TÓPICOS EM EMPARELHAMENTOS

MARIO LESTON REY

1. Preliminares

Para um grafo G, $V(G)$ e $E(G)$ denotam, respectivamente, o conjunto dos vértices e das arestas de G. Para um conjunto de vértices X, a *cofronteira* de X, denotada por $\nabla_G(X)$, é o conjunto das arestas com uma ponta em X e a outra em $V(G) - X$. O conjunto dos *vizinhos* de X, denotado por $\Gamma_G(X)$ é o conjunto dos vértices de $V(G) - X$ adjacentes a algum vértice de X. Pra um conjunto de arestas F, G/F é o grafo obtido de G contraindo-se cada aresta de F e $G \times F$ é o grafo obtido de G subdividindo-se cada aresta de F.

Um *emparelhamento* de um grafo é um conjunto de arestas tal que todo vértice é incidente a no máximo uma aresta do emparelhamento. Um emparelhamento é *perfeito* se todo vértice de grafo é incidente a pelo menos uma aresta do emparelhamento. Um grafo é *emparelhável* se possui emparelhamento perfeito. Um vértice é *saturado* (ou *coberto*) por um emparelhamento se incide em alguma das arestas do emparelhamento caso contrário é *exposto* (ou *descoberto*). Um conjunto de vértices X é *saturado* (ou *coberto*) por um emparelhamento M se cada $x \in X$ é saturado por M. Para um grafo com emparelhamento perfeito, uma aresta é *permitida* se pertence a algum emparelhamento perfeito caso contrário é *proibida*.

Seja M um emparelhamento de um grafo G. Um caminho $\langle v_0, \alpha_1, v_1, \ldots, \alpha_k, v_k \rangle$ é *M-alternante* (*$\overline{M}$-alternante*) *com origem* v_0 *e término* v_k (ou *de* v_0 *até* v_k) se $\alpha_i \in M$ quando i é ímpar (par) e $\alpha_i \notin M$ quando i é par (ímpar).

Teorema 1.1 (Hall)**.** *Um grafo bipartido G com bipartição $\{X, Y\}$ possui um emparelhamento que satura X se, e somente se, $|\Gamma(A)| \geq |A|$ para todo $A \subseteq X$.*

Para um grafo G e um conjunto de vértices X denotaremos por $\mathcal{D}(G - X)$ ($\mathcal{C}(G - X)$) o conjunto dos componentes ímpares (pares) de $G - X$; o número de componentes ímpares de $G - X$, ou seja, $|\mathcal{D}(G - X)|$ será, alternativamente, denotado por $q(G - X)$. O *defeito de um conjunto de vértices* X, denotado por $\operatorname{def}_G(X)$, é o número $q(G - X) - |X|$. O *defeito de um grafo* G, denotado por $\operatorname{def}(G)$, é o número $\max(\operatorname{def}_G(X) : X \subseteq V(G))$. É claro que $\operatorname{def}(G) \geq 0$ para todo grafo G. A motivação destas definições vem da seguinte observação: para um conjunto de vértices X, qualquer emparelhamento expõe pelo menos $\operatorname{def}_G(X)$ vértices. Uma *barreira* de um grafo G é um conjunto de vértices X tal que $\operatorname{def}_G(X) = \operatorname{def}(G)$. Um grafo G é *crítico* se $G - v$ possui emparelhamento perfeito para todo vértice v. Com estas definições estamos prontos para introduzir o conceito de barreira forte que permeará o restante deste texto. Uma barreira X é *forte* se cada componente ímpar de $G - X$ é crítico.

Seja G um grafo e X uma parte de $V(G)$. *O grafo bipartido associado ao par* G, X é o grafo obtido de G removendo-se cada componente par de $G - X$, removendo-se cada aresta com ambas as pontas em X e contraindo-se cada componente ímpar de $G - X$.

Teorema 1.2. *Seja G um grafo conexo. Então*
(i) *G possui barreira forte e*
(ii) *para toda barreira forte X de G e todo emparelhamento máximo M de G*
  (iia) *$M \cap E(D)$ é um emparelhamento quase perfeito para todo D em $\mathcal{D}(G - X)$,*
  (iib) *$M \cap E(C)$ é um emparelhamento perfeito para todo C em $\mathcal{C}(G - X)$,*
  (iic) *M satura X e toda aresta de M com uma ponta em X possui a outra ponta num D em $\mathcal{D}(G - X)$.*

Teorema 1.3 (Tutte)**.** *Um grafo G é emparelhável se, e somente se, $q(G - X) \leq |X|$ para toda parte X de $V(G)$.*

Teorema 1.4 (Gallai-Edmonds)**.** *Seja G um grafo. Seja $D(G)$ o conjunto dos vértices de G que não são cobertos por pelo menos um emparelhamento máximo de G. Seja $A(G) := \Gamma(D(G))$ e $C(G) := V(G) - A(G) - D(G)$. Então*
(i) *os componentes do subgrafo de G induzido por $D(G)$ são críticos,*
(ii) *o subgrafo induzido por $C(G)$ é emparelhável,*
(iii) *o grafo bipartido associado ao par $G, A(G)$ possui um emparelhamento que satura $A(G)$,*
(iv) *se M é um emparelhamento máximo de G então M contém um emparelhamento quase-perfeito de cada componente de $D(G)$, um emparelhamento perfeito de cada componente de $C(G)$ e emparelha todos os vértices de $A(G)$ com vértices em distintos componentes de $D(G)$.*

2. Grafos elementares e grafos cobertos por emparelhamentos

Um grafo é *coberto por emparelhamentos* se toda aresta está em algum emparelhamento perfeito. Um grafo é *elementar* se o conjunto de suas arestas permitidas induz um subgrafo conexo; é evidente que tal subgrafo é coberto por emparelhamentos.

Teorema 2.1. *Seja G um grafo bipartido emparelhável com bipartição $\{X, Y\}$. São equivalentes:*
(i) *G é elementar,*
(ii) *G é coberto por emparelhamentos,*
(iii) *$G - x - y$ é emparelhável para todo $x \in X$ e $y \in Y$.*
(iv) *$|\Gamma(A)| \geq |A| + 1$ para todo $\emptyset \subset A \subset X$.*

Para um grafo G, denotaremos por $\mathcal{P}(G)$ a coleção das barreiras maximais de G.

Teorema 2.2. *Um grafo G é elementar se, e somente se, $\mathcal{P}(G)$ é uma partição de $V(G)$.*

Teorema 2.3. *Um grafo G é elementar se, e somente se, $q(G - X) \leq |X|$ para toda parte X de $V(G)$ e $G - X$ não possui componentes pares para toda barreira X.*

3. Decomposição em orelhas

Dado um subgrafo H de um grafo G, uma *orelha* de H é ou (1) um caminho não-trivial em G cujas pontas constituem os únicos vértices em comum com H ou (2) um circuito em G que possui exatamente um vértice em comum com H. Uma *decomposição em orelhas* de um grafo G é uma seqüência $G_0, G_1, \ldots, G_k$ de subgrafos de G tal que (i) G_0 é trivial, (ii) para todo $i > 0$, G_i é obtido de G_{i-1} adicionando-se uma orelha P_i de G_{i-1} e (iii) $G_k = G$. Diremos que $P_1, \ldots, P_k$ constituem as *orelhas* de tal decomposição.

É bem sabido um grafo é 2-aresta-conexo se, e somente se, possui uma decomposição em orelhas. Ainda mais, o número de orelhas numa decomposição em orelhas de um grafo G é independente da decomposição e seu valor é $|E(G)| - |V(G)| + 1$.

O *comprimento* de uma orelha é o número de arestas da orelha. Uma orelha é *ímpar* (*par*) se seu comprimento é ímpar (par).

Para um grafo 2-aresta-conexo G, $\varphi(G)$ denota o número mínimo de orelhas pares dentre todas as decomposições em orelhas de G. Uma decomposição em orelhas de um grafo G é *ótima* se possui exatamente $\varphi(G)$ orelhas pares.

Grafos críticos possuem uma decomposição em orelhas bastante peculiar e podem ser caracterizados através desta. Suponha que G é um grafo que possui uma decomposição em orelhas cada uma de cujas orelhas é ímpar. Não é difícil ver que nestas condições G é crítico. A recíproca desta afirmação também é verdadeira.

Teorema 3.1 (Lovász). *Um grafo G é crítico se, e somente se, possui uma decomposição em orelhas ímpar. Ademais, para cada aresta α de G, existe uma decomposição em orelhas ímpar de G tal que a primeira orelha usa α.*

É claro que o lema abaixo implica a parte difícil do teorema.

Lema 3.2 (Lovász). *Seja G um grafo crítico, x um de seus vértices e M um emparelhamento perfeito de $G - x$. Se H é um subgrafo próprio de G tal que $E(H) \cap M$ é um emparelhamento perfeito de $H - x$, então existe uma orelha ímpar P de H tal que $(H+P) - x$ possui emparelhamento perfeito $E(H + P) \cap M$.*

Lema 3.3. *Seja x um vértice de um grafo crítico G tal que $G - x$ é conexo. Então existe uma decomposição em orelhas ímpar de G tal que a primeira orelha contém v (em particular podemos escolher qualquer aresta incidente em v para iniciar a construção) e as demais orelhas contém no máximo uma aresta incidente em v.*

Lema 3.4. *Seja G um grafo crítico e x um de seus vértices tal que $G - x$ é conexo. Atribua cores verde e branca as arestas de $\nabla(x)$ de modo que exista pelo menos uma aresta de $\nabla(x)$ de cada cor. Então existe uma decomposição em orelhas ímpar de G tal que a primeira orelha usa uma aresta de cor verde e uma de cor branca.*

Prova. Seja M um emparelhamento perfeito de $G - x$. Pelo Lema 3.2, podemos escolher uma decomposição em orelhas ímpar $P_1, \ldots, P_k$ de G tal que:

(i) P_1 inclui uma aresta verde,
(ii) para cada j, a orelha P_j é $\overline{M}$-alternante,
(iii) para cada j, a orelha P_j contém no máximo uma aresta incidente em x e
(iv) para cada j, o grafo $G_j := P_1 + \cdots + P_j$ é crítico.

Se P_1 inclui uma aresta branca não há nada a provar. Suponha, pois, que P_1 não inclua nenhuma aresta branca. Seja P_i a primeira orelha que contém uma aresta branca; P_i é um caminho em virtude de (iii). Seja y o extremo de P_i diferente de x. Como G_{i-1} é crítico, existe um caminho M-alternante R de y até x em G_{i-1}. Pela escolha de P_i, o vértice x é incidente somente a arestas verdes de G_{i-1}. Portanto, a aresta de R que incide em x

é verde. Então $R + P_i$ é um circuito que contém uma aresta verde e uma aresta branca; ademais, $M \cap (R + P_i)$ é um emparelhamento perfeito do grafo $(R + P_i) - x$ e, portanto, pelo Lema 3.2, o grafo G possui uma decomposição em orelhas ímpar que começa com $R + P_i$. □

Teorema 3.5. *Se G é um grafo coberto por emparelhamentos então $\varphi(G) = 1$.*

Um subgrafo H de um grafo com emparelhamento perfeito G é *bom*[1] se, $G - H$ é emparelhável.

Lema 3.6. *Seja $G \neq K^2$ um grafo coberto por emparelhamentos. Se H é um subgrafo próprio bom coberto por emparelhamentos de G então existem orelhas ímpares $P_1, \dots, P_k$ de H tais que $H + P_1 + \cdots + P_k$ é bom e coberto por emparelhamentos.*

Prova. Seja $\alpha \in E(G) - E(H)$. Seja F um emparelhamento perfeito de G cuja restrição a H é um emparelhamento perfeito de H. Como G é coberto por emparelhamentos, existe um emparelhamento perfeito M de G que usa α. Agora, $M \oplus F$ é uma união de circuitos disjuntos nas arestas. É claro que $\alpha \notin M$. Considere, então, o circuito C que contém α. Não é difícil ver que C forma uma coleção de orelhas $P_1, \dots, P_k$ de H. Cada P_i começa e termina com uma aresta de M o que implica que $|P_i|$ é ímpar. Seja K o grafo $H + P_1 + \cdots + P_k$. Observe que $M \cap E(K)$ é um emparelhamento perfeito de K, ou seja, K é coberto por emparelhamentos. Ainda mais, K é um subgrafo bom uma vez que tanto $M \cap E(K)$ quanto $F \cap E(K)$ são emparelhamentos perfeitos de $E(K)$. □

O leitor atento notará que, no teorema acima, se G é bipartido é possível adicionar uma única orelha P a H de tal modo que $H + P$ seja bom e coberto por emparelhamentos.

Corolario 3.7. *Se G é um grafo elementar então $\varphi(G) = 1$.*

4. O teorema das duas orelhas

Nesta seção apresentaremos uma prova elementar, devida à Szigeti, do Teorema das Duas Orelhas de Lovász e Plummer. A prova faz uso basicamente dos Teoremas de Hall e Tutte.

Uma *decomposição em orelhas canônica* de um grafo G é uma seqüência $G_0, G_1, \dots, G_k$ de subgrafos bons e cobertos por emparelhamentos de G tais que G_0 é uma aresta, $G_k = G$ e para cada $i > 0$, G_i é obtido de G_{i-1} adicionando-se no máximo duas orelhas ímpares de G_{i-1}.

Teorema 4.1. *Todo grafo coberto por emparelhamentos possui uma decomposição em orelhas canônica.*

Prova. Seja G um grafo coberto por emparelhamentos. Suponha que para algum i construímos o subgrafo bom coberto por emparelhamentos G_i de G. Se $V(G_i) \neq V(G)$ então seja α uma aresta unindo $V(G_i)$ a $V(G) - V(G_i)$. Seja M_i um emparelhamento perfeito de G_i e M_α um emparelhamento perfeito de G que contém α. Assim, $M_i \oplus M_\alpha$ consiste de uma coleção de circuitos disjuntos nos vértices e de uma coleção de caminhos $P_1, \dots, P_k$ ligando vértices em $V(G_i)$. Se $V(G_i) = V(G)$ mas G_i não contém todas as arestas de G sejam $P_1, \dots, P_k$ os caminhos que constam das aretas de $E(G) - E(G_i)$. É claro que o grafo

[1] Aaaarrrghh!

$G_i + P + 1 + \cdots + P_k$ é bom e coberto por emparelhamentos. Vamos mostrar que G_{i+1} pode ser construído adicionando-se no máximo dois destes caminhos a G_i. Para $i = 1, \ldots, k$ seja α_i a aresta ligando as duas pontas de P_i. É evidente que $G_i + P_1 + \cdots + P_k$ é coberto por emparelhamentos se, e só se, $G_i + \alpha_1 + \cdots + \alpha_k$ é coberto por emparelhamentos. Agora, basta aplicar o Lema **??**. $\square$

Lema 4.2. *Seja G um grafo elementar e $F \subseteq E(\overline{G})$. Se $\phi(G+F) > \phi(G)$ então existe $J \subseteq F$ tal que $|J| \leq 2$ e $\phi(G+J) > \phi(G)$.*

Prova. Tome $J \subseteq F$ minimal tal que $\phi(G+J) > \phi(G)$. Se $|J| \leq 2$ não há nada a provar. Suponha que $|J| \geq 3$. Sejam α_1, α_2 e α_3 arestas duas a duas distintas em J. Então $\phi((G + (J - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3)) + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) > \phi(G)$. Pelo Lema 4.3, existem α_i e α_j[2] com $1 \leq i \leq j \leq 3$ tal que $\phi(G + (J - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3)) + \alpha_i + \alpha_j) > \phi(G)$. Porém, isto contraria a minimalidade de J. $\square$

Lema 4.3. *Seja G um grafo elementar e α_1, α_2 e α_3 arestas duas a duas distintas em $E(\overline{G})$ tais que $G + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ possui um emparelhamento perfeito que contém α_1, α_2 e α_3. Suponha que, para cada i, o grafo $G + \alpha_i$ não possui um emparelhamento perfeito que contém α_i. Então, para cada i, existe um $j \neq i$ tal que $G + \alpha_i + \alpha_j$ possui um emparelhamento perfeito que contém α_i e α_j.*

Prova. Suponha que o grafo $G' := G + \alpha_1 + \alpha_2$ não possui emparelhamento perfeito contendo α_1 e α_2. Mostraremos que existe um emparelhamento perfeito de $G + \alpha_1 + \alpha_3$ que contém α_1 e α_3. Seja M um emparelhamento perfeito de $G + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ que contém α_1, α_2 e α_3. Denote por x_i e y_i as pontas de α_i.

Fato 1. *Existe uma barreira maximal B de G' contendo x_1 e y_1.*

Mostraremos, inicialmente, que o grafo $G' - x_1 - y_1$ não possui emparelhamento perfeito. Suponha que $G' - x_1 - y_1$ possui emparelhamento perfeito M'. Então $M := M' + \alpha_1$ é um emparelhamento perfeito de G'. Se M contém a aresta α_2 então M é um emparelhamento perfeito de G' que contém α_1 e α_2 o que é uma contradição. Se M não contém α_2 então M é um emparelhamento perfeito de $G + \alpha_1$ que contém α_1. Novamente, uma contradição. Portanto, $G' - x_1 - y_1$ não possui emparelhamento perfeito, ou seja, α_1 não é permitida em G'. Logo, pelo Teorema **??**, existe uma barreira maximal B de G' que contém x_1 e y_1, o que completa a prova do Fato 1.

Fato 2. *α_2 está num dos componentes críticos de $G' - B$.*

Agora, toda aresta de G' com exatamente uma ponta em X é permitida. Então, ou ambas as pontas de α_2 estão em B ou ambas as pontas de α_2 estão num componente de $G' - B$. Suponha que $x_2, y_2 \in B$. Agora, seja $B' := B - x_1 - y_1 - x_2 - y_2$. Temos que

$$q(G' - x_1 - y_1 - x_2 - y_2 - B') = |B'| + 4$$

donde

$$q(G' + \alpha_3 - x_1 - y_1 - x_2 - y_2 - B') \geq |B'| + 2$$

[2]Observe que α_i e α_j podem ser iguais.

ou seja, $G' + \alpha_3 - x_1 - y_1 - x_2 - y_2$ não possui emparelhamento perfeito, o que é uma contradição pois $M - \alpha_1 - \alpha_2$ é um emparelhamento perfeito deste grafo. Portanto, α_2 está num dos componentes críticos de $G' - B$.

Fato 3. *Sejam $D_1, \ldots, D_{|B|}$ os componentes críticos de $G' - B$. Então (i) x_3 e y_3 estão em componentes críticos distintos de $G' - B$ e (ii) exatamente uma aresta de M está na cofronteira de cada D_i.*

Seja $B' := B - x_1 - y_1$. Então $q(G' - x_1 - y_1 - B') = |B'| + 2$. Note que $M - \alpha_1$ é um emparelhamento perfeito do grafo $G' + \alpha_3 - x_1 - y_1$ o que implica que $q(G' + \alpha_3 - x_1 - y_1 - B') = |B'|$, ou seja, α_3 une componentes críticos distintos de $G' - B$. Isto prova (i). Denote por D_1 e D_2 os componentes de $G' - B$ que contêm x_3 e y_3 respectivamente. Para estabelecer (ii), basta notar que o grafo $G' - x_1 - y_1 - D_1 - D_2$ possui emparelhamento perfeito $M - \alpha_1 - \alpha_3 - E(D_1) - E(D_3)$. Logo, cada D_i com $i \geq 3$ possui exatamente uma aresta de M em sua cofronteira. Isto completa a prova de (ii) uma vez que D_1 e D_2 contêm α_3 em sua cofronteira.

Fato 4. *Seja G'' o grafo $G + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$. Então α_3 está na cofronteira do componente crítico de $G' - B$ que contém α_2.*

Denote por β_i a aresta de M que está na cofronteira de D_i. Mostraremos que $\beta_1 = \alpha_3$. Suponha que não. Então β_1 tem uma ponta em D_1 e a outra em B. No entanto, B é uma barreira maximal de $G + \alpha_2$ o que implica que β_1 é uma aresta permitida de $G + \alpha_2$, ou seja, existe um emparelhamento perfeito M_1 de $G + \alpha_2$ que contém α_2. Agora, $M_1 - E(D_1) + (M \cap E(D_1))$ é um emparelhamento perfeito de $G + \alpha_2$ que contém α_2, o que é uma contradição. Portanto, $\beta_1 = \alpha_3$.

Fato 5. *Seja H o grafo $D_1 - x_3$. Então $H - \alpha_2$ possui emparelhamento perfeito.*

Suponha que $H - \alpha_2$ não possui emparelhamento perfeito. Tome uma barreira maximal X de $H - \alpha_2$. Temos que $q(H - \alpha_2 - X) \geq |X| + 2$. Considere, agora, o conjunto de vértices $B' := B + X + x_3$. Então

$$q((G + \alpha_3) - B') \geq q(G - B) - 1 + |X| + 2 = |B'|,$$

ou seja, B' é uma barreira maximal de $G + \alpha_3$. No entanto, a aresta α_3 é permitida em $G + \alpha_3$, o que contraria a hipótese de que α_3 proibida em $G + \alpha_3$. contradição. Concluímos, então, que $H - \alpha_2$ possui emparelhamento perfeito.

Agora, é fácil construir um emparelhamento perfeito de $G + \alpha_1 + \alpha_3$ contendo α_1 e α_3. Basta tomar o conjunto de arestas $(M \cap E(G'' - H)) + M_2$ onde M_2 é um emparelhamento perfeito de $H - \alpha_2$. □

5. Decomposição em orelhas ótima

Um subgrafo H de um grafo G é um *subgrafo forte* de G se existe $X \subseteq V(H)$ tal que (i) cada componente ímpar de $H - X$ é crítico, (ii) o grafo bipartido associado ao par H, X é elementar e (iii) ou $G = H$ ou X separa $G - H$ de $H - X$.

Lema 5.1. *Seja G um grafo conexo. Suponha que para um conjunto de vértices B, o grafo $G - B$ possui pelo menos $|B|$ componentes críticos. Então existe um subgrafo forte H de G com base $X \subseteq B$ tal que os compoenentes críticos de $G - X$ são componentes críticos de $G - B$.*

Prova. Seja K o grafo bipartido associado ao par G, B e seja D a outra classe da bipartição de K. Claramente, é suficiente mostrar que K possui um subgrafo forte. A prova é por indução em $|D|$.

Suponha, primeiro, que $|\Gamma_K(Z)| \geq |Z|$ para toda parte Z de D. Então, pelo Teorema de Hall, H possui um emparelhamento M que satura D. Mas, $|B| \leq |D|$ donde M é um emparelhamento perfeito de K. Agora, vamos mostrar como obter um subgrafo forte de K. Dentre todas as partes não-vazias Z de D tais que $|\Gamma_K(Z)| = |Z|$ escolha uma minimal. É fácil ver que uma tal parte, digamos Y, existe. Para ver que $K[Y \cup \Gamma_K(Y)]$ é um subgrafo forte de K e consequentemente de G basta verificar que $|\Gamma_K(Z)| \geq |Z| + 1$ para todo subconjunto próprio não-vazio Z de Y. Mas, isto é evidente em virtude da minimalidade de Y.

Suponha, agora, que $|\Gamma_K(Z)| \geq |Z|$ para toda parte própria Z de D e $|B| < |D|$ (se $|B| = |D|$ estamos de volta ao primeiro caso) então existe um emparelhamento M que satura $D - d$ para todo d em D. Portanto, $|B| = |D| - 1$ e podemos aplicar a hipótese de indução ao grafo $K' := K[(D-d) \cup B]$ para obtermos um subgrafo forte de K' que também é um subgrafo forte de K.

Suponha, finalmente, que $|\Gamma_K(Z)| < |Z|$ para alguma parte própria D de Z. Então, por hipoótese de indução, o grafo $K[Z \cup \Gamma_K(Z)]$ possui um subgrafo forte H que é um subgrafo forte de K. □

Corolario 5.2. *Seja G um grafo não-crítico e B uma barreira forte de G. Então existe um subgrafo forte H de G com base $X \subseteq B$ tal que os componentes críticos de $H - X$ são componentes críticos de $G - B$.*

Teorema 5.3 (Frank). *Um grafo não é crítico se, e somente se, possui um subgrafo forte.*

Prova. Seja G um grafo que possui um subgrafo forte H com base X. Mostraremos que, para todo x em X, o grafo $G' := G - x$ não possui emparelhamento perfeito. Seja H' o grafo $H - x$ e X' o conjunto $X - x$. Então $q(H' - X') = |X'| + 1$. Agora, como X separa $G - H$ de $H - X$ segue que

$$q(G - X) = q(G' - X') \geq q(H - X) = q(H' - X') = |X'| + 1.$$

Portanto, X' viola a condição de Tutte em G', ou seja, G' não tem emparelhamento perfeito.

Reciprocamente, suponha que G não é crítico. Tome uma barreira maximal X de G. Como G não é crítico $X \neq \emptyset$. Portanto, pelo Corolário 5.2, G possui um subgrafo forte H com base $B \subseteq X$. □

Teorema 5.4 (Frank). *Seja G um grafo não-crítico e H um subgrafo forte de G. Então $\varphi(G/H) = \varphi(G) - 1$.*

6. Um teorema estrutural para grafos quase-críticos

Nesta seção, trataremos somente de grafos quase-críticos, isto é, grafos G com $\varphi(G) = 1$. Para um grafo quase-crítico G, denotaremos por G^φ o grafo induzido pelas arestas α de G tais que $\varphi(G \times \alpha) = 0$.

Lema 6.1. *Seja G um grafo com emparelhamento perfeito. Seja H um subgrafo de G induzido pelo conjunto de vértices de um dos componentes conexos do grafo induzido pelas arestas permitidas de G. Se G/H é crítico então cada componente conexo de $G - H$ possui vizinhos em no máximo uma barreira maximal de H.*

Prova. Seja F um emparelhamento perfeito de $G/H - H$ e J um emparelhamento perfeito de H. Claramente, $M := J \cup F$ é um emparelhamento perfeito de G. Suponha, por contradição, que exista um componente conexo K de $G - H$ que possua vizinhos em pelo menos duas barreiras maximais de H. Sejam $B_1, \ldots, B_k$ ($k \geq 2$) tais barreiras. Atribua cor verde a cada aresta com uma ponta em B_1 e a outra em K e cor branca a cada aresta com uma ponta em $B_2 \cup \cdots \cup B_k$ e a outra em K. Note que, pela definição de H, $\nabla(H, K)$ não contém arestas permitidas. O Lema 3.4 aplicado ao bloco L de G/H que contém K garante a existência de uma decomposição em orelhas ímpar de L tal que a primeira orelha Q contém uma aresta verde $\alpha = b_1k_1$ e uma aresta branca $\beta = b_2k_2$ onde $b_1 \in B_1, b_2 \in B_2 \cup \cdots \cup B_k$ e $k_1, k_2 \in V(K)$. Claramente, $\{b_1, k_1\} \cap \{b_2, k_2\} = \emptyset$. Sabemos que B_1 é uma barreira maximal assim b_2 está num componente crítico de $H - B_1$. Além disso, existe um caminho M-alternante ímpar P de b_1 até b_2. No entanto, $P + Q$ é um circuito M-alternante de G o que implica que $M \oplus (P \cup Q)$ é um emparelhamento perfeito de G que inclui α e β, ou seja, α e β são permitidas. Contradição. $\square$

O próximo teorema relaciona o conjunto de arestas permitidas de um grafo com $E(G^\varphi)$. Antes de apresentarmos o teorema, vamos fazer uma observação simples. Suponha que G é um grafo quase-crítico e *elementar*. Seja F o conjunto das arestas permitidas de G. Então para cada aresta α de F existe uma decomposição em orelhas ótima de G tal que a primeira orelha (que é par) usa α. Logo, $\alpha \in E(G^\varphi)$. Agora, seja $\beta \in E(G) - F$. Se $\beta \in E(G^\varphi)$ então, por definição, existe uma decomposição em orelhas ótima de G tal que a primeira orelha é par e usa β; no entanto, isto claramente implica que β é uma aresta permitida, o que é uma contradição. Portanto, $E(G^\varphi)$ coincide com o conjunto das arestas permitidas de G que neste caso possui um único componente. Agora, estamos prontos para apresentar o teorema estrutural para grafos quase-críticos prometido no início desta seção.

Teorema 6.2 (Szigeti). *Seja G um grafo quase-crítico. Então*

(i) *$E(G^\varphi)$ coincide com o conjunto de arestas de um dos componentes conexos do grafo induzido pelas arestas permitidas de G,*

(ii) *G^φ é coberto por emparelhamentos e $G/E(G^\varphi)$ é crítico,*

(iii) *$V(G^\varphi) = \bigcap\{V(H) : H$ é um subgrafo forte de $G\}$,*

(iv) *cada componete conexo de $G - S$ tem vizinhos em exatamente uma barreira maximal de H, onde S é o grafo $G[V(G^\varphi)]$ (note que isto é verdade também para G^φ no lugar de S),*

(v) *$V(G^\varphi) = \{y \in V(G) :$ para todo $x \in V(G), y \notin C(G - x)\}$.*

Prova. (i) e (ii). Pelo Teorema 5.3, G possui um subgrafo forte H com base X. Seja C a união dos componentes pares de $G - X$. O lema acima garante que não existe nenhuma aresta de G^φ em $G - (V(H) - X)$, ou seja, $E(G^\varphi) \subseteq E(G - C - E(G[X]))$. Agora, X é uma barreira forte o que, em virtude do Teorema 1.2, implica que C e $G - C$ possuem emparelhamento perfeito. Sendo assim, o conjunto das arestas permitidas de $G - C$ é um subconjunto das arestas permitidas de G. Seja $G' := G$ e considere o seguinte processo iterativo: se G' possui um subgrafo forte H com base X tal que $G' - X$ possui algum componente par ou $E(G[X]) \neq \emptyset$ então remova os componentes pares de $G' - X$ e as arestas de G' com ambas as pontas em X. Seja G'' o grafo assim obtido. Comece nova iteração com G'' no papel de G'. Após o término deste processo iterativo, o grafo G' obtido satiasfaz:

Fato 1. *Para toda barreira B de G' o grafo $G' - B$ não possui componentes pares.*

Suponha, por contradição, que G' possua algum componente par. Como na prova do Teorema 1.2 podemos estender B para uma barreira forte X de G' de tal modo que cada componente par $G' - B$ esteja incluído em algum componente par de $G' - X$. Logo, pelo Corolário 5.2, existe um subgrafo forte H de G' com base $Y \subseteq X$ tal que $\mathcal{D}(H - Y) \subseteq \mathcal{D}(G' - X)$. Claramente, $G' - Y$ possui pelo menos um componente par, o que contraria a construção de G'.

O Fato 1 aliado ao Teorema 2.3 implicam que G' é elementar. Vem daí que $\mathcal{P}(G')$ — a coleção das barreiras maximais de G' — é uma partição de $V(G')$. Ademais, temos que:

Fato 2. *$E(G'[B]) = \emptyset$ para todo $B \in \mathcal{P}(G')$.*

Para ver isto, basta observar que como G' é elementar o único subgrafo forte de G' é ele próprio e, além disso, podemos escolher qualquer uma de suas barreiras maximais como base.

Dos Fatos 1 e 2 vem que G' é coberto por emparelhamentos. Assim, $E(G^{\varphi})$ está incluído em um dos componentes conexos das arestas permitidas de G.

O seguinte fato completa a prova de (i) e (ii).

Fato 3. *Se K é um componente conexo das arestas permitidas de G que contém uma aresta extrema para φ em G então toda aresta de K é extrema para φ em G.*

Seja $\alpha \in E(K) \cap E(G^{\varphi})$. O grafo K é coberto por emparelhamentos logo, existe uma decomposição em orelhas ótima $\mathcal{P}$ de K tal que a primeira orelha (par) contém α. Agora, $\mathcal{P}\times\alpha$ é uma decomposição em orelhas ímpar de $K\times\alpha$, ou seja, $K\times\alpha$ é crítico. Como $G\times\alpha$ é crítico e $K\times\alpha$ é um subgrafo bom de $G\times\alpha$ segue que o grafo $G\times\alpha/K\times\alpha = G/K$ é crítico e, portanto, possui uma decomposição em orelhas ímpar $\mathcal{Q}$. Seja, agora, β uma aresta de K. Tome uma decomposição em orelhas ótima $\mathcal{R}$ de $K\times\beta$ tal que a primeira orelha contenha β. Claramente $\mathcal{R}\times\beta + \mathcal{Q}$ é uma decomposição em orelhas ímpar de $G\times\beta$. Isto implica que $\beta \in E(G^{\varphi})$, o que completa a prova do fato.

(iii). Seja $U := \bigcap\{V(H) : H$ é um subgrafo forte de $G\}$. É claro que $V(G^{\varphi}) \subseteq U$. Vamos mostrar que $U \subseteq V(G^{\varphi})$. Seja $v \in U$ e α uma aresta permitida de G incidente em v (existe pois G tem emparelhamento perfeito). Seja $G' := G/\alpha$ e v_α o novo vértice de G'. Claramente, G' possui um emparelhamento quase perfeito que deixa v_α livre. Suponha que G' não é crítico. Então, pelo Teorema de Gallai-Edmonds, temos que $A(G') \neq \emptyset$ e $v_\alpha \in D(G')$. Mas, $A(G')$ é uma barreira forte de G' donde, em virtude do Corolário 5.2, existe um subgrafo forte de G' que não contém v_α. Agora, é fácil ver que H é um subgrafo forte de G que não contém v. Porém, isto contraria $v \in U$. Logo, G' é crítico, isto é, $\alpha \in E(G^{\varphi})$. Portanto, $v \in V(G^{\varphi})$.

(iv). Por (ii), G^{φ} é coberto por emparelhamentos donde S é elementar; ademais, o grafo G/S é crítico. Agora, o resultado segue aplicando-se o Lema 6.1.

(v). Seja Y o conjunto $\{y \in V(G) : \text{ para todo } x \in V(G), y \notin C(G-x)\}$. Vamos mostrar que $V(G^\varphi) \subseteq Y$. Seja $y \in V(G^\varphi)$ e suponha que exista um vértice x de G tal que $y \in C(G-x)$. Então

Fato 4. *$Z := A(G-x) + x$ é uma barreira forte de G.*

Seja M um emparelhamento perfeito de G e α uma aresta de M incidente em x; seja y a outra ponta de α. É claro que $M - \alpha$ é um emparelhamento máximo de $G - x$ donde $y \in D(G-x)$. Pelo Teorema de Gallai-Edmonds, $M - \alpha$ satura $A(G-x)$. Segue daí que M satura Z. Agora, observe que $\mathcal{D}(G-Z) = \mathcal{D}(G-x-A(G-x))$ e, pelo Teorema de Gallai-Edmonds, cada componente de $\mathcal{D}(G-x-A(G-x))$ é crítico. Isto completa a prova de que Z é barreira forte de G.

Como $y \in C(G-x)$ segue, pela definição de Z, que y está num componente par de $G-Z$. Pelo Corolário 5.2, existe um subgrafo forte H de G com base $X \subseteq Z$ tal que os componentes críticos de $G-X$ são componentes críticos de $G-Z$ e $G-X$ possui um componente par contendo y. No entanto, isto contraria (iii) porque y está na intersecção de todos os subgrafos fortes de G.

Agora, vamos mostrar que $V(G^\varphi) \supseteq Y$. Seja $y \in Y$ e suponha que $y \notin V(G^\varphi)$. Seja α uma aresta permitida incidente em y. Como $y \notin V(G^\varphi)$ então $\alpha \notin E(G^\varphi)$. Portanto, $\varphi(G/\alpha) \geq 1$. Pelo Teorema de Gallai-Edmonds temos que $A(G/\alpha) \neq \emptyset$ e o novo vértice de G/α está em $D(G/\alpha)$. De fato, tome um emparelhamento perfeito M de G que contenha α. Então $M - \alpha$ é um emparelhamento máximo de G/α que expõe o novo vértice de G/α. Ademais, $|A(G/\alpha)| = |D(G/\alpha)| - 1$. Seja, então, $X := A(G/\alpha)$. Claramente, X é uma barreira forte de G pois $\operatorname{def}_G(X) = 0$ e cada componente ímpar de $G - X$ é crítico; observe que $y \in \mathcal{C}(G-X)$. Ainda mais, $X - x$ é uma barreira forte de $G - x$ para todo x em X. Portanto, em virtude do Teorema 1.2, todo emparelhamento máximo de $G - x$ satura y donde $y \in C(G-x)$. Porém, isto contraria a escolha de y. Assim, $y \in V(G^\varphi)$. □

7. O lema dos cortes justos

Um grafo G é *bicrítico* se $G - u - v$ tem emparelhamento perfeito para todo par u, v de vértices distintos de G; em outras palavras, G é saturado e coberto por emparelhamentos. Um *brick*[3] é um grafo bicrítico e 3-conexo.

Seja S um conjunto de vértices de um grafo G. O corte $\nabla(S)$ é *ímpar* se $|S|$ é ímpar. O corte $\nabla(S)$ é *trivial* se $|S| = 1$ ou $|V - S| = 1$.

Seja G um grafo com emparelhamento perfeito. Um corte ímpar é *justo* se contém exatamente uma aresta de cada emparelhamento perfeito de G. Para um corte $\nabla(S)$, um emparelhamento perfeito M é *gordo para S* se $|\nabla(S) \cap M| \geq 2$. Note que $|\nabla(S) \cap M| \equiv |S| \pmod 2$.

Teorema 7.1. *Seja $\nabla(S)$ um corte ímpar não-trivial de um brick G. Então existe um emparelhamento perfeito que é gordo para S.*

Vamos ilustrar brevemente a prova do teorema. Suponha que exista um corte justo não-trivial $\nabla(S)$. É fácil ver que $G[S]$ e $G[V(G) - S]$ são ambos conexos. Escolha S tal que $\nabla(S)$ é um corte justo não-trivial e $|S|$ é mínimo. Temos dois casos a analisar; forneceremos aqui a visão geral de um deles.

[3]Não tenho coragem de traduzir.

Caso 1. Existe v em S tal que $\nabla(v) \cap \nabla(S) \geq 2$.
A seguinte afirmação constitui o coroção da prova do Caso 1.

> *Seja G um brick e v um de seus vértices. Remova qualquer conjunto de no máximo $\deg(v) - 2$ arestas incidentes em v e denote por $\tilde{G}$ o grafo assim obtido. Seja U o conjunto dos vértices adjacentes a v em G que não são adjaventes a v em $\tilde{G}$. Então (i) $\tilde{G}$ é quase-crítico, (ii) $v \in V(\tilde{G}^\varphi)$ e (iii) existe u em U tal que $u \in V(\tilde{G}^\varphi)$.*

Agora, seja $\tilde{G}$ o grafo obtido de G removendo-se os vizinhos de v em $V - S$. Seja $T := S + v$. Pela afirmação acima, $\tilde{G}$ é quase-crítico e $v \in V(\tilde{G}^\varphi)$. Também pela afirmação acima existe um vizinho u de v em $V - S$ tal que $u \in V(\tilde{G}^\varphi)$. Agora, o grafo $\tilde{G}^\varphi$ é conexo donde $\nabla(T)$ contém uma aresta permitida α de $\tilde{G}$. Seja M um emparelhamento perfeito que contém α. Como v em $\tilde{G}$ tem vizinhos somente em S segue que a aresta de M que satura v tem a outra ponta em S, ou seja, M é gordo para S.

8. O MATRÓIDE

Para um grafo 2-aresta-conexo G, seja $\mathcal{I}(G)$ a coleção das arestas F de G tais que $\varphi(G \times F) = \varphi(G) - |F|$. Nesta seção mostraremos que $\mathcal{I}(G)$ corresponde aos conjuntos independentes de um matróide.

Teorema 8.1 (Szigeti). *Seja G um grafo com $\varphi(G) = 1$ e F uma parte de $E(G)$ tal que $\varphi(G \times F) = 0$. Então F contém uma aresta α para a qual $\varphi(G \times \alpha) = 0$.*

Prova. A demonstração é por indução em $|V(G)|$. Note que o teorema é trivial para grafos cobertos por emparelhamentos pois todas as suas arestas são extremas para φ. Suponha, agora, que G não é coberto por emparelhamentos. Então G não é bicrítico. Como $\varphi(G) = 1$ segue que G tem emparelhamento perfeito. Seja X uma barreira maximal de G. Os componentes de $G - X$ são críticos e, ademais, $|X| \geq 2$ porque G não é bicrítico. Tome um subgrafo forte H com base $Y \subseteq X$ tal que os componentes críticos de $G - Y$ são componentes críticos de $G - X$ cuja existência é garantida pelo Lema 5.1. Se F contém alguma aresta α com uma ponta em Y e a outra em $H - Y$ então $\alpha \in E(G^\varphi)$. Suponha, assim, que F não contém nenhuma aresta com uma ponta em Y e a outra em $H - Y$. Sejam $D_1, \ldots, D_{|Y|}$ os componentes críticos de $H - Y$. Seja $D_i^* := G/(G - D_i)$ e $F_i := E(D_i) \cap F$.

Fato 1. *Existe i tal que $D_i \times F_i$ é par.*
Se, para todo i, $D_i \times F_i$ fosse ímpar então $H \times F$ é um subgrafo forte de $G \times F$, o que é uma contradição com o Teorema 5.3.

Fato 2. *Existe i tal que $D_i \times F_i$ possui emparelhamento perfeito.*
Suponha que não. Para cada i tal que $D_i \times F_i$ é par tome uma de suas barreiras maximais B_i. É claro que $q(D_i \times F_i - B_i) \geq |B_i| + 2$. Considere o conjunto $Z := X \cup \bigcup (B_i : D_i \times F_i \text{ é par})$. Então $q(G \times F - Z) \geq |Z| + 1$ o que contraria $G \times F$ crítico.

Fato 3. *O grafo $K := D_i^* \times F_i$ é crítico.*
Suponha que K não é crítico. Seja v_i o novo vértice de K. Como $D_i \times F_i$ tem emparelhamento perfeito e K é ímpar segue que v_i é exposto por pelo menos um emparelhamento máximo de K. Agora, em virtude do Teorema de Gallai-Edmonds, temos que $v_i \in D(K)$.

Além disso, como K não é crítico vem que $A(K) \neq \emptyset$. Seja L o componente crítico de $K - A(K)$ que contém v_i. Logo, existe um subgrafo forte H' no grafo induzido pelo conjunto de vértices $A(K) \cup (D(K) - V(L))$. No entanto, H' também é um subgrafo forte de $G \times F$. Contradição, pois $G \times F$ é crítico. $\square$

Teorema 8.2 (Szigeti). *Seja G um grafo com $\varphi(G) = k$ e $F \subseteq E(G)$ uma floresta de G tal que $\varphi(G \times F) = 0$. Então existe um subconjunto J de F satisfazendo $|J| = k$ e $\varphi(G \times J) = 0$.*

Prova. A demonstração é por indução em k. O teorema é trivialmente verdadeiro para $k = 0$. Suponha, então, $k > 0$ e que o teorema seja verdadeiro para todos os grafos G' com $\varphi(G') = k - 1$. Seja G um grafo com $\varphi(G) = k$. Seja α uma aresta extrema para φ em G. Se $\alpha \in F$ aplicando-se a hipótese de indução sobre o par $G \times \alpha, F - \alpha$ o teorema segue. Suponha que $\alpha \notin F$. Seja $G' := G \times \alpha$ e sejam α_1 e α_2 as duas novas arestas em G'. Então $\varphi(G') = k - 1$ e

$$\varphi((G \times \alpha) \times (F + \alpha_1)) = \varphi(((G \times \alpha) \times \alpha_1) \times F) = \varphi(((G \times F) \times \alpha) \times \alpha_1) = \varphi(G \times F) = 0.$$

Por hipótese de indução, existe um subconjunto de arestas $F_1 \subseteq F + \alpha_1$ tal que $|F_1| = k - 1$ e $\varphi(G' \times F_1) = 0$. Afirmamos que $F_1 \subseteq F$. Suponha que não, então F_1 inclui α_1 e $\varphi(((G \times \alpha) \times \alpha_1) \times (F_1 - \alpha_1)) = 0$. Entretanto, isto implica que $\varphi(G \times (F_1 - \alpha_1)) = 0$ e, assim, $|F_1 - \alpha_1| = k - 2$. Logo, $\varphi(G) \leq k - 2$, o que é uma contradição. Portanto, $F_1 \subset F$. Ademais, $|F_1| = k - 1$ e $\varphi(G \times F_1) = 1$. Como $\varphi(G \times F) = 0$ ou, equivalentemente, $\varphi((G \times F_1) \times (F - F_1)) = 0$. Logo, pelo teorema acima, existe $\beta \in F - F_1$ tal que $\varphi((G \times F_1) \times \beta) = 0$. Tome $J := F_1 + \beta$. Então $J \subseteq F$, $|J| = k$ e $\varphi(G \times J) = 0$. $\square$

Teorema 8.3 (Szigeti). *Para um grafo 2-aresta-conexo G, a coleção $\mathcal{I}(G)$ constitui os conjuntos independentes de um matróide.*

Prova. A demonstração é por indução em $\varphi(G)$. O resultado é trivial para $\varphi(G) = 1$. Suponha que $\varphi(G) = k$ ($k \geq 2$) e que o resultado seja válido para grafos G' com $\varphi(G') < k$. Seja $M := \{F \subseteq E(G) : \varphi(G \times F) = \varphi(G) - |F|\}$. Sejam $F_1, F_2 \in M$ e $\beta \in F_1 - F_2$. Mostraremos que existe $\alpha \in F_2 - F_1$ tal que $F_1 - \beta + \alpha \in M$. Temos os seguintes casos:

Caso 1 $F_1 \cap F_2 \neq \emptyset$.

Seja $\gamma \in F_1 \cap F_2$ e $G' := G \times \gamma$. Então $\varphi(G') = \varphi(G) - 1$ e $F_1' := F_1 - \gamma$ e $F_2' := F_2 - \gamma$ são conjuntos de arestas extremas para φ em G'. Por hipótese de indução, existe $\alpha \in F_2' - F_1'$ tal que $(F_1' - \beta) + \alpha$ é um conjunto de arestas extremas para φ em G', isto é, $F_1 - \beta + \alpha \in M$.

Caso 2 $F_1 \cap F_2 = \emptyset$.

Seja $G' := G \times (F_1 - \beta)$ e para cada $\gamma \in F_1 - \beta$ denotaremos por γ_1 e γ_2 as duas arestas em G' correspondentes a γ. Seja $T := \{\gamma_1 : \gamma \in F_1 - \beta\}$. Então $\varphi(G') = \varphi(G \times (F_1 - \beta)) = 1$ e $\varphi(G' \times (F_2 \cup T)) = 0$. O Teorema 8.2 implica que existe uma aresta $\alpha \in F_2 \cup T$ tal que $\varphi(G' \times e) = 0$. Ainda mais, $\alpha \in F_2 - F_1$; caso contrário, se $\alpha = \gamma_1$ para alguma aresta $\gamma \in F_1 - \beta$ então $\varphi(G \times (F_1 - \beta - \gamma)) = 0$ o que é uma contradição com $\varphi(G) = k$. Portanto, $\varphi(G \times (F_1 - \beta + \alpha)) = 0$, ou seja, $F_1 - \beta + \alpha \in M$. $\square$

Referências

[1] A. Ageev. On finding the maximum number of disjoint cuts in Seymour graphs. *Algorithms—ESA '99 (Prague),* 490–497, Lecture Notes in Comput. Sci., 1643, Springer, Berlin, 1999.

[2] A. Ageev. Complexity of the determination of the maximum weighted joining in a graph, (Russian) *Diskretn. Anal. Issled. Oper. Ser. 1 4,* 3(81): 3–8, 1997.
[3] A. Ageev, A. V. Kostochka, Z. Szigeti. A characterization of Seymour graphs, *Journal of Graph Theory,* 24(4): 357–364, 1997.
[4] A. Ageev e A. V. Kostochka. Vertex set partitions preserving conservativeness, preprint.
[5] M. H.Çarvalho. Decomposição ótima em orelhas para grafos matching-covered. Tese de Doutorado, Universidade de Campinas, 1996.
[6] M. H. Carvalho, C. L. Lucchesi e U. S. R. Murty. Ear decompositions of matching covered graphs. *Combinatorica* 2(19): 151–174, 1999.
[7] J. Cheriyan, A. Sebö e Z. Szigeti. An improved approximation algorithm for minimum size 2-edge connected spanning subgraphs, *Integer programming and combinatorial optimization (Houston, TX, 1998),* 126–136, Lecture Notes in Comput. Sci., 1412, Springer, Berlin, 1998.
[8] J. Edmonds. Paths, trees and flowers. *Canadian Journal of Mathematics,* (17):449–467, 1965.
[9] J. Edmonds, L. Lovász e W. R. Pulleyblank. Brick decompositions and the matching rank of graphs, *Combinatorica,* (2):246–274, 1982.
[10] J. Edmonds e E. Johnson. Matching, euler tours and the chinese postman. *Mathematical Programming,* (5):88–124, 1973.
[11] A. Frank. Packing paths in graphs, *Combinatorica,* (10):329–335, 1990.
[12] A. Frank. Packing paths, circuits and cuts — a survey, *Paths, flows and VLSI-Layouts,* (eds.: B. Korte, L. Lovász, H. J. Prömel e A. Schrijver), 1990, Springer-Verlag, 47–100.
[13] A. Frank. Conservative weightings and ear-decompositions of graphs. *Combinatorica,* (13): 65–81, 1993.
[14] A. Frank, A. Sebő e É. Tardos. Covering directed and odd cuts. *Mathematical Programming Study,* (22):99–112, 1984.
[15] A. Frank, Z. Szigeti. On packing T-cuts. *Journal of Combinatorial Theory Series B,* (61):263–271, 1994.
[16] A. Frank e A. Szigeti. A note on packing paths in planar graphs. *Mathematical Programming Series A,* 2(70):201–209, 1995.
[17] A. Frank, T. Jordán e Z. Szigeti. On strongly conservative weightings, preprint.
[18] A. S. Fraenkel e M. Loebl. Complexity of circuit intersection in graphs, preprint 1991.
[19] P. Feofiloff e C. Lucchesi. *Algoritmos para igualdades minimax em grafos.* VI Escola de Computação, Campinas, 1988.
[20] A. M. H. Gerards. On shortest T-joins and packing of T-cuts, *Journal of Combinatorial Theory Series B,* (55):73–82, 1992.
[21] M. Guan. Graphic programming using odd and even points, *Chinese Mathematics,* (1): 273-277, 1962.
[22] L. Lovász. 2-matchings and 2-covers of hypergraphs, *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae,* (26)433-444, 1975.
[23] L. Lovász, M. D. Plummer, *Matching Theory,* North Holland, Amsterdan 1986.
[24] E. Korach e M. Penn. Tight integral duality in the chinese postman problem. *Mathematical Programming,* (55):183–191, 1992.
[25] E. Korach. Two-trees optimal T-join and integral packing of T-cuts, *Journal of Combinatorial Theory Series B,* (62):1–10, 1994.
[26] M. Middendorf e F. Pfeiffer. On the complexity of the edge-disjoint path problem. *Combinatorica,* (13):96–108, 1993.
[27] M. L. Rey. *T-junções, T-cortes e funções conservativas.* Dissertação de Mestrado do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo, 1999.
[28] A. Sebő. Finding the t-join structure of graphs. *Mathematical Programming,* (36):123–134, 1986.
[29] A. Sebő. A quick proof of Seymour's theorem on t-joins. *Discrete Mathematics,* (64):101-103 (1987).
[30] A. Sebő. The Schrijver system of odd join polyhedra. *Combinatorica,* (8):103-116, 1988.
[31] A. Sebő. Undirected distances and the postman-structure of graphs. *Journal of Combinatorial Theory, Series B,* (49):10–39, 1990.
[32] A. Sebő. Potentials in undirected graphs and planar multiflows. *SIAM Journal of Computing,* 26(2):582–603, 1997.
[33] P. D. Seymour, The matroids with the max-flow min-cut property, *Journal of Combinatorial Theory Series B,* (23):189–222, 1977.

[34] P. D. Seymour, On odd cuts and plane multicommodity flows, *Proc. London Math. Soc. Ser. (3),* (42): 178–192, 1981.

[35] Z. Szigeti, On Seymour graphs, Technical report, Department of Computer Science, Eőtvős Loránd University, Budapest, 1993.

[36] Z. Szigeti, On Lovász's Cathedral Theorem, *Proceedings of the third conference on integer programming and combinatorial optimization,* eds.: G. Rinaldi e L. A. Wolsey, 413–423, 1993.

[37] Z. Szigeti, On a matroid defined by ear-decompositions of graphs, *Combinatorica,* 16(2):233–241, 1996.

[38] Z. Szigeti, On optimal ear-decompositions of graphs. *Integer programming and combinatorial optimization (Graz, 1999),* 415–428, Lecture Notes in Comput. Sci., 1610, Springer, Berlin, 1999.