0a. Lista de Exercícios MAT0206 e MAP0215

1^o. semestre de 2025

1. Prove a *Segunda Lei de De Morgan*: $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.
2. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $A_n = \{(n+1)k : k \in \mathbb{N}\}$.
   (a) Qual é o conjunto $A_1 \cap A_2$?
   (b) Determine os conjuntos: $\bigcup\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ e $\bigcap\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$.
3. Seja $A =:= \{x \in \mathbb{R} : -1 \leq x \leq 1\}$. O subconjunto $\{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$ de $A \times B$ é uma função? Explique.
4. Seja $g(x) := x^2$ e $f(x) = x + 2$, para $x \in \mathbb{R}$, e seja h a função composta $h := g \circ f$.
   (a) Encontre a imagem direta $h(E)$ de $E := \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 1\}$.
   (b) Encontre a imagem inversa $h^{-1}(G)$ de $G := \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 4\}$.
5. Mostre que, se $f : A \to B$ e E, F são subconjuntos de A, então $f(E \cup F) = f(E) \cup f(F)$, e $f(E \cap F) \subset f(E) \cap f(F)$.
6. Mostre que, se $f : A \to B$ e G, H são subconjuntos de B, então $f^{-1}(G \cap H) = f^{-1}(G) \cap f^{-1}(H)$.
7. Para $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, encontre uma bijeção de $A := \{x : a < x < b\}$ sobre $B := \{y : 0 < y < 1\}$.
8. Dê um exemplo de funções f, g tais que $f \neq g$, tais que $f \circ g = g \circ f$.
9. (a) Mostre que se $f : A \to B$ é injetora e $E \subseteq A$, então $f^{-1}(f(E)) = E$. Dê um exemplo para mostrar que a igualdade pode não ser verdadeira se f não for injetora.

(b) Mostre que se $f : A \to B$ é sobrejetora e $H \subseteq A$, então $f(f^{-1}(H)) = H$. Dê um exemplo para mostrar que a igualdade pode não ser verdadeira se f não for sobrejetora.

10. Sejam $f : A \to B$ e $g : B \to C$ funções e H um subconjunto de C. Mostre que $(g \circ f)^{-1}(H) = f^{-1}(g^{-1}(H))$.

11. Sejam f, g funções tais que $(g \circ f)(x) = x$ para todo $x \in D(f)$ e $(f \circ g)(y) = y$ para todo $y \in D(g)$. Prove que $g = f^{-1}$.

12. Use o princípio de indução para provar as seguintes igualdades, para todo $n \in \mathbb{N}$:

    a) $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$,

    b)$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$,

    c) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \cdots + n)^2$,

    d) $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$,

    e) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + n(n+1) = \dfrac{1}{3}n(n+1)(n+2)$,

    f) $x^n - 1 = (x - 1)(1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1})$.

    g) $(1 + x)^n = \begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix} x^2 + \cdots + \begin{pmatrix} n \\ n \end{pmatrix} x^n$.

    h) $(a + b)^n = \begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} a^n + \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} a^{n-1}b + \begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix} a^{n-2}b^2 + \cdots + \begin{pmatrix} n \\ n \end{pmatrix} b^n$.

13. Demonstre o princípio de indução usando o princípio da boa ordem.

14. Seja A um subconjunto dos números naturais que é indutivo e suponha que $n_0 \in A$. Mostre que $A \supset \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq n_0\}$.

15. Mostre que todo subconjunto finito e não vazio A de $\mathbb{N}$ tem um elemento máximo (isto é existe $n_0 \in A$ tal que $n_0 \geq n$, para todo $n \in A$).

16. Sejam A e B conjuntos finitos e $\mathcal{F}(A; B)$ o conjunto das funções de A em B. Mostre que, se $\text{card}\,(A) = m$ e $\text{card}\,(B) = n$ então $\text{card}\,(\mathcal{F}(A; B)) = n^m$.

17. Seja $\mathcal{P}(A)$ o conjunto das partes de A. Mostre que se $\text{card}\,(A) = m$, então $\text{card}\,(\mathcal{P}(A)) = 2^m$.

18. Dada $f : A \to B$, prove:

    (a) Se A é infinito e f é injetora, então B é infinito.

    (b) Se B é infinito e f é sobrejetora, então A é infinito.

19. Mostre que a união finita de conjuntos enumeráveis é enumerável.

20. Mostre que a união enumerável de conjuntos enumeráveis é enumerável.

21. Para cada $n \in \mathbb{N}$. seja $\mathcal{P}_n = \{X \subset \mathbb{N} \mid \sharp X = n\}$. Prove que $\mathcal{P}_n$ é enumerável. Conclua que o conjunto $\mathcal{P}_f$ dos subconjuntos finitos de $\mathbb{N}$ é enumerável.

22. Prove que o conjunto das partes de $\mathbb{N}$ é não enumerável.