incluido x, temos 3 possibilidades:

(a) y tem três ou mais vizinhos de $\{x_1, x_2, ..., x_k\}$;
(b) y tem um vizinho u em $P_i - \{x_i, x_{i+1}\}$ para algum i, e um vizinho $v \notin P_i$;
(c) y tem dois vizinhos x_i e x_j tais que $j \neq i + 1$ e $i \neq j + 1$. No caso (a) o subgrafo de G induzido pelos vértices em C juntamente com x e y contém uma subdivisão do K_5. Por outro lado, nos casos (b) e (c), o subgrafo de G induzido pelos vértices em C juntamente com x e y contém uma subdivisão do $K_{3,3}$. (Veja figura 5) Assim, pelos três casos acima, chegamos numa contradição.

∎

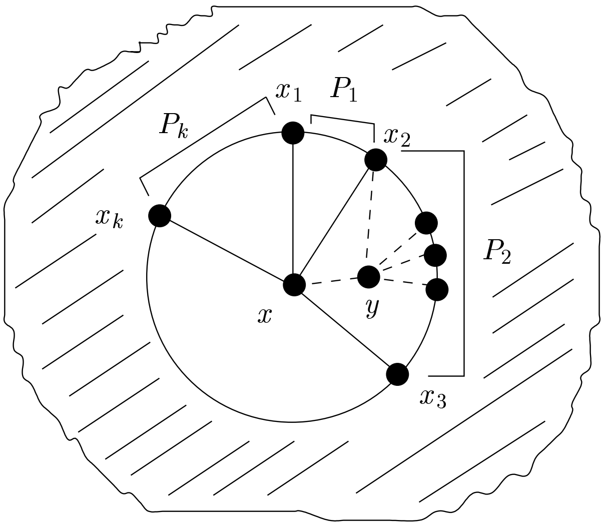


FIGURA 4. Grafo planar $G - y$.

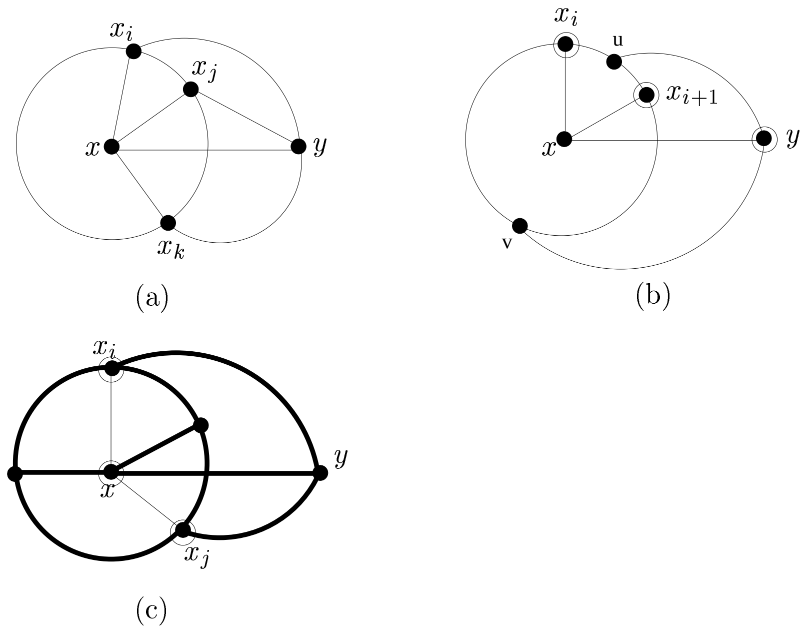


FIGURA 5. Subdivisões do K_5 e $K_{3,3}$.

Outros resultados importantes sobre *planaridade* (cf. Chiba, Nishizeki [4]):

Teorema 5. *Se G é um grafo planar então existe uma 4-coloração de G.*

Teorema 6. *(Euler 1750) Seja G um grafo conexo planar, e seja n, m, e f o número de vértices, arestas e faces de G, respectivamente. Então, $n - m + f = 2$.*

Corolário 7. *Se G é um grafo planar com $n \geq 3$ vértices e m arestas, então $m \leq 3n - 6$. Além disso, a igualdade vale se G é maximal planar.*

Corolário 8. *Se G é um grafo planar bipartido com $n \geq 3$ vértices e m arestas, então $m \leq 2n - 4$.*

Corolário 9. *Seja G um grafo planar com $n \geq 3$ vértices. Seja d_M o grau máximo de um vértice, e seja n_i o número total de vértices de grau i, onde $i = 1, 2, ..., d_M$. Então*

$$5n_1 + 4n_2 + 3n_3 + 2n_4 + n_5 \geq n_7 + 2n_8 + ... + (d_M - 6)n_{d_M} + 12.$$

Corolário 10. *Todo grafo planar contém um vértice de grau no máximo 5.*

4. Descrição do artigo H&S

Neste artigo, Hsu e Shih (*H&S*) [5] descrevem um algoritmo linear baseado em árvore de *busca em profundidade*, contruindo uma *imersão de G no plano* através de adição de vértices. Quando o grafo testado não for planar, o algoritmo produz *subgrafos de Kuratowski.* Aqui, uma estrutura de dados similar a árvore-PQ é introduzida: árvores-PC.

Uma árvore é uma *árvore-PC* se seus nós podem ser divididos em dois tipos: P-nós e C-nós, onde os vizinhos de um P-nó podem ser permutados arbitrariamente, e os vizinhos de um C-nó podem ser apenas transpostos respeitando a ordem cíclica.

Observação. Neste algoritmo, a árvore-PC é utilizada para representar a *imersão parcial de G no plano*, onde um P-nó representa um nó de G, e um C-nó representa um componente biconexo da imersão sendo construída.

Dado um grafo biconexo e não-orientado G, considere a árvore de *busca em profundidade T* de G. Seja 1, ..., n os nós de T em *pós-ordem.* Para cada nó folha u de T, considere $h(u) = \max\{u : u$ é vizinho de $i\}$. Para cada nó interno i de T, considere $b(i) = \max(h(i), \max\{b(v) : v$ é um filho de $i\})$. Ordene os filhos de cada nó de T em ordem crescente de valores de b.

Observação. Note que como G é biconexo, temos $b(i) > i$ para cada nó interno de T.

Chamemos de *back edges* as arestas de G que não fazem parte da árvore T. Em cada iteração j, examinamos todas as *back edges* de um descendente do nó j até j na árvore T, construindo assim a *imersão de G no plano*, e atualizando a estrutura de T. Considere i a primeira iteração que encontramos uma *back edge* de um descendente de i ao nó i.

Denotemos por T_r a sub-ávore de T a partir de um nó r.

Um *nó terminal t* em T_r é um nó que satisfaz as seguintes propriedades:

(a) $b(t) > i$;
(b) t é nó adjacente ao nó i ou t tem descendente u tal que $b(u) = i$;
(c) nenhum outro descendente de t satisfaz as propriedades (a) e (b) simultaneamente.

Uma sub-árvore T_r é chamada de *i-árvore* se para todo $j \in T_r$, $b(j) = i$. Similarmente, T_r é chamada de *i^*-árvore* se para todo $j \in T_r$, $b(j) > i$.

Lema 11. *Se $b(v) = i$, então T_v é uma i-árvore.*

Lema 12. *Se $b(v) > i$ mas T_v não é uma i^*-árvore, então exite um nó terminal em T_v.*

Lema 13. *Seja u um nó terminal de T_r. Então, para cada filho v de u, T_v é uma i-árvore se $b(v) = i$; T_v é uma i^*-árvore se $b(v) > i$.*

Teorema 14. *Seja G um grafo planar e T_r a sub-árvore a partir de um nó r. Então existem no máximo dois nós terminais em T_r.*

Lema 15. *Suponha que T_r contenha dois nós terminais, digamos u e u'. Sejam P o caminho de u até u' em T_r, $lca(u, u') = m$ (least common ancestor) e P' o caminho de m até r. Considere os conjuntos $S = \{v : v$ é um filho de um nó em P e $v \notin P\}$ e $S' = \{v : v$ é um filho de um nó em $P' - m$ e $v \notin P'\}$ (note que se $m = r$ então S' é um conjunto vazio). Então:*

(a) *para cada nó $v \in S$, T_v é uma i-árvore ou uma i^*-árvore, e*
(b) *para cada nó $v \in S'$, T_v é uma i-árvore.*

Corolário 16. *Suponha que T_r contenha apenas um nó terminal u. Sejam P o caminho de u até r em T_r e $S = \{v : v$ é um filho de um nó em P e $v \notin P\}$. Então, para cada nó $v \in S$, T_v é uma i-árvore ou uma i^*-árvore.*

Lema 17. *Suponha que T_r contenha dois nós terminais u e u'. Então o caminho P entre u e u' em T deve estar na fronteira (boundary cycle) de quaisquer componentes 2-conexos formados pelo nó i e pelos nós de T_r.*

Corolário 18. *Suponha que T_r contenha apenas um nó terminal u. Sejam P o caminho de u até r em T_r e $S = \{v : v$ é um filho de um nó em P e $v \notin P\}$. Seja u' o último nó ao longo do caminho P que tenha um filho $v \in S$ tal que $b(v) > i$ (u' poderia ser o mesmo que u). Então, o caminho de u a u' em T deve estar na fronteira de quaisquer componentes 2-conexos formados pelo nó i e pelos nós de T_r.*

4.1. **Criação dos C-nós.** Considere agora o caminho P e o conjunto S, definidos anteriormente para T_r com um ou dois nós terminais. Para cada nó $j \in P$, defina como novos filhos de j os nós u tais que $u \in S$ e $b(u) > i$. Faça $b(j) = max\{h(j), max\{b(u)\}\}$.

Para qualquer componente 2-conexo formado pelo nó i e pelos nós em T_r, defina os *nós essenciais* na fronteira (circuito) como sendo os nós j tais que $b(j) > i$.

Observação. Os *nós essenciais* são os únicos nós da fronteira relevantes para a futura imersão.

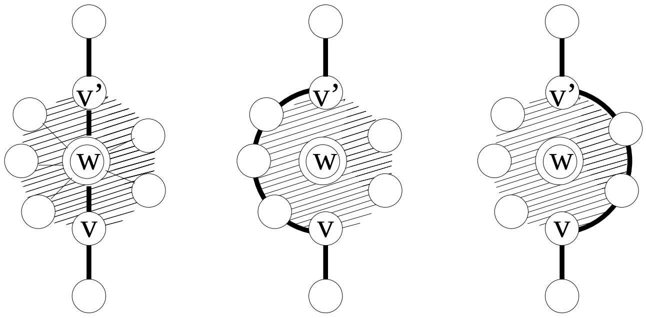
Defina como RBC (representative boundary cycle) do componente 2-conexo formado pelo nó i e pelos nós em T_r, os nós essenciais juntamente com i, respeitando a ordem cíclica na fronteira.

Observação. Para diferenciarmos das arestas originais de G, chamaremos as conexões no RBC de *links*.

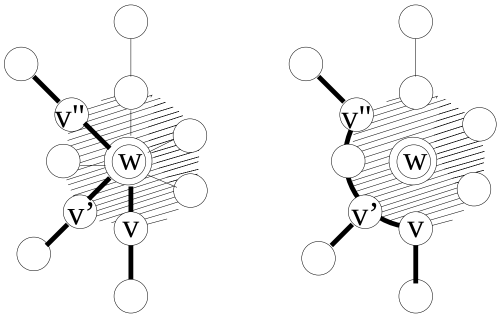
Assim, o componente 2-conexo formado por i e por T_r será representado por um C-nó w cujo pai é i e cujos filhos são os nós essenciais. Além disso, $b(w) = \max\{b(u) : u$ é filho de $w\}$.

Os C-nós poderão ser tratados como se fossem P-nós desde que os caminhos em T sejam interpretados de maneira correta (veja figura 6):

(a) Sejam v a v' dois nós adjacentes ao C-nó w. Um caminho de v a v' no componente 2-conexo original será representado pelo caminho de v a v' contido na fronteira.
(b) Sejam v, v' e v'' três nós adjacentes ao C-nó w. Os três caminhos disjuntos partindo de w são representados como sendo três caminhos partindo da fronteira.



(a)



(b)

FIGURA 6. Interpretação de caminhos por um C-nó. (a) caminho através de w, de v até v' e (b) três caminhos partindo de w.

Sejam v e v' dois nós quaisquer no RBC de um C-nó w. Então os filhos de w, distintos de v e v', estão divididos em dois subconjuntos no circuito: "esquerda" ou "direita" de v, v'. Denote por $C_1(v, v')$ e $C_2(v, v')$ tais subconjuntos.

Lema 19. *Suponha que T_r contenha dois nós terminais, digamos u e u'. Sejam P o caminho de u até u' em T_r, $lca(u, u') = m$ e P' o caminho de m até r. Considere os conjuntos $S = \{v : v$ é um filho de um nó em P e $v \notin P\}$ e $S' = \{v : v$ é um filho de um nó em $P' - m$ e $v \notin P'\}$. Sejam w um nó intermediário em P, e v e v' dois vizinhos de w em P. Então para cada nó $v \in C_1(v, v')$, T_v é uma i-árvore; e para cada nó $v \in C_2(v, v')$, T_v é uma i^*-árvore (ou vice-versa).*

Lema 20. *Sejam um C-nó w um nó terminal, j pai de w, e j' um filho de w tal que $T_{j'}$ é uma i-árvore. Então para cada $v \in C_1(j, j')$, T_v é uma i-árvore ou para cada $v \in C_2(j, j')$, T_v é uma i-árvore.*

5. Descrição do artigo do Robin Thomas

Neste artigo, Robin Thomas [6] descreve o algoritmo de (*H&S*) [5] introduzindo o conceito de *frame*, definido posteriormente, para testar planaridade em grafos 3-conexos.

Dado um grafo G finito, simples e não-orientado, o algoritmo enumera os vértices de G, digamos $v_1, v_2, ..., v_n$. Para $i = 1, 2, ..., n$, seja H_i o subgrafo de G induzido pelos vértices $\{v_1, v_2, ..., v_i\}$. Dado um *"frame"* de H_i, o algoritmo tenta estendê-lo para o *frame* H_{i+1}; se falhar o algoritmo produz um *subgrafo de Kuratowski* como certificado de não-planaridade. Cada iteração gasta tempo proporcional ao comprimento de um certo caminho construído durante o processo. Além disso, cada aresta de G aparece no máximo em dois desses caminhos, implicando assim na linearidade do algoritmo.

Considere $\beta(G)$ como o conjunto de todos os blocos do grafo G.

Sejam S um subgrafo de G, $X \subseteq V(G)$, e $v \in V(S)$. Dizemos que v é *X-exposto* para S em G se existir um caminho P em G com um extremo v e outro em X, e P disjunto de $V(S) - u$. Observe que o conjunto $V(S) \cap X$ é X-exposto para S em G.

Seja H um subgrafo induzido de G. Dizemos que $\mathcal{C} = (C_B : B \in \beta(H))$ é um *frame* de H em G se para todo $B \in \beta(H)$,

(a) B tem no máximo uma aresta e assim $B = C_B$, ou C_B é um circuito de B;
(b) B tem uma imersão planar com fronteira C_B;
(c) para todo $v \in B$ tal que v é $(V(G) - V(H))$-exposto para B em G, $v \in V(C_B)$.

Se H é um bloco então $\beta(H) = H$ e $\mathcal{C} = C_H$, senão definimos $C_H = \cup\{C_B : B \in \beta(H)\}$.

Sejam H subgrafo de G e $\mathcal{C}$ um frame para H em G. Um caminho P é chamado de *caminho perimetral* para H e $\mathcal{C}$ se P é um subgrafo de C_H. Sejam $B_1, B_2, ..., B_k$ todos os blocos de H que contém uma aresta de P. Chamamos de *span* de P em H o conjunto $S = B_1 \cup B_2 \cup ... \cup B_k$. Para $i = 1, 2, ..., k$, seja $P_i = P \cap C_{B_i}$. Seja $P'_i = P_i$ se P_i não tiver mais do que uma aresta, e P'_i o caminho complementar de P_i em C_{B_i} caso contrário. Dizemos que $P' = P'_1 \cup P'_2 \cup ... \cup P'_k$ é o *caminho complementar* de P. Se $E(P) = \emptyset$ então $S = P' = P$.
Sejam $X, Y \subseteq V(H)$, então um caminho perimetral P é chamado de um *(X,Y)-caminho* para H e $\mathcal{C}$ se

(a) as duas extremidades de P estão em X;
(b) para todo $v \in S$ tal que v é X-exposto para S em H, $v \in P$;
(c) para todo $v \in S$ tal que v é Y-exposto para S em H, $v \in P'$;
(d) nenhum componente de $H - V(S)$ contém um vizinho de um vértice de S, um membro de X e um membro de Y.

Um subgrafo L de H é chamado de um *(X,Y)-link* para H e $\mathcal{C}$ se a intersecção de L com cada componente de H é um (X,Y)-caminho para H e C.

Sejam H um subgrafo induzido de G, $\mathcal{C}$ um frame para H em G e $X, Y \subseteq V(H)$. Uma *(X,Y)-obstrução* para H e $\mathcal{C}$ é

(a) ou uma quíntupla (B, v_1, v_2, v_3, v_4) tal que $B \in \beta(H)$ e v_1, v_2, v_3, v_4 são vértices distintos de C_B, listados nesta ordem em C_B, tais que v_1 e v_3 são X-expostos para B em H, e v_2 e v_4 são Y-expostos para B em G;
(b) ou uma quádrupla (B, v_1, v_2, v_3) tal que $B \in \beta(H)$ e v_1, v_2, v_3 são vértices distintos de C_B tais que v_1, v_2, v_3 são X- e Y-expostos para B em H;

(c) ou uma quádrupla (v, H_1, H_2, H_3) tal que $v \in V(H)$ e H_1, H_2, H_3 são três componentes distintos de $H - v$, cada um contendo um membro de X, um membro de Y, e um vizinho de v.

Se B é um subgrafo de um grafo H e $Z \subseteq V(H)$, dizemos que B é *Z-ativo* em H e B contém pelo menos dois vértices que são Z-expostos para B em H.

De agora em diante, considere G o grafo a ser testado pelo algoritmo, H o subgrafo induzido por todos os vértices que já foram examinados de G, i o vértice correntemente examinado, H' o subgrafo de G induzido por $V(H) \cup i$, X o conjunto dos vértices de H que são adjacentes ao nó i, e Y o conjunto dos vértices de H que são adjacentes a um vértice de $V(G) - V(H')$.

Lema 21. *Se G é um grafo planar, e $G - V(H)$ é conexo, então H tem um frame em G.*

Lema 22. *Seja $\mathcal{C}$ um frame para H em G. Se existir um (X, Y)-link para H e $\mathcal{C}$, então H' tem um frame em G.*

Lema 23. *Seja $\mathcal{C}$ um frame para H em G, e suponha que $G - V(H)$ e $G - V(H')$ são conexos. Se existir uma (X, Y)-obstrução para H e $\mathcal{C}$, então G contém um subgrafo de Kuratowski.*

Lema 24. *Seja $\mathcal{C}$ um frame para H em G. Então existe um (X, Y)-link ou uma (X, Y)-obstrução para H e $\mathcal{C}$.*

Lema 25. *Suponha que G é 3-conexo. Sejam v um vértice de corte de H, B um bloco de H contendo v, e seja K um componente de $H - v$ disjunto de B e contendo um vizinho de v. Então $V(K)$ contém um membro de Y, e portanto v é Y-exposto para B em H.*

Lema 26. *Suponha que G é 3-conexo, e que para todo $B \in \beta(H)$ existe P_B um (X_B, Y_B)-caminho para B e (C_B). Seja L a união de todos os P_B tais que B é X-ativo em H. Se cada componente de L é um caminho então L é um (X, Y)-link para H e $\mathcal{C}$; caso contrário existe uma (X, Y)-obstrução para H e $\mathcal{C}$.*

5.1. **Algoritmo.** Teste de Planaridade.
`Entrada:` Um grafo G 2-conexo.
`Saída:` SIM se G é grafo planar, NÃO caso contrário.
Cada iteração começa com uma coleção $\mathcal{C}$ de circuitos e um conjunto $L \subseteq V(G)$ de nós a serem examinados.
Na primeira iteração, $\mathcal{C} = \emptyset$ e $L = V(G)$.
Cada iteração consiste em:
Escolha $w \in L$ tal que o subgrafo de G induzido por $L - w$ é conexo.
Sejam $X = \{v \in V(\mathcal{C}) : vw \in E(G)\}$ e $Y = \{v \in V(\mathcal{C}) : vj \in E(G), j \in L - w\}$.
Para cada vértice i pertencente a um circuito $C \in \mathcal{C}$ faça
  se $i \in X$ e $i \notin Y$ então rótulo(i) := $'X'$
  se $i \in Y$ e $i \notin X$ então rótulo(i) := $'Y'$
  se $i \in Y$ e $i \in X$ então rótulo(i) := $'XY'$
  se $i \notin X$ e $i \notin Y$
    então seja $j \in C'$ tal que C' é um circuito adjacente a C (caso exista)
      se rótulo(i) = ($'X'$ ou $'Y'$) e rótulo(j) $\neq$ rótulo(i)

então rótulo$(i) := {}'XY'$
senão rótulo$(i) :=$ rótulo(j)

Caso 0: $L = \emptyset$.
Devolva SIM e pare.

Caso 1: existe um circuito $C \in \mathcal{C}$ e vértices v_1, v_2, v_3, v_4 distintos em C tais que v_1, v_2, v_3, v_4 aparecem nessa ordem em C e rótulo$(v_1) =$ rótulo$(v_3) = {}'X'$, e rótulo$(v_2) =$ rótulo$(v_4) = {}'Y'$.
Devolva NÃO e pare.

Caso 2: existe $C \in \mathcal{C}$ e vértices v_1, v_2, v_3 distintos em C tais que rótulo(v_1) $=$ rótulo$(v_2) =$ rótulo$(v_3) = {}'XY'$.
Devolva NÃO e pare.

Caso 3: existe vértice $v \in V(G) - V(L)$ e componentes H_1, H_2, H_3 distintos em $G - (L \cup v)$, cada um contendo um membro de X, um membro de Y e um vizinho de v.
Devolva NÃO e pare.

Caso 4: (estende circuitos)
Para cada $C \in \mathcal{C}$ faça
se C conter algum vértice em X
então estenda o circuito C de modo que incorpore w
e todos vértices j tais que rótulo$(j) = ('Y' ou 'XY')$
Comece nova iteração.

6. Conclusão

O estudo do Teorema de Kuratowski, e dos dois artigos descritos, foram de extrema importância para o orientando que teve a oportunidade de aprender e se aprofundar mais no assunto tema do projeto de mestrado, além de ter um contato mais humano com seus orientadores.

Referências

[1] K.S. Booth e G.S. Lueker, Testing the consecutive ones property, inerval graphs, and graph planarity using PQ-tree algorithms, *Journal of Computer and System Science* **13** (1976), 335–379.

[2] J. Hopcroft e R. Tarjan, Efficient planarity testing, *Journal of the Association for Computing Machinery* **21** (1974), no. 4, 549–568.

[3] A. Lempel, S. Even e I. Cederbaum, An algorithm for planarity testing of graphs, *Proceddings International Symposium on Theory of Graphs* (New York) (P. Rosenstiehl, ed.), Gordon and Breach, July 1967, pp. 215–232.

[4] T. Nishizeki e N. Chiba, *Planar graphs: Theory and algorithms*, Annals of Discrete Mathematics, vol. 32, North-Holland, Amsterdam, 1988.

[5] W.-K. Shih e W.-L. Hsu, A new planarity test, *Theoretical Computer Science* **223** (1999), 179–191.

[6] R. Thomas, *Planarity in linear time*, `http://www.math.gatech.edu/~thomas/`, June 1997.

Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, Rua do Matão 1010, 05508–900 São Paulo, SP

E-mail address: `noma@ime.usp.br`