

## Capítulo 5

### COLORAÇÃO DE ARESTAS

#### 1 Introdução

Neste capítulo só trataremos de grafos sem laços. Uma **coloração das arestas** de um grafo é uma **atribuição de cores às suas arestas tal que arestas adjacentes recebem cores diferentes**. Equivalentemente, podemos dizer que uma coloração das arestas de um grafo  $G$  é uma partição de  $A(G)$  em emparelhamentos.

Ex:

Se  $E_1, \dots, E_k$  são emparelhamentos que definem uma partição de  $A(G)$ , dizemos que cada emparelhamento  $E_i$  ( $1 \leq i \leq k$ ) é uma **cor**, e  $k$  é o **número de cores**. Neste caso, dizemos que  $G$  tem (ou admite) uma **k-aresta-coloração**  $\mathcal{C} = \{E_1, \dots, E_k\}$ . ou  $G$  é **k-aresta-colorível**. Possivelmente algum emparelhamento  $E_i$  pode ser vazio; assim, quando dizemos que  $G$  tem uma **k-aresta-coloração**, isto quer dizer que podemos colorir as arestas de  $G$  com no máximo  $k$  cores.

Ex:

OBS: Quando um grafo  $G$  admite uma  $k$ -aresta-coloração, também dizemos que  $G$  é **k-aresta-colorível**.

## 2 Colorações mínimas e índice cromático

Encontrar uma coloração das arestas de um grafo é muito fácil (basta colorir cada aresta com uma cor diferente). Temos interesse em usar poucas cores. Uma coloração de arestas de um grafo é **mínima** (ou ótima) se o número de cores usadas por essa coloração é o menor possível.

PROBLEMA DE INTERESSE: Obter uma aresta-coloração mínima de um grafo.

O problema acima é difícil! (É NP-difícil.)

O **índice cromático** de  $G$ , denotado por  $\chi'(G)$ , é o **menor  $k$  tal que  $G$  é  $k$ -aresta-colorível**. Se  $\chi'(G) = k$ , então dizemos que  $G$  é  **$k$ -aresta-cromático**.

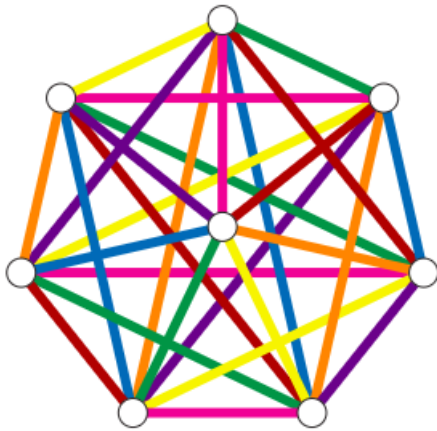
▷ **Índice cromático dos circuitos**

$$\chi'(C_n) = \begin{cases} 2 & \text{se } n \text{ é par,} \\ 3 & \text{se } n \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

▷ Índice cromático dos grafos completos

$$\chi'(K_n) = \begin{cases} n - 1 & \text{se } n \text{ é par,} \\ n & \text{se } n \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

(a)  $K_n$ ,  $n$  par. (Exemplo de uma 7-aresta-coloração do  $K_8$ .)



(b)  $K_n$ ,  $n$  ímpar

### 3 Delimitação inferior

Uma delimitação inferior imediata do índice cromático é a seguinte.

**Delimitação 6.1.** Em todo grafo  $G$  tem-se que  $\chi'(G) \geq \Delta(G)$ .

A desigualdade acima é imediata, pois em cada vértice  $v$  de  $G$ , as arestas que incidem em  $v$  têm que receber cores distintas. Logo,  $\chi'(G) \geq \Delta(v)$ . Assim, se uma coloração das arestas de  $G$  usa  $\Delta(G)$  cores, então ela é mínima.

Veremos a seguir que todo grafo bipartido  $G$  admite uma  $\Delta(G)$ -aresta-coloração. (E que qualquer grafo  $G$  admite uma  $(\Delta(G) + 1)$ -aresta coloração.)

PERGUNTA:

Como convencer alguém de que um certo grafo  $G$  requer mais do que  $\Delta(G)$  cores? Existe algum certificado (objeto/estrutura do grafo com alguma propriedade) fácil de ser testado?

Resposta: Não.

EXERCÍCIO E6.1. Mostre que  $\chi'(G) \leq 2\Delta(G) - 1$  para todo grafo  $G$ . (Sem usar o Teorema 6.2.)

EXERCÍCIO E6.2. Exiba um grafo com duas colorações mínimas distintas.

EXERCÍCIO E6.3. Mostre que os emparelhamentos que compõem uma coloração mínima não são necessariamente máximos. Mais precisamente, exiba uma coloração mínima  $\{E_1, \dots, E_k\}$  em que nenhum dos emparelhamentos  $E_i$  é máximo.

EXERCÍCIO E6.4. Mostre que se  $G$  é o grafo de Petersen, então  $\chi'(G) = 4$ .

EXERCÍCIO E6.5. Mostre que todo grafo bipartido  $k$ -regular admite uma  $k$ -aresta-coloração.

EXERCÍCIO E6.6. Exiba uma família de grafos  $G$  para os quais  $\chi'(G) > \Delta(G)$ .

EXERCÍCIO E6.7. Mostre que se  $G$  é um grafo  $k$ -regular com número ímpar de vértices, então  $\chi'(G) > \Delta(G)$ .

EXERCÍCIO E6.9. Prove que se  $G$  é um grafo 3-regular tal que  $\chi'(G) = 4$ , então  $G$  não é hamiltoniano.

## 4 Grafos bipartidos

O índice cromático de grafos bipartidos tem uma delimitação superior que coincide com a delimitação inferior 6.1 mencionada anteriormente. Ou seja, tal resultado fornece precisamente o índice cromático de um grafo bipartido. Este resultado foi estabelecido por König em 1916.

**Teorema 6.2. (König, 1916)** Se  $G$  é um grafo bipartido então  $\chi'(G) = \Delta(G)$ .

**Prova.** (a) Claramente,  $\chi'(G) \geq \Delta(G)$  (conforme a Delimitação 6.1). (b) Vamos provar que  $\chi'(G) \leq \Delta(G)$ , por indução no número de arestas de  $G$ .

Se  $|A(G)| = 1$ , o resultado é imediato. Suponha então que  $|A(G)| \geq 2$  e que  $\Delta(G) = k$ . Escolha arbitrariamente uma aresta  $xy$  de  $G$ , e considere o grafo  $G' = G - xy$ .

Como  $\Delta(G') \leq \Delta(G) = k$ , pela hipótese de indução segue que  $G'$  tem uma  $k$ -aresta-coloração  $\mathcal{C} = \{E_1, E_2, \dots, E_k\}$ . Vamos mostrar que é possível obter uma  $k$ -aresta-coloração para  $G$ , atribuindo-se uma das cores em  $\mathcal{C}$  à aresta  $xy$  (eventualmente após uma recoloração das arestas de  $G'$ ).

Como  $g_{G'}(x) < k$ , então existe uma cor em  $\mathcal{C}$ , digamos  $E_i$ , que não incide em  $x$ .

- (a) Se  $E_i$  não incide em  $y$ , então podemos dar a cor  $E_i$  à aresta  $xy$ , e manter as demais cores definidas por  $\mathcal{C}$ , obtendo dessa forma uma  $k$ -aresta-coloração de  $G$ . (Ou seja, só trocamos  $E_i$  por  $E_i \cup \{xy\}$ .)



(b) Suponha então que  $E_i$  incide em  $y$ . Como  $g_{G'}(y) < k$ , então pelo menos uma cor em  $\mathcal{C}$ , digamos  $E_j$ , não incide em  $y$ .

Seja  $H := G[E_i \cup E_j]$  o subgrafo de  $G$  induzido pelas arestas de cores  $E_i$  ou  $E_j$ . (Os compon. de  $H$  são circuitos ou caminhos alternantes de cor  $E_i$  e  $E_j$ .)

Seja  $Y$  o componente de  $H$  que contém o vértice  $y$ .

Afirmamos que  $x$  não pertence a  $Y$ . De fato, se  $x$  pertencesse a  $Y$ , existiria em  $H$  um caminho de  $y$  a  $x$ , cuja aresta inicial pertenceria a  $E_i$  e cuja aresta final pertenceria a  $E_j$  (já que em  $x$  não incide uma aresta de  $E_i$ ).

Neste caso, esse caminho teria comprimento par, e concatenando-o com a aresta  $xy$  teríamos um circuito ímpar em  $G$ , uma contradição (já que  $G$  é bipartido). Portanto,  $x$  não pertence ao componente  $Y$ .

Como  $x$  não pertence a  $Y$ , podemos obter uma  $k$ -coloração de  $G$  da seguinte forma:

- (i) Consideramos  $\mathcal{C}$  e permutamos as cores  $E_i$  e  $E_j$  no componente  $Y$ ;
- (ii) atribuímos a cor  $E_i$  à aresta  $xy$ .

Mais formalmente, definimos

$$E_i := (E_i \triangle A(Y)) \cup \{xy\} \text{ e}$$
$$E_j := E_j \triangle A(Y),$$

e mantemos os demais emparelhamentos (cores) inalterados.

□

OBSERVAÇÃO: A prova indutiva que fizemos nos fornece um algoritmo polinomial para encontrar uma coloração mínima de um grafo bipartido.

É possível fazer uma segunda prova do teorema de König usando o resultado proposto como EXERCÍCIO EXTRA no final do Capítulo 5:

*“Um grafo bipartido tem um emparelhamento que cobre todos os vértices de grau máximo.”*

Essa prova seria mais de interesse teórico, pois nesse exercício extra o grafo  $G'$  construído, que contém  $G$ , pode ser muito grande.

## 5 Grafos arbitrários

**Teorema 6.3.(Vizing, 1964)** Se  $G$  é um grafo simples, então  $\chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$ .

**Prova.** Por indução em  $|A(G)|$ . Se  $G$  tem uma aresta o resultado é imediato. Suponha então que  $|A(G)| \geq 2$  e considere  $\Delta = \Delta(G)$ . Escolha arbitrariamente uma aresta  $\alpha$  de  $G$ . Considere o grafo  $G' = G - \alpha$ . Como  $\Delta(G') \leq \Delta$ , pela hipótese de indução segue que  $G'$  tem uma  $(\Delta + 1)$ -aresta-coloração, digamos  $\mathcal{C}$ . Vamos mostrar que é possível atribuir uma das cores em  $\mathcal{C}$  à aresta  $\alpha$ .

Suponha que  $\alpha = uv_1$ . Como  $g_{G'}(u) < \Delta + 1$  e  $g_{G'}(v_1) < \Delta + 1$ , existem cores em  $\mathcal{C}$ , digamos  $E_u$  e  $E_1$  tais que

$E_u$  não incide em  $u$  e

$E_1$  não incide em  $v_1$ .

Vamos construir uma seqüência de arestas  $(uv_1, uv_2, \dots)$  e uma seqüência de cores  $(E_1, E_2, \dots)$  tais que

$E_i$  não incide em  $v_i$  e

$uv_{i+1}$  tem a cor  $E_i$ .

Suponha que temos as seqüências  $(u v_1, u v_2, \dots, u v_i)$  e  $(E_1, E_2, \dots, E_i)$ . Se existir aresta  $uv$  de cor  $E_i$  tal que  $v \notin \{v_2, \dots, v_i\}$ , chamamos de  $v_{i+1}$  o vértice  $v$  e tomamos uma cor  $E_{i+1}$  que não incide em  $v_{i+1}$ . Estendemos desta forma as duas seqüências, e repetimos este processo enquanto for possível.

Como  $g(u)$  é finito, tal extensão não vai ser sempre possível. Suponha então que, tendo construído as seqüências

$$(u v_1, u v_2, \dots, u v_k) \text{ e}$$

$$(E_1, E_2, \dots, E_k),$$

não pudemos mais estender a seqüência das arestas. Vejamos as razões que impediram tal extensão.

(a) Não existe aresta  $uv$  com a cor  $E_k$ .

Neste caso, podemos recolorir as arestas  $uv_i$ ,  $1 < i \leq k$ , atribuindo à aresta  $uv_i$  a cor  $E_i$ . Atribuimos à aresta  $uv_1$  a cor  $E_1$ .

(b) Existe aresta  $uv$  com a cor  $E_k$ , mas  $v = v_j$  para algum  $j < k$ .

Neste caso, para começar, recolorimos as arestas  $uv_i$ ,  $1 < i < j$ , dando a cor  $E_i$  a cada tal aresta  $uv_i$ ; e atribuímos a cor  $E_1$  à aresta  $uv_1$ . Deixamos a aresta  $uv_j$  temporariamente sem cor.

Seja  $H$  o subgrafo de  $G$  formado pelas arestas de cor  $E_u$  ou  $E_k$  (note que  $uv_j$  está sem cor). Cada um dos vértices  $u$ ,  $v_j$  e  $v_k$  têm grau no máximo 1 em  $H$ , e portanto, não podem pertencer todos a um mesmo componente de  $H$ .

Então pelo menos um dos dois casos seguinte deve ocorrer.

(b1) Os vértices  $u$  e  $v_j$  pertencem a componentes distintos de  $H$ .

Neste caso, permutamos as cores  $E_u$  e  $E_k$  no componente que contém  $v_j$ . Após esta recoloração, sabemos que a cor  $E_u$  não incide no vértice  $v_j$ . Como  $E_u$  não incide em  $u$ , então podemos colorir a aresta  $uv_j$  com a cor  $E_k$ . As demais arestas permanecem com as cores inalteradas. Obtemos assim uma  $(\Delta + 1)$ -aresta-coloração de  $G$ .



(b2) Os vértices  $u$  e  $v_k$  pertencem a componentes distintos de  $H$ .

Neste caso, continuamos a recoloração das arestas  $uv_i$ ,  $j \leq i < k$ , dando a cor  $E_i$  a cada tal aresta  $uv_i$ . Deixamos a aresta  $uv_k$  temporariamente sem cor. Como a recoloração não envolve as arestas de cor  $E_u$  ou  $E_k$ , o subgrafo  $H$  não se altera. Feito isso, permutamos as cores  $E_u$  e  $E_k$  no componente que contém  $v_k$ . Após esta recoloração, temos que a cor  $E_u$  não incide em  $v_k$ . Como  $E_u$  não incide em  $u$ , podemos colorir a aresta  $uv_k$  com a cor  $E_u$ , obtendo uma  $(\Delta + 1)$ -aresta-coloração de  $G$ .

Tendo concluído a análise dos casos (b1) e (b2), a prova do teorema está completa.  $\square$



OBS: Uma parte desse material baseia-se no texto “Uma introdução à Teoria dos Grafos” (organizado para a II Bienal da SBM de 2004 – veja a lista de referências).