SEQUÊNCIAS DE NÚMEROS REAIS

1. Propriedades do limite de sequências

1.1. Propriedades básicas.

Proposição 1.1. *O limite de uma sequência* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, se existir, é único.*

Dem: Suponhamos que $\lim_{n\to\infty} x_n = L_1$ e $\lim_{n\to\infty} x_n = L_2$. Dado $\epsilon > 0$, existem n_1 e n_2, tais que
$n \geq n_1 \implies |x_n - L_1| < \frac{\epsilon}{2}$ e $n \geq n_1 \implies |x_n - L_1| < \frac{\epsilon}{2}$. Se $n_0 = \max n_1, n_2$, teremos então, para todo $n \geq n_0$:

$$|L_1 - L_2| = |L_1 - x_n + x_n - L_2| \leq |x_n - L_1| + |x_n - L_2| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Portanto, o módulo da diferença entre L_1 e L_2 é menor que qualquer número positivo, e concluímos que $L_1 = L_2$.

□

Proposição 1.2. *Uma sequência* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge para um limite* a *se e somente se, toda sua subsequência* $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ *converge para o mesmo limite* a*.*

Dem: Imediata, a partir das definições. □

Exemplo 1.3. *A sequência* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *do exemplo (4) diverge,pois a sequência dos índices pares* $(x_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ *converge para* 1 *e a sequência dos índices ímpares* $(x_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ *converge para* -1*.*

Date: March 18, 2025.

Observação 1.4. *Um caso particular importante de subsequência é a **cauda** $(x_n)_{n\geq n_0}$ de uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Neste caso, a sequência convergirá se e somente se qualquer uma de suas caudas convergir. Como consequência, a propriedade de convergência (ou não) não se altera se alteramos um número finito de termos da sequência.*

Proposição 1.5. *Toda sequência convergente é limitada.*

Dem: Suponhamos que $\lim_{n\to\infty} x_n = a$. Então, existe n_0 tal que $n \geq n_0 \implies |x_n - L| < 1 \implies |x_n| = |x_n - L + L| < |L| + 1$. Por outro lado, o conjunto $A = \{|x_n| : n < n_0\}$ é finito, portanto existe $M = \max A \in \mathbb{R}$. Segue que

$$|x_n| < M + |L| + 1, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

□

Proposição 1.6. ***Propriedades algébricas*** *Se* $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ *e* $\lim_{n\to\infty} y_n = b$, *então:*

a) $\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = a + b$, $\lim_{n\to\infty}(x_n - y_n) = a - b$.
b) $\lim_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = a \cdot b$.
c) $\lim_{n\to\infty}(x_n/y_n) = a/b$, *se* $b \neq 0$.

Dem: Vamos provar o ítem b). Suponhamos que Suponhamos que $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ e $\lim_{n\to\infty} x_n = a$. Da proposição 1.5, sabemos que existe$M \geq 0 \in \mathbb{R}$, tal que $x_n \leq M$ e $y_n \leq M$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Podemos supor $M \geq a$. Dado $\epsilon > 0$. seja n_0 tal que $|x_n - a| < \frac{\epsilon}{2M}$ e $|y_n - b| < \frac{\epsilon}{2M}$, para todo $n \geq n_0$.

Se $n \geq n_0$, teremos então

$$\begin{aligned}|x_n \cdot y_n - (a \cdot b)| &\leq |x_n y_n - a y_n + a y_n - ab| \leq |(x_n - a)||y_n| + a|y_n - b| \\ &< M \cdot \frac{\epsilon}{2M} + a\frac{\epsilon}{2M} < \epsilon\end{aligned}$$

□

Exemplo 1.7. *Calcular* $\lim_{n\to\infty} \frac{3n+5}{2n+3}$.

Observação 1.8. *Os resultados da proposição 1.6 podem ser estendidos para um número finito de sequências, por indução.*

Proposição 1.9. *(Permanência de sinal) Se* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é uma sequência convergente tal que* $x_n \geq 0$, *para todo* $n \in \mathbb{N}$, *então* $\lim_{n\to\infty}(x_n) \geq 0$.

Dem: Suponhamos que $\lim_{n\to\infty}(x_n) = a < 0$.. Escolhendo $\epsilon = \frac{-a}{2}$, obtemos que $|x_n - a| < \frac{-a}{2}$, para n suficientemente grande. Mas então, $a + fraca2 < x_n < a - \frac{a}{2} \implies x_n < \frac{a}{2} < 0$, contra a hipótese de positividade. $\square$

Observação 1.10. *Na proposição 1.9 basta supor que* $x_n \geq 0$, *para* n *suficientemente grande. A contrapositiva é também frequentemente útil. Se* $\lim_{n\to\infty}(x_n) < 0$ *então* $x_n < 0$ *para* n *suficientemente grande.*

Corolário 1.11. *Sejam Sejam* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *e* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sequências convergentes. Então*

(1) *Se* $x_n \leq y_n$, *para todo* $n \in \mathbb{N}$, *então* $\lim_{n\to\infty}(x_n) \leq \lim_{n\to\infty}(y_n)$.
(2) *Se* $x_n \leq b$ $(\geq a)$, *para todo* $n \in \mathbb{N}$, *então* $\lim_{n\to\infty}(x_n) \leq b$ $(\geq a)$.

Dem: *Para (1), basta considerar a sequência diferença* $y_n - x_n$ *e usar a prop 1.9 . (2) segue imediatamente de (1) com* $y_n = c$, *para todo* $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Teorema 1.12. *(Teorema do Confronto) Sejam Sejam* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *e* $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sequências de números reais tais que*

$$x_n \leq y_n \leq z_n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}$$

.

Então, se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ são convergentes para o mesmo limite L, então $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ também é convergente e

$$\lim_{n\to\infty}(y_n) = L.$$

Dem: Dado $\epsilon > 0$, seja $n_1 \in \mathbb{N}$ e $n_2 \in \mathbb{N}$ tais que $n \geq n_1 \Rightarrow |x_n - L| < \epsilon$ e $n \geq n_1 \Rightarrow |z_n - L| < \epsilon$.

Então, se $n \geq n_0 := \max\{n_1, n_2\}$, teremos: $y_n \leq z_n < L + \epsilon$ e $y_n \geq x_n > L - \epsilon$. Segue que $-\epsilon < y_n - L < \epsilon \Rightarrow |y_n - L| < \epsilon$ $\square$

Observação 1.13. *Em vista da observação 1.4, as hipóteses nos resultados acima não precisam ser verificados para todo $n \in \mathbb{N}$, basta verificá-las para $n \geq n_0$, $n_0 \in \mathbb{N}$.*

Corolário 1.14. *Sejam $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sequências de números reais.*

- *Se $\lim_{n\to\infty} |x_n| = 0$, então $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente e $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.*
- *Se $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada então a sequência produto $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $z_n := x_n \cdot y_n$ é convergente e $\lim_{n\to\infty} z_n = 0$.*

Exemplos 1.15. (1) *Mostre que $\lim_{n\to\infty}(\frac{sen\, n}{n}) = 0$.*

(2) *Mostre que, se $0 \leq a < 1$ então $\lim_{n\to\infty} a^n = 0$.*

(3) *Suponha que n_n é uma sequência de números positivos e $x_{n+1} \leq ax_n$, com $0 \leq a < 1$. Mostre que $\lim_{n\to\infty}(x_n) = 0$.*

Proposição 1.16. *Se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente, então a sequência dos valores absolutos $(|x_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente e $\lim_{n\to\infty} |x_n| = |\lim_{n\to\infty} x_n|$.*

Dem:

$\square$

1.2. **Sequências monótonas.** Nos exemplos anteriores, mostramos a convergência de sequências, sabendo (ou conjecturando) previamente o valor do limite. No caso de sequências monótonas, proém é possível muitas vezes demonstrar a convergência sem conhecer previamente o limite.

Teorema 1.17. *Seja* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *uma sequência monótona crescente e limitada superiormente por* M. *Então* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é convergente e* $\lim_{n\to\infty} x_n \leq M$.

Analogamete, se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *uma sequência monótona decrescente e limitada inferiormente por* m. *Então* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é convergente e* $\lim_{n\to\infty} x_n \geq m$.

Dem: *Da hipótese, segue que o conjunto* $A := \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ *é limitado superiormente por* M. *Portanto, existe* $S \leq M$ *o supremo de* A. *Mostraremos que* $\lim_{n\to\infty} x_n = S$.

Dado $\epsilon > 0$, *existe então* x_{n_0} *em* A *tal que* $S - \epsilon < x_{n_0}$. *Como* $x_n \geq x_{n_0}$, *para* $n \geq n_0$, *teremos* $n \geq n_0 \Rightarrow S - \epsilon < x_n \leq S < S + \epsilon \Rightarrow |x_n - S| < \epsilon$. □

Exemplos 1.18. (1) *Mostre que* $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$.

(2) *Seja* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *a sequência definida recursivamente por* $x_1 = 1$, $x_{n+1} = \sqrt{2x_n}$, *para* $n \geq 1$. *Mostre que* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é convergente e calcule seu limite.*

(3) *Seja* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *a sequência definida recursivamente por* $x_1 = 2$, $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{2}{x_n})$, *para* $n \geq 1$. *Mostre que* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é convergente e calcule seu limite.*