

SEQUÊNCIAS DE NÚMEROS REAIS

1. LIMITES INFINITOS

Em certos casos, a sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **diverge** porque seus termos "se aproximam" de $+\infty$ ou de $-\infty$. Mais precisamente, temos as seguintes definições:

Definição 1.1.

- (1) Dizemos que a sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **tende** para $+\infty$ (ou **diverge** para $+\infty$), se para todo número real M , existe $n_0 = n_0(M)$ de tal forma que $x_n > M$ para todo $n \geq n_0$.
- (2) Dizemos que a sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **tende** para $-\infty$ (ou **diverge** para $-\infty$), se para todo número real M , existe $n_0 = n_0(M)$ de tal forma que $x_n < M$ para todo $n \geq n_0$.

No primeiro caso, escrevemos $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ e, no segundo $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$ (note entretanto que a sequência **diverge** em ambos os casos).

Usando uma notação mais simbólica.

- (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty \Leftrightarrow \forall M \in \mathbb{R}, \exists n_0(M) : n \geq n_0 \Rightarrow x_n > M$.
- (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty \Leftrightarrow \forall M \in \mathbb{R}, \exists n_0(M) : n \geq n_0 \Rightarrow x_n < M$.

Diremos que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge propriamente, se $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ ou $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$.

Exemplos 1.2.

- (1) A sequência $x_n := n$, $n \in \mathbb{N}$ diverge para $+\infty$, ou seja, $\lim_{n \rightarrow \infty} n = +\infty$.
- (2) A sequência $x_n := -n^3$, $n \in \mathbb{N}$ diverge para $-\infty$, ou seja, $\lim_{n \rightarrow \infty} -n^3 = -\infty$.

(3) A sequência $x_n := a^3$, $n \in \mathbb{N}$ diverge para $+\infty$, se $a > 1$ e é divergente mas não é propriamente divergente se $a < -1$.

Nos exemplos (2) e (3), usamos implicitamente o seguinte argumento de comparação:

Proposição 1.3. *Sejam $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ duas sequências de números reais satisfazendo:*

$$x_n \leq y_n \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Então temos:

a) Se $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$, então $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = +\infty$.

b) Se $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = -\infty$, então $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$.

Dem: (a) Dado $M \in \mathbb{R}$, seja n_0 tal que $n \geq n_0 \implies x_n > M$. Então, como $y_n \geq x_n$, o mesmo vale para y_n , ou seja $n \geq n_0 \implies y_n \geq x_n > M$.

A demonstração de (b) é análoga. □

Observe-se que os resultados de comparação ainda valem se a hipótese é satisfeita apenas para $n \geq n_0$, para algum $n_0 \in \mathbb{N}$. Frequentemente, a comparação é feita apenas "no limite", usando o seguinte resultado.

Proposição 1.4. *Sejam $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ duas sequências de números reais positivos, satisfazendo:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n/y_n) = L$$

Então temos:

a) Se $L = 0$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$, então $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = +\infty$.

b) Se $L = +\infty$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = +\infty$, então $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$.

c) Se $0 < L < +\infty$ então $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = +\infty \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$.

Dem: Vamos provar (c), as outras ficam para a leitora ou leitor. Se $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n/y_n) = L > 0$ então existe n_1 tal que $n \geq n_1 \implies (x_n/y_n) \geq \frac{L}{2} > 0$.

Dado então $M \in \mathbb{R}$, se $y_n > \frac{2M}{L}$ para $n \geq n_2$, tomando $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, teremos, para $n \geq n_0$

$$x_n = (x_n/y_n) \cdot y_n > L/2 \cdot \frac{2M}{L} = M.$$

□

Exemplo 1.5. *Mostre que $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n^2 - 2n + 1} = +\infty$.*

Observe-se que as notações $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$ são usadas por conveniência, propriedades válidas para limites usuais (finitos), e em particular, propriedades algébricas, podem não valer para esses limites. Entretanto, ainda valem algumas dessas.

Proposição 1.6. *Propriedades algébricas para limites infinitos*

- a) *Se $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ e $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada inferiormente, então $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = +\infty$.*
- b) *Se $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ e $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} > c > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ então $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot y_n) = +\infty$.*
- c) *Se $x_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ então $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (1/x_n) = +\infty$.*
- d) *Se $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada e $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = +\infty$ então $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n/y_n = 0$.*

- e) *Sejam x_n e y_n sequências de termos estritamente positivos. Se $x_n > c > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$ então $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n/y_n = +\infty$.*

Dem:

□

Observação 1.7. *Resultados análogos valem se substituirmos $+\infty$ por $-\infty$ na proposição 1.6*

- *Outras propriedades aritméticas seguem facilmente da proposição 1.6. Por exemplo, segue do item b) que se $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ e $\lim y_n > 0$ então $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot y_n) = +\infty$.*

Observação 1.8. *(Indeterminações). Se $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = -\infty$, nada se pode afirmar, em geral sobre $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n)$. Dizemos que $+\infty + (-\infty)$ é uma **indeterminação**. Outros casos de indeterminação são: $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$ e $0/0$.*

Exemplos 1.9.

- (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = 0$,
- (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} (n - n^2) = -\infty$.

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n^2} = +\infty, \text{ se } a > 1.$$

$$(4) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n!} = 0.$$