SEQUÊNCIAS DE NÚMEROS REAIS

1. Sequências de Cauchy

Vimos que, no caso de sequências monótonas e limitadas, podemos mostrar convergência, mesmo sem conhecer o limite. Esse resultado porém, apesar de muito útil, só se aplica para esse tipo especial de sequências. Veremos agora um critério necessário e suficiente para convergência, aplicável, em princípio, para sequências arbitrárias.

Definição 1.1. *Dizemos que a sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy se, dado $\epsilon > 0$, existe $N_0 = N_0(\epsilon)$ tal que para quaisquer $n, m \geq N_0$ temos $|x_n - x_m| < \epsilon$.*

Exemplos 1.2.
1. *Mostre que $x_n := 1/n$ é sequência de Cauchy.*
2. *Mostre que $x_n := 1/\sqrt{n}$ é sequência de Cauchy.*

Proposição 1.3. *Toda sequência convergente $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é sequência de Cauchy.*

Dem: Suponhamos que $\lim_{n\to\infty} x_n = L$. Dado $\epsilon > 0$, seja n_0 tal que

$$n \geq n_0 \implies |x_n - L| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Então, se $n, m \geq n_0$, tem-se

$$|x_n - x_m| \leq |x_n - L + Lx_m| \leq |x_n - L| + |x_m - L| < \epsilon.$$

$\square$

Queremos agora provar a recíproca da proposição 1.6. Para isto, entretanto, vamos precisar de alguns resultados preliminares.

Date: March 25, 2025.

Proposição 1.4. *Toda sequência de Cauchy é limitada.*

Dem: Seja $\epsilon = 1$ e N_0 tal que para quaisquer $n, m \geq N_0$ temos $|x_n - x_m| < \epsilon$. Então temos, se $n \geq N_0$:

$$|x_n - x_{N_0}| < 1 \implies |x_N| < 1 + |x_{N_0}|$$

Agora, se $M = \max\{x_n : n < N_0\}$, teremos, para todo $n \in \mathbb{N}$:

$$|x_n| \leq \max\{M, x_n : n \geq N_0\} \leq \max\{M, 1 + |x_{N_0}|\}.$$

$\square$

Para o resultado a seguinte vamos precisar a **completividade** de $\mathbb{R}$.

Teorema 1.5. *(Bolzano-Weirstrass) Toda sequência limitada $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de números reais possui uma subsequência convergente.*

Dem: Seja sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sequência limitada e $A := \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ e $I_0 = [a_0, b_0]$ um intervalo fechado contendo os pontos $x_n, n \in \mathbb{N}$. Seja $m_0 = a_0 + \frac{b_0 - a_0}{2}$ o ponto médio do intervalo I_0. Então um dos intervalos $[a_0, m_0]$, $[m_0, b_0]$ tem que conter um número infinito de pontos da sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Denotemos por $I_1 = [a_1, b_1]$ tal intervalo. Então $I_1 \subset I_0$ e I_1 contém um número infinito de pontos da sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Agora, se $I_0 \supset I_1 \supset I_2 \cdots \supset I_n$ são intervalos fechados, $I_k = [a_k, b_k], k = 1, 2, \cdots n$, cada qual contendo um número infinito de pontos da sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, construimos $I_{n+1} = [a_{n+1}, b_{n+1}]$ usando o mesmo procedimento descrito para I_0. Teremos então uma sequência infinita de intervalos fechados $I_0 \supset I_1 \supset I_2 \cdots \supset I_n \cdots$ cada qual contendo um número infinito de pontos da sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Escolhamos, para cada $k \in \mathbb{N}$ um ponto x_{n_k} contido em I_k. Pelo Teorema dos Intervalos encaixados, a interseção desses intervalos $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$ é não vazia. Como $|I_k| := |b_k - a_k| \to 0$, essa interseção contem apenas um ponto, o qual denotaremos por a.

Agora, dado $\epsilon > 0$, escolhendo k_0, tal que $|I_{n_{k_0}}| < \epsilon$, teremos para todo $k \geq k_0$ que os pontos x_{n_k} e a pertencem ambos ao intervalo $I_{n_{k_0}}$ e, portanto $|x_{n_k} - a| < \epsilon$. □

Podemos agora provar a recíproca da proposição 1.3 **para sequências de números reais**.

Teorema 1.6. *Se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy de números reais, então $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente.*

Dem: Pela proposição 1.4, a sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada e então, pelo Teorema 1.5, possui uma subsequência x_{n_k} com $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = L$.. Sejam n_0 tal que $n, m \geq n_0 \implies |x_n - x_m| < \epsilon/2$ e $|x_n - a| < \epsilon/2$. Daí, obtemos

$$|x_n - a| \leq |x_n - x_{n_0} + x_{n_0} - a| \leq |x_n - x_{n_0}| + x_{n_0} - a| < \epsilon.$$

□

Observação 1.7. *Para a prova do Teorema 1.6 usamos, de maneira essencial, a completividade de $\mathbb{R}$. De fato, esse resultado é equivalente ao axioma da completividade*