

SEQUÊNCIAS DE NÚMEROS REAIS

1. INTRODUÇÃO

Uma sequência de números reais é uma ‘lista ordenada’

$$(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots)$$

de números reais.

A definição precisa é a seguinte:

Definição 1.1. *Uma sequência de números reais é uma função $x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$.*

Em geral escrevemos x_n em vez de $x(n)$, e também denotamos por $x := (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots)$, ou $x := (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ou, simplesmente por $x := (x_n)$ a sequência x .

- Exemplos 1.2.** (1) *A sequência constante: $x := (2, 2, \dots, 2, \dots)$, ou seja, $x_n := 2$, para todo $n \in \mathbb{N}$.*
- (2) *A sequência dos números naturais pares: $x := (2, 4, 6, \dots, 2n, \dots)$, ou seja, $x_n := 2n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.*
- (3) *A sequência $x_n := 1/2^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, ou seja, $x := (1, 1/2, 1/2^2, \dots, 1/2^n, \dots)$.*
- (4) *A sequência $x_n := (-1)^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, ou seja, $x := (-1, 1, -1, \dots, (-1)^n, \dots)$.*
- (5) *A sequência $x_n := (-1)^n \cdot n^2$ para todo $n \in \mathbb{N}$, ou seja, $x := (-1, 4, -9, \dots)$.*
- (6) *A sequência $x_n := (-1)^{n+1}/2^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, ou seja, $x := (1, -1/2, 1/4, -1/8, \dots)$.*

(7) A sequência definida **por recorrência**:

$$\begin{cases} x_1 := \sqrt{2}, \\ x_{n+1} := \sqrt{2 + x_n} \text{ para } n \geq 2. \end{cases}$$

(8) A sequência de Fibonacci, definida por recorrência:

$$\begin{cases} x_1 := 1, x_2 := 1; \\ x_{n+2} := x_n + x_{n+1} \text{ para } n \geq 3. \end{cases}$$

Algumas definições que serão úteis:

Definição 1.3. Dizemos que a sequência (de números reais) $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é:

- (1) **limitada superiormente** se existir $b \in \mathbb{R}$, tal que $x_n \leq b$, para todo $n \in \mathbb{N}$.
- (2) **limitada inferiormente** se existir $a \in \mathbb{R}$, tal que $a \leq x_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.
- (3) **limitada**, se for limitada superiormente e inferiormente, ou seja, se existirem $a, b \in \mathbb{R}$, tais que $a \leq x_n \leq b$, para todo $n \in \mathbb{N}$.
- (4) **monótona crescente** ou **monótona não decrescente** se $x_n \leq x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Se $x_n < x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, diremos que a sequência é **monótona estritamente crescente**. Analogamente, definimos **monótona decrescente** e **monótona estritamente decrescente**.

Definição 1.4. Se $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência e $\mathbb{N}' := \{n_1 < n_2 < n_3 < \dots < n_k\}$ é um subconjunto infinito de $\mathbb{N}$, dizemos que a restrição de x a $\mathbb{N}'$ é uma **subsequência** de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, que será denotada por $(x_{n_i})_{i \in \mathbb{N}}$ ou $(x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3}, \dots, x_{n_i}, \dots)$.

Observação 1.5. A rigor, $(x_{n_i})_{i \in \mathbb{N}}$ não é uma sequência, pois não tem domínio $\mathbb{N}$, mas vamos identificá-la com a sequência: $y_i := (x_{n_i})_{i \in \mathbb{N}}$. Por exemplo, se $n_i = 2i$, $i \in \mathbb{N}$, e $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é a

sequência do exemplo (4) acima, então $(x_{n_i})_{i \in \mathbb{N}}$ será identificada com a sequência constante $(1, 1, 1, \dots)$.

Exercício 1.6. *Determine se as sequências do exemplo 1.1 são limitadas superiormente, limitadas inferiormente, monótonas crescentes ou decrescentes.*

2. LIMITES DE SEQUÊNCIAS

Consideremos a sequência $x_n := 1/2^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, ou seja, $x := (1, 1/2, 1/2^2, \dots, 1/2^n, \dots)$, obtida dividindo cada termo pela metade, para obter o termo seguinte. Os seus termos $x_n = 1/(2^n)$ ficam arbitrariamente próximos do 0 quando n aumenta. Dizemos então que a sequência **converge** para 0.

A definição precisa é a seguinte:

Definição 2.1. *Dizemos que a sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **converge** para o número real a se, para todo $\epsilon > 0$, existe um número natural $n_0 = n_0(\epsilon)$ de tal forma que $|x_n - a| < \epsilon$, sempre que $n \geq n_0$.*

Nesse caso, escreveremos $\lim x_n = a$ ou $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ ou $x_n \rightarrow a$, quando $n \rightarrow \infty$.

Definição 2.2. *Dizemos que a sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **converge**, se ela converge para algum número real a . Caso contrário, diremos que a sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **diverge**.*

Usando símbolos lógicos, a condição para $\lim x_n = a$ pode ser escrita na forma:

$$\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : n > n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \epsilon.$$

Observação 2.3.

- *Lembremos que $|x_n - a| < \epsilon$ se e somente se $a - \epsilon < x_n < a + \epsilon$, se e somente se $x \in]a - \epsilon, a + \epsilon[$. Ou seja, $\lim x_n = a$ se e somente se, para qualquer $\epsilon > 0$, x_n pertence ao intervalo aberto*

$I_{a,\epsilon}$ simétrico de raio ϵ em torno de a , para n suficientemente grande.

- Dizemos que x está ϵ -próximo de a , se $x \in]a - \epsilon, a + \epsilon[$. Temos então que $\lim x_n = a$ se, para todo $\epsilon > 0$, x_n está ϵ -próximo de a para n suficientemente grande.
- Dizemos que V_a é uma **vizinhança** de $a \in \mathbb{R}$ se V_a contém algum intervalo aberto $]a - \epsilon, a + \epsilon[$ centrado em a . Temos então que $\lim x_n = a$ se e somente se, para toda vizinhança V_a de a , x_n pertence a V_a , para n suficientemente grande.

Para demonstrar que uma sequência converge primeiro fazemos uma conjectura sobre qual deve ser o limite a e então procuramos mostrar que, de fato, para **todo** ϵ fornecido, é possível encontrar $n_0 = n_0(\epsilon)$ correspondente para o qual **todos os valores da sequência** a partir daí ficam ϵ -próximos de a . Antes de fazer uma prova formal, vamos considerar alguns exemplos de forma intuitiva.

Exemplos 2.4.

- (1) A sequência constante: $x := (2, 2, \dots, 2, \dots)$, ou seja, $x_n := 2$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Nesse caso, um candidato evidente para o limite é o valor constante da sequência $a = 2$.

- (2) A sequência dos números naturais pares: $x := (2, 4, 6, \dots, 2n, \dots)$, ou seja, $x_n := 2n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Nesse caso, os valores da sequência aumentam indefinidamente, de modo que ela não se aproxima de nenhum valor limite.

- (3) A sequência $x_n := 1/2^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, ou seja, $x := (1, 1/2, 1/2^2, \dots, 1/2^n, \dots)$.

Nesse caso, os valores da sequência são todos positivos, mas são diminuem em progressão geométrica a cada passo. Uma conjectura razoável é que o limite seja $a = 0$.

- (4) A sequência $x_n := (-1)^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, ou seja, $x := (-1, 1, -1, \dots, (-1)^n, \dots)$.

Aqui, os valores da sequência oscilam indefinidamente entre -1 e 1 e, assim, ela não se aproxima de nenhum valor fixo.

- (5) A sequência $x_n := (-1)^n \cdot n^2$ para todo $n \in \mathbb{N}$, ou seja, $x := (-1, 4, -9, \dots)$.

Esta sequência também oscila mas assume valor absoluto maior a cada passo.

- (6) A sequência $x_n := (-1)^{n+1}/2^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, ou seja, $x := (1, -1/2, 1/4, -1/8, \dots)$.

Temos novamente oscilação em torno do 0, mas com valor absoluto diminuindo em progressão geométrica. É razoável conjecturar que a sequência convirja para $a = 0$.

- (7) A sequência definida **por recorrência**:

$$\begin{cases} x_1 := \sqrt{2}, \\ x_{n+1} := \sqrt{2 + x_n} \text{ para } n \geq 2. \end{cases}$$

Os primeiros termos da sequência são; $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots$, a sequência parece estar aumentando cada vez mais rapidamente e o limite não deve existir.

- (8) A sequência de Fibonacci, definida por recorrência:

$$\begin{cases} x_1 := 1, x_2 := 1; \\ x_{n+2} := x_n + x_{n+1} \text{ para } n \geq 3. \end{cases}$$

Vamos agora fazer uma prova formal em alguns exemplos simples.

Exemplos 2.5.

(1) *A sequência constante: $x := (2, 2, \dots, 2, \dots)$.*

(2) *A sequência $x_n := 1/n$.*

(3) *A sequência $x_n := 1/2^n$.*

(4) *A sequência $x_n := \frac{2n+3}{3n+1}$.*

(5) *A sequência $x_n := (-1)^{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$.*

(6) *A sequência $x_n := 2n$, $n \in \mathbb{N}$.*

