2a. Lista de exercícios para entregar de MAT0206

1^o. semestre de 2025

1. Sejam x e y números irracionais, e suponha que $x^2 - y^2$ é um racional não nulo. Mostre que $x+y$ e $x-y$ são ambos irracionais.
2. Diz-se que uma função $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é limitada superiormente quando sua imagem $f(A)$ for um conjunto 0 limitado superiormente e escrevemos $\sup f = \sup f(A)$. Prove que, se $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ forem limitadas superiormente, então $f + g : A \to \mathbb{R}$ é limitada superiormente e tem-se $\sup(f+g) \leq \sup f + \sup g$. Dê um exemplo no qual $\sup(f+g) < \sup f + \sup g$.
3. Calcule, caso exista, $\lim_{n\to\infty} x_n$ nos casos abaixo,
   (a) $x_n = \frac{n^3+3n+1}{4n^3+5}$,
   (b) $x_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$,
   (c) $x_n = (1+\frac{2}{n})^n$ (admita que $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e$),
   (d) $x_n = (1-\frac{2}{n})^n$,
   (e) $x_n = \text{ sen } \frac{1}{n}$,
   (f) $x_n = \frac{\text{sen n}}{n}$,
   (g) $x_n = n(1-\cos\frac{1}{n})$,
4. Suponha que toda subsequência de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tem uma subsequência que converge para 0. Mostre que $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.
5. O método babilônico para o cálculo de raí zes. Seja $a > 0$ e defina a sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ por $x_0 > 0$, $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + a/x_n)$.
   a) Mostre que $x_n^2 > a$, Para $n \geq 2$.
   b) Mostre que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é decrescente para $n \geq 2$.
   c) Mostre que $\lim_{n\to\infty} x_n = \sqrt{a}$.