

2a. Lista de Exercícios de MAT0206

1^o. semestre de 2025

1. Se $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n} = a$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n-1} = a$, prove que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.
2. Calcule $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n$ para todos os valores possíveis de a (sugestão: para $a > 1$ escreva $a = (1 + h)^n$, para $0 < a < 1$ escreva $a = 1/(1 + h)^n$ e use a desigualdade de Bernoulli).
3. Calcule:
 - (a) $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{1/n}$ para todos os valores possíveis de a . (sugestão: para $a > 1$ escreva $a = (1 + h_n)^n$ e use a expansão binomial).
 - (b) Calcule $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{1/n}$.
4. Mostre que:
 - (a) $\lim_{n \rightarrow \infty} (2n)^{1/n} = 1$.
 - (b) Se $0 < a < 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} na^n = 0$.
 - (c) $\lim_{n \rightarrow \infty} (n^2/n!) = 0$.
 - (d) $\lim_{n \rightarrow \infty} (2^n/n!) = 0$.
5. Calcule, caso exista $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ nos casos abaixo,
 - (a) $x_n = \frac{n^3+3n+1}{4n^3+5}$,
 - (b) $x_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$,
 - (c) $x_n = (1 + \frac{2}{n})^n$ (admita que $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e$),
 - (d) $x_n = (1 - \frac{2}{n})^n$,
 - (e) $x_n = \sin \frac{1}{n}$,
 - (f) $x_n = \frac{\sin n}{n}$,
 - (g) $x_n = n(1 - \cos \frac{1}{n})$,
 - (h) $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$,

$$(i) \ x_n = \begin{cases} \frac{1}{k} & \text{se } n = 2k, \text{ para algum } k \in \mathbb{R} \\ \frac{1}{2k+1} & \text{se } n = 2k+1, \text{ para algum } k \in \mathbb{R} \end{cases}$$

6. Sejam $a, b > 0$ e considere a sequência $x_n = \sqrt[n]{a^n + b^n}$. Prove que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \max\{a, b\}$.
7. Mostre que toda sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, admite uma subsequência monótona e use este resultado para mostrar que toda sequência de Cauchy de números reais converge para um número real.
8. Seja $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência limitada e, para cada $n \in \mathbb{N}$ defina $s_n := \sup\{x_k : k \geq n\}$ e $t_n := \inf\{x_k : k \geq n\}$. Mostre que $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ são monótonas e convergentes. Mostre que se $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} t_n$ então $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é convergente. ($\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n$ são denominados, respectivamente o **limite superior** e **limite inferior** da sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$).
9. Suponha que toda subsequência de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tem uma subsequência que converge para 0. Mostre que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.
10. Mostre que a sequência $x_n = \sqrt{n}$ satisfaz $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_{n+1} - x_n| = 0$, mas não é sequência de Cauchy.
11. Dizemos que uma sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é **propriamente divergente** se $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ ou $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$. Mostre que se $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é sequência não limitada, então admite uma subsequência propriamente divergente.
12. A sequência $\frac{\sin n}{n}$ é propriamente divergente?
13. Seja $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sequência propriamente divergente e $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n$ existe. Mostre que $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para 0.
14. Sejam $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sequências de números positivos tais que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n / y_n = 0$. Mostre que
 - (a) Se $\lim x_n = +\infty$ então $\lim y_n = +\infty$

(b) Mostre que, se $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada, então $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$

15. Sejam $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sequências de números positivos tais que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n/y_n = +\infty$. Mostre que

(a) Se $\lim y_n = +\infty$ então $\lim x_n = +\infty$

(b) Mostre que, se $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada, então $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$

16. Dizemos que a sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é **contrativa** se existe uma constante $0 < C < 1$ talque

$$|x_{n+2} - x_{n+1}| \leq C|x_{n+1} - x_n|,$$

para $n \in \mathbb{N}$

a) Mostre que toda sequência contrativa é de Cauchy (portanto convergente).

b) Mostre que a sequência definida por: $x_1 = 1/2$, $x_{n+1} = \frac{1}{7}(x_n^3 + 2)$ para $n \in \mathbb{N}$ é contrativa.

c) Sendo $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a sequência definida em b), mostre que $r = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ é raiz da equação: $x^3 - 7x + 3$.

17. Uma demonstração de que o limite $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ existe. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

a) Mostre que se $a, b \in \mathbb{R}$ e $0 \leq a < b$, então

$$\frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{b - a} < (n+1)b^n.$$

b) Deduza que $b^n[(n+1)a - nb] < a^{n+1}$, para todos $n \in \mathbb{N}$ e $a, b \in \mathbb{R}$ com $0 \leq a < b$.

c) Use $a = 1 + 1/(n+1)$ e $b = 1 + 1/n$ na parte b) para demonstrar que $\{a_n\}$ é crescente.

d) Use $a = 1$ e $b = 1 + 1/(2n)$ na parte b) para demonstrar que $a_{2n} < 4$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

e) Use as partes c) e d) para concluir que $a_n < 4$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

18. O método babilônico para o cálculo de raízes. Seja $a > 0$ e defina a sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ por $x_0 > 0$, $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + a/x_n)$.
- a) Mostre que $x_n^2 > a$, Para $n \geq 2$.
 - b) Mostre que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é decrescente para $n \geq 2$.
 - c) Mostre que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sqrt{a}$.
19. Prove o Princípio dos Intervalos Encaixantes usando o Teorema de Bolzano-Weierstrass

Exercícios adicionais

1. Decida se cada uma das sequências abaixo é convergente ou divergente, calculando o limite no caso convergente.

$$1) 0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \dots$$

$$3) \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{3}{4}, \frac{1}{8}, -\frac{7}{8}, \dots$$

$$5) c_k = \frac{\sqrt{k} + 1}{k - 1}, k \geq 2$$

$$7) a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$$

$$9) a_n = \frac{2n}{n+1} - \frac{n+1}{2n}$$

$$11) a_n = \frac{\sin n}{n}$$

$$13) a_n = \frac{2n + \sin n}{5n + 1}$$

$$15) a_n = \sqrt[n]{n^2 + n}$$

$$17) a_n = \frac{3^n}{2^n + 10^n}$$

$$19) a_n = \frac{(n+1)^n}{n^{n+1}}$$

$$21) a_n = \frac{n!}{n^n}$$

$$23) a_n = (-1)^n + \frac{(-1)^n}{n}$$

$$25) a_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

$$27) a_n = \frac{1}{n} \cdot \frac{1.3.5\dots(2n-1)}{2.4.6\dots(2n)}$$

$$29) a_n = \frac{n^\alpha}{e^n}, \alpha \in \mathbb{R}$$

$$31) a_n = \sqrt[n]{n!}$$

$$33) a_n = \left(\frac{n-1}{n}\right)^n$$

$$35) a_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{\sqrt{n}}$$

$$37) a_n = \left(\frac{3n+5}{5n+1}\right)^n \left(\frac{5}{3}\right)^n$$

$$2) 1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{4}, 1, \frac{1}{8}, 1, \frac{1}{16}, \dots$$

$$4) a_n = \left(4 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$6) a_n = \frac{n^3 + 3n + 1}{4n^3 + 2}$$

$$8) a_n = \frac{n + (-1)^n}{n - (-1)^n}$$

$$10) a_n = n(\sqrt{n^2 + 1} - n)$$

$$12) a_n = \sin n; b_n = \sin(n\pi); c_n = \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

$$14) a_n = \frac{(n+3)! - n!}{(n+4)!}$$

$$16) a_n = \frac{n \sin(n!)}{n^2 + 1}$$

$$18) a_n = \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n$$

$$20) a_n = na^n, a \in \mathbb{R}$$

$$22) a_n = n - n^2 \sin \frac{1}{n}$$

$$24) a_n = \sqrt[n]{a^n + b^n} \text{ onde } 0 < a < b$$

$$26) a_n = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$$

$$28) a_n = \sqrt[n]{n}$$

$$30) a_n = \frac{\ln(n)}{n^a}, a > 0$$

$$32) a_n = \sqrt[n]{a}, a > 0$$

$$34) a_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$$

$$36) a_n = \left(\frac{3n+5}{5n+11}\right)^n$$

$$38) a_n = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n$$

2. Sejam $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ seqüências numéricas. Decida se cada afirmação abaixo é verdadeira ou falsa. Justifique sua resposta.

- (1) Se $a_n \rightarrow a$ então $|a_n| \rightarrow |a|$.
- (2) Se $|a_n| \rightarrow |a|$ então $a_n \rightarrow a$.
- (3) Se $a_n \rightarrow a$ e $a_n \leq 0$ então $a \leq 0$.
- (4) Se $a_n \rightarrow a$ e $a_n > 0$ então $a > 0$.
- (5) Se $a_n \rightarrow a$ e $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ não converge então $(a_n + b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ não converge.
- (6) Se $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ não convergem então $(a_n + b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ não converge.
- (7) Se $a_n \cdot b_n \rightarrow d$ então $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergem.
- (8) Se $a_n \cdot b_n \rightarrow 0$ então ou $a_n \rightarrow 0$ ou $b_n \rightarrow 0$

3. Considere a seqüência $a_1 = \sqrt{2}$, $a_2 = \sqrt{2\sqrt{2}}$, $a_3 = \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}$, Verifique que a seqüência é crescente e limitada superiormente por 2 e calcule seu limite.

4. Seja a seqüência definida por recorrência da seguinte forma: $x_1 = \sqrt{2}$ e $x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}$, para $n \in \mathbb{N}$, com $n \geq 2$. Mostre que a seqüência é limitada e crescente. Obtenha o seu limite.

5. (i) Diz-se que um ponto B de um segmento $\overline{OA}$ divide este segmento na *razão áurea* se $\frac{OA}{OB} = \frac{OB}{BA}$. (Diz-se também que B divide o segmento OA em *média e extrema razão*) Denota-se por φ a razão $\frac{OA}{OB}$. Mostre que φ é a raiz positiva da equação $x^2 - x - 1 = 0$, chamado *número de ouro*.

(ii) (*Seqüência de Fibonacci*). Considere a seqüência dada por $f_0 = f_1 = 1$ e $f_n = f_{n-2} + f_{n-1}$, para $n \geq 2$. Prove que a seqüência $x_n = \frac{f_n}{f_{n+1}}$ converge e que seu limite é φ .

5) Considere a seqüência $(\frac{p_n}{q_n})_{n \in \mathbb{N}}$, tal que $p_1 = q_1 = 1$ e, para $n \geq 2$, $p_n = p_{n-1} + 2q_{n-1}$ e $q_n = p_{n-1} + q_{n-1}$. Prove que a seqüência é convergente e que $\lim \frac{p_n}{q_n} = \sqrt{2}$.

6. Verifique a convergência ou divergência das seguintes seqüências.

$$\begin{array}{lll}
 1) s_n = \sum_{r=1}^n \frac{1}{r^3} & 2) s_n = \sum_{r=1}^n \frac{1}{e^r} & 3) s_n = \sum_{r=3}^n \frac{1}{\ln r} \\
 4) a_n = \frac{2.4.6 \dots (2n)}{1.3.5 \dots (2n-1)} & 5) a_n = \frac{1.3.5 \dots (2n-1)}{2.4.6 \dots (2n)} & 6) a_n = \frac{1}{n} \cdot \frac{2.4.6 \dots (2n)}{1.3.5 \dots (2n-1)}.
 \end{array}$$