MAC 115 – Introdução à Computação para Ciências Exatas e Tecnologia

INSTITUTO DE FÍSICA – SEGUNDO SEMESTRE DE 2001 - BACHARELADO NOTURNO

Segundo Exercício-Programa (EP2) Prazo de entrega: 29 de outubro de 2001

Lojas MacBrás

A crise econômica afugentou os clientes das Lojas MacBrás. Para atraí-los de volta, os Srs. Sabitudo e Sabinada, diretores da famosa rede de lojas, decidiram flexibilizar as formas de pagamento e de crédito aos clientes.

Por causa da variação constante dos juros no país, e da alteração dos preços dos produtos devido às promoções, os diretores depararam-se com o seguinte problema: *como prover os vendedores com uma ferramenta que lhes permitam responder 'num piscar de olhos' as questões formuladas pelos clientes a respeito dos diversos planos de crediário já existentes, ou sobre outros possíveis planos que sejam compatíveis com a disponibilidade financeira dos clientes?*

Para resolver esse problema, os diretores Sabitudo e Sabinada, cientes da boa fama dos estudantes do Bacharelado noturno da Física da USP, contrataram **você** (você mesmo!) como programador(a), incumbindo-o(a) de fazer um programa que seja capaz de calcular algumas opções de crédito, descritas a seguir.

Você pode considerar que todos os planos de pagamento têm prestações e juros fixos. A primeira prestação é paga sempre no ato da compra. Você pode assumir também que os juros são sempre positivos e não maiores que 200% ao mês. As fórmulas dadas também consideram que os juros estão na forma fracionária, ou seja, um juro de 5% corresponde nas fórmulas ao valor $0,05$.

A seguir descrevemos os vários problemas (opções de crédito) levantados pelos diretores, e indicamos como você pode resolver esses problemas. Temos certeza que, como um bom(boa) aluno(a) da disciplina MAC115, você irá se desincumbir muito facilmente desta tarefa!

1 Cálculo do valor à vista

Um dos problemas levantados é o de saber o valor à vista correspondente a um plano de pagamento.

Ou seja, deseja-se calcular o valor à vista v, dados o número n de meses, o valor p de cada prestação e o valor j dos juros mensais cobrados. Sabe-se que vale a igualdade

$$v = p + \frac{p}{1+j} + \frac{p}{(1+j)^2} + \cdots + \frac{p}{(1+j)^{n-1}}.$$

Como a soma acima é a soma de uma progressão geométrica, a fórmula pode ser simplificada para

$$v = \frac{p}{j}\left(1 + j - \frac{1}{(1+j)^{n-1}}\right). \tag{1}$$

2 Cálculo do valor das prestações

Outro problema levantado é o de calcular o valor das prestações quando são dados o valor à vista v, o número de prestações n e os juros j cobrados.

O cálculo pode ser facilmente deduzido de (1):

$$p = \frac{vj}{1 + j - 1/(1+j)^{n-1}}.$$

3 Cálculo do valor dos juros

O próximo problema é calcular o valor j dos juros, dados o valor à vista v, o valor p das prestações e o número n de prestações mensais. Neste caso, o problema consiste em encontrar um j que torne a seguinte função $f(j)$ igual a zero (compare com (1)):

$$f(j) = v - \frac{p}{j}\left(1 + j - \frac{1}{(1+j)^{n-1}}\right). \tag{2}$$

O método que você deve implementar para calcular o zero dessa função é descrito na Seção 7.

4 Cálculo do número de prestações

Dado um valor à vista v, um juro mensal j e um valor máximo de prestação p, o próximo problema é o de determinar o número de meses e o valor exato da prestação a ser paga. O valor exato a ser encontrado é fixo e é o maior possível (menor que p). Um detalhe: os diretores não permitem fazer um crediário que ultrapassasse 8 anos (96 meses). O método que você deve implementar é o seguinte:

1. Fixe j e p e calcule o menor n para o qual o valor à vista é maior ou igual a v, considerando-se o valor dado de p. (Como é bom ter um computador para fazer esse tipo de busca!) Note que, como o número de prestações tem que ser no máximo 96 (8 anos), para que tal n exista, é necessário e suficiente que
$$v < \frac{p}{j}\left(1 + j - \frac{1}{(1+j)^{96-1}}\right).$$
2. Tendo encontrado o valor de n (do item anterior), precisamos encontrar $p' \leq p$ para o qual
$$v = \frac{p'}{j}\left(1 + j - \frac{1}{(1+j)^{n-1}}\right).$$

5 Funções a serem implementadas

O seu programa deve, obrigatoriamente, conter *pelo menos* as seguintes funções. Encorajamos você a implementar outras funções (à sua escolha).

1. ```
   double pot(double x, int n);
   /* Dados um valor real x e um inteiro n >= 0, a função devolve o     */
   /* valor da enésima potência de x.                                   */
   ```
2. ```
   double valor_a_vista(double p, double j, int n);
   /* Dados o valor da prestação p, o valor dos juros j e o número de   */
   /* prestações n, a função devolve o valor à vista correspondente.    */
   ```
3. ```
   double valor_prestacao(double v, double j, int n);
   /* Dados o valor à vista v, o valor dos juros j e o número de         */
   /* prestações n, a função devolve o valor da prestação a ser pago.    */
   ```
   ```

4. `double valor_juros(double v, double p, int n);`
```
/* Dados o valor à vista v, o valor das prestações p e o número de    */
/* prestações n, a função devolve o valor dos juros que está sendo    */
/* cobrado.                                                           */
```

5. `double  acha_zero(double v, double p, int n);`
```
/* Esta função devolve o valor de j para o qual a função f(j) da      */
/* Seção 3 tem valor zero.                                            */
```

6 Entrada e Saída

Os dados de entrada serão lidos de um arquivo. (Para isso, você deve executar o seu programa usando comandos de redirecionamento. O seu professor irá explicar como fazer isso.) O nome do arquivo de entrada deve ser, **obrigatoriamente, "entrada.txt"**. A primeira linha desse arquivo deve conter um número inteiro indicando quantos problemas deverão ser analisados. A seguir, cada linha do arquivo estará correspondendo a um problema e conterá um caractere seguido de três números reais ou de dois números reais e um terceiro número inteiro. Mais precisamente, você deve prever 4 casos:

1. se o primeiro caractere é um 'v', os números correspondem, na ordem, ao valor da prestação, ao valor dos juros e ao número de meses. Neste caso, desejamos encontrar o valor à vista correspondente.

2. se o primeiro caractere é um 'p', os números correspondem, na ordem, ao valor à vista a ser pago, ao valor dos juros e ao número de meses. Neste caso, desejamos encontrar o valor da prestação.

3. se o primeiro caractere é um 'j', os números correspondem, na ordem, ao valor à vista a ser pago, ao valor da prestação e ao número de meses. Neste caso, desejamos encontrar o valor dos juros. Você pode supor que o valor à vista é menor que o número de meses multiplicado pelo valor das prestações.

4. se o primeiro caractere é um 'n', os números correspondem, na ordem, ao valor à vista a ser pago, ao valor máximo da prestação e ao valor dos juros. Neste caso, desejamos encontrar, se possível, o número de meses e o valor exato da prestação.

A saída deverá também ser gravada em um arquivo chamado, **obrigatoriamente**, de **"saida.txt"**. O arquivo de saída deve conter um cabeçalho com pelo menos o seu nome e número usp. A cada linha do arquivo de entrada devem corresponder três linhas do arquivo de saída. A primeira linha mostra os dados de entrada, a segunda linha a resposta calculada e a terceira linha fica em branco.

6.1 Exemplo de Entrada e Saída

Considere que o arquivo "entrada.txt" tenha o seguinte conteúdo.

```
19
v  70.00   3.2   15
p 850.05   3.2   15
n 850.05  70.0  3.2
j 850.05  70.0   15
v  70  1  15
p 980.26 1  15
n 980.25 70.0  1
```

```
j 980.25 70.0  15
v  90 50 2
p 150 50 2
n 150 90 50
j 150 90 2
v 1000 200 10
p 1499.97 200 10
n 1499.97 1000 200
j 1499.97 1000 10
n 1200 100 10
n 20810 1000 5
n 20805.8 1000 5
```

Um possível arquivo "saida.txt" é mostrado a seguir. Como os valores obtidos abaixo envolvem contas com números reais, podem ocorrer pequenas divergências entre os resultados abaixo e os seus resultados, devido a erros de arredondamento.

```
*******************************************************
*****                                             ****
*****  Segundo Exercicio Programa MAC115          ****
*****  Processamento do arquivo entrada.txt       ****
*****  Programa escrito por: Espertinho Começacedo ****
*****  Numero USP: 9914045                        ****
*****  Professor: Ajudador dos Esforçados         ****
*****  Turma: xx                                  ****
*****                                             ****
*******************************************************

Prestacao = 70.00   Juros = 3.20%   Meses = 15
Valor ‘a vista: 850.05

Valor ‘a vista = 850.05   Juros = 3.20%   Meses = 15
Valor da prestacao: 70.00

Valor ‘a vista = 850.05   Prestacao = 70.00   Juros = 3.20%
Valor da prestacao: 70.00   Numero de meses: 15

Valor ‘a vista = 850.05   Prestacao = 70.00   Meses = 15
Valor dos juros: 3.20%

Prestacao = 70.00   Juros = 1.00%   Meses = 15
Valor ‘a vista: 980.26

Valor ‘a vista = 980.26   Juros = 1.00%   Meses = 15
Valor da prestacao: 70.00

Valor ‘a vista = 980.25   Prestacao = 70.00   Juros = 1.00%
Valor da prestacao: 70.00   Numero de meses: 15

Valor ‘a vista = 980.25   Prestacao = 70.00   Meses = 15
Valor dos juros: 1.00%

Prestacao = 90.00   Juros = 50.00%   Meses = 2
Valor ‘a vista: 150.00
```

```
Valor ‘a vista = 150.00   Juros = 50.00%   Meses = 2
Valor da prestacao: 90.00

Valor ‘a vista = 150.00   Prestacao = 90.00   Juros = 50.00%
Valor da prestacao: 90.00   Numero de meses: 2

Valor ‘a vista = 150.00   Prestacao = 90.00   Meses = 2
Valor dos juros: 50.00%

Prestacao = 1000.00   Juros = 200.00%   Meses = 10
Valor ‘a vista: 1499.97

Valor ‘a vista = 1499.97   Juros = 200.00%   Meses = 10
Valor da prestacao: 1000.00

Valor ‘a vista = 1499.97   Prestacao = 1000.00   Juros = 200.00%
Valor da prestacao: 1000.00   Numero de meses: 10

Valor ‘a vista = 1499.97   Prestacao = 1000.00   Meses = 10
Valor dos juros: 200.00%

Valor ‘a vista = 1200.00   Prestacao = 100.00   Juros = 10.00%
Nao e’ possivel pagar o valor a vista

Valor ‘a vista = 20810.00   Prestacao = 1000.00   Juros = 5.00%
Nao e’ possivel pagar o valor a vista

Valor ‘a vista = 20805.80   Prestacao = 1000.00   Juros = 5.00%
Valor da prestacao: 1000.00   Numero de meses: 96
```

7 Zero de Funções: Método de Newton

O método de Newton é um dos métodos iterativos mais gerais para resolver $f(x) = 0$. Começa-se a iteração com uma estimativa inicial x_0 da solução x^*. Dada uma estimativa x_i, o método de Newton aproxima $f(x)$ pela reta tangente ao ponto $f(x_i)$. O zero da reta tangente (isto é, o ponto onde esta reta intersecta o eixo das abscissas) é tomado como nova estimativa de x^*. Veja na Figura 1 uma ilustração desse método. Para derivar as fórmulas usadas pelo método, vamos expandir $f(x)$ por uma série de Taylor ao redor do ponto x_i:

$$f(x) = f(x_i) + f'(x_i)(x - x_i) + \cdots.$$

A linha tangente é dada pelos dois primeiros termos da série

$$y = f(x_i) + f'(x_i)(x - x_i).$$

Igualando y a zero temos:

$$x_{i+1} = x_i - f(x_i)/f'(x_i). \tag{3}$$

Para a nossa função $f(x)$ definida por (2), temos que a sua derivada $f'(x)$ é:

$$f'(x) = \frac{p}{x^2}(1 + x - \frac{1}{(1+x)^{n-1}}) - \frac{p}{x}(1 + \frac{n-1}{(1+x)^n}). \tag{4}$$

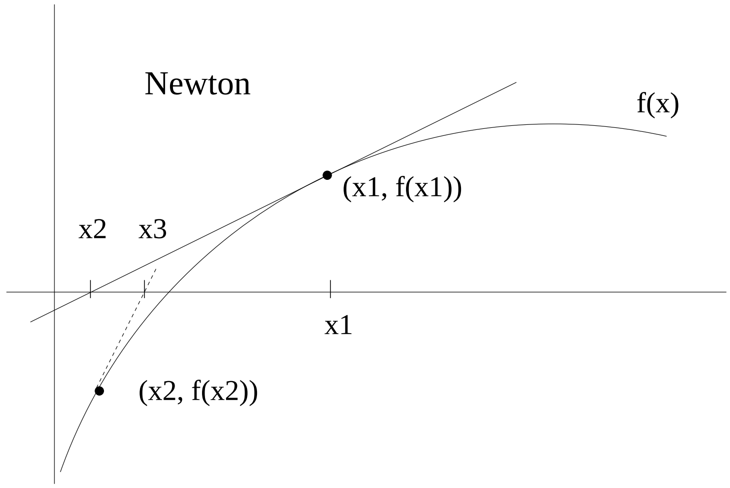

Figura 1: Ilustração do Método de Newton.

Oservamos que para calcular cada nova estimativa só precisamos da estimativa imediatamente anterior. Ou seja, são suficientes duas variáveis para fazer isso (não precisa ir armazenando todas as estimativas x_0, x_1, $x_2, \ldots$). Um algoritmo possível é o seguinte (note que basicamente só temos x_0 e x_1):

1. Comece com $i = 0$ e um valor inicial x_0;
2. Calcule x_{i+1} usando (3), (2) e (4).
3. Se $|x_{i+1} - x_i| \leq \mathrm{tol}_1$ então pare.
4. Se $|f(x_{i+i})| \leq \mathrm{tol}_2$ então pare.
5. Faça $x_i = x_{i+1}$ e retorne ao passo 2.

Para a implementação do programa, você pode assumir que as tolerâncias tol_1 e tol_2 sejam $\mathrm{tol}_1 = \mathrm{tol}_2 = 0.0001$, e como valor inicial adote $x_0 = 0.10$ $(= 10\%)$.