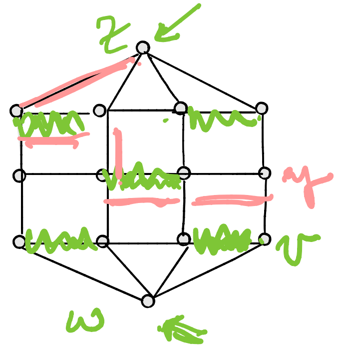
Cap 5

Emparelhamentos

- Resumo da aula 1 (pp 1 a 4) 23/abril
- material das aulas 2 e 3 28 e 30/abril
- exercícios com dicas no fim 30/abril

Capítulo 5 — Emparelhamentos

(matching)

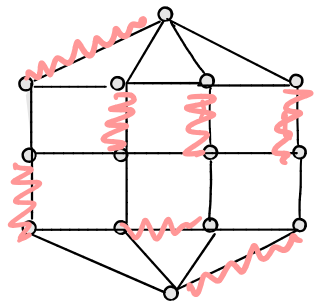


1 Introdução

Aula 1

Todos os grafos tratados neste capítulo são simples (ou seja, sem laços e sem arestas múltiplas). Um **emparelhamento** num grafo é um conjunto de arestas duas a duas não-adjacentes. Em outras palavras, um emparelhamento é um conjunto E de arestas tal que todo vértice do grafo é extremo de no máximo um elemento de E.

- Seja G um grafo e $X \subseteq V(G)$. Dizemos que um emparelhamento E **cobre** (ou satura) X se em cada vértice de X incide uma aresta de E. Neste caso, também dizemos que X é **coberto** (ou saturado) por E. Se $X = \{v\}$ então dizemos simplesmente que E **cobre** (ou satura) v.
- Um emparelhamento num grafo G é **perfeito** se cobre $V(G)$.
- Se uma aresta uv pertence a um emparelhamento E então dizemos que u e v **são (ou estão) emparelhados por** E.
- Se um vértice v não é coberto por um emparelhamento E então dizemos que v é **livre em relação a** E, ou simplesmente, v é **livre** (se E estiver claro pelo contexto).



emp. perfeito

PROBLEMAS DE INTERESSE:

SIM

1. Encontrar um emparelhamento máximo em um grafo. [Existe algoritmo eficiente?]

Teo Berge

2. Dado um grafo e um emparelhamento E, que não é máximo, será que existe algum jeito fácil de convencer alguém de que E não é máximo? SIM

Teo Hall

3. Dado um grafo (X, Y)-bipartido, é fácil decidir se existe um emparelhamento que cobre X? E se não existe, tem um certificado simples para comprovar isso? SIM

4. É mais fácil encontrar um emparelhamento máximo um grafo bipartido do que num grafo arbitrário? SIM

5. Quando o grafo é bipartido existe algum outro parâmetro do grafo relacionado com a cardinalidade de um emparelhamento máximo? SIM cob(G)

Gmp(G)

6. Suponha que um grafo G não tenha um emparelhamento perfeito. Existe um certificado que nos convença disso? Aula 3

7. Existem problemas interessantes cujas soluções (exatas ou aproximadas) dependem de soluções para problemas de emparelhamentos? SIM

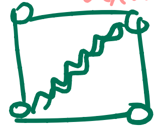
Ex: • Prob. chinês do carteiro
• TSP métrico

Após estudar este capítulo, esperamos que você saiba as respostas a essas perguntas.

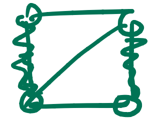
Aula 1

2 Emparelhamentos Máximos

maximal



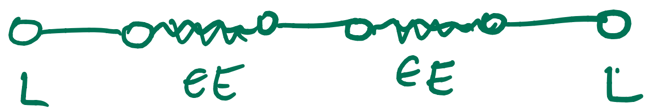
maximal e máximo



Emparelhamento maximal $\times$ Emparelhamento máximo

Um emparelhamento E num grafo é **maximal** se não existe nesse grafo um emparelhamento E' que contém E propriamente. Um emparelhamento E num grafo G é **máximo** se não existe em G nenhum emparelhamento de cardinalidade maior que $|E|$.
OBS: Note que nem todo emparelhamento maximal é máximo. Claramente, todo emparelhamento máximo é maximal.

Definição. Seja E um emparelhamento num grafo G. Um **caminho E-alternante** em G é um caminho cujas arestas estão alternadamente em E e em $A(G) \setminus E$. Um tal caminho com ambos os extremos livres (em E) é chamado um **caminho aumentador** (*augmenting path*).



▷ Caracterização de emparelhamentos máximos

Teorema 5.1. (Berge, 1957)
Seja G um grafo e E um emparelhamento em G. Temos que E é um emparelhamento máximo se e só se G não tem nenhum caminho E-alternante com ambos os extremos livres. $\Longleftrightarrow$

$E_1 \triangle E_2$

$E_1 \triangle A(P)$

3 Emparelhamentos em grafos bipartidos

Aula 1

Todos os resultados abaixo serão provados em aula. Algumas vezes, serão discutidas duas ou mais provas distintas. (Desejável: conhecer pelo menos 2 provas distintas do Teorema de Hall.)

Os dois teoremas desta seção são centrais na teoria de emparelhamentos em grafos.

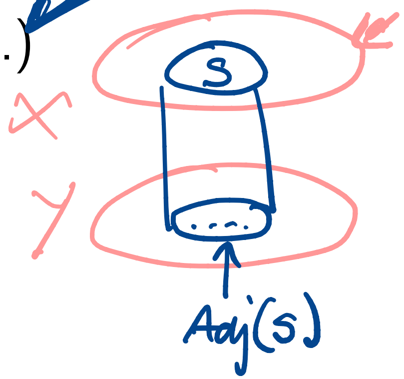
Condição (H)

Teorema 5.2. (Hall, 1935)
Seja G um grafo (X, Y)-bipartido. Então
G tem um emparelhamento que cobre X se e só se $|\mathrm{Adj(S)}| \geq |\mathrm{S}|$ para todo $S \subseteq X$.

Prova 1. Usando caminhos alternantes. (Vista na aula anterior.)

Prova 2. Por indução em $|X|$. (Exercício para casa (com dica na aula).)

Prova 3. Usando o Teorema min-max de König . (Veremos adiante.)



- Necessidade de (H) : óbvia
- Suficiência de H (Vimos e veremos mais provas)

28 abril 2020

Aula 2

Corolário 5.3.
Seja G um grafo (X, Y)-bipartido. Se $|\mathrm{Adj(S)}| \geq |\mathrm{S}| - \mathrm{k}$ para todo $S \subseteq X$ e algum inteiro fixo k, então G tem um emparelhamento de cardinalidade $|X| - k$.

Prova .

$|Adj(S)| \geq |S| - k$

G' é o grafo obtido de G acrescentando-se k novos vértices, todos adjac. aos vért. de X.

Ou seja, $\begin{cases} G' = (X, Y \cup Y'), \text{ onde } |Y'| = k, \text{ e} \\ A(G') = A(G) \cup \{xy' : x \in X, \ y' \in Y'\}. \end{cases}$

- G' é $(X, Y \cup Y')$-bipartido e satisfaz condição (H)

Pelo Teo. Hall, G' tem um empar. E que cobre X.

Então $E \cap A(G)$ é um empar. em G de cardinalid. $\geq |X| - k$. ∎

Corolário 5.4.
Todo grafo bipartido k-regular com $k \geq 1$ tem um emparelhamento perfeito.

Prova .

Seja G um grafo (X,Y)-bipartido, k-regular, $k \geq 1$.

Claramente, $|X| = |Y|$. ✓

De fato, $|A(G)| = k|X| = k|Y|$, e portanto $|X| = |Y|$

Vamos provar que G satisfaz a condição (H) do Teo. Hall.

Seja $S \subseteq X$. Considere
$$A_1 = \{a \in A(G) : a \text{ incide em } S\} \text{ e}$$
$$A_2 = \{a \in A(G) : a \text{ incide em } \mathrm{Adj}(S)\}.$$

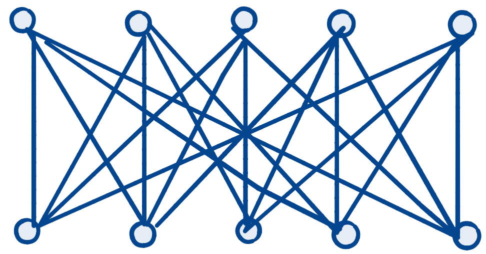
Claramente, $A_1 \subseteq A_2$. Logo, $\underbrace{|A_1|}_{= k|S|} \leq \underbrace{|A_2|}_{= k|\mathrm{Adj}(S)|}$ e portanto,

$|S| \leq |\mathrm{Adj}(S)|$. Pelo Teo. de Hall, G tem um empar. que cobre X.

Como $|X| = |Y|$, tal empar. é perfeito. $\square$

Corolário 5.5.
Todo grafo bipartido k-regular com $k \geq 2$ tem k emparelhamentos perfeitos dois a dois disjuntos.

Prova . (Exercício) (Indução em k.)



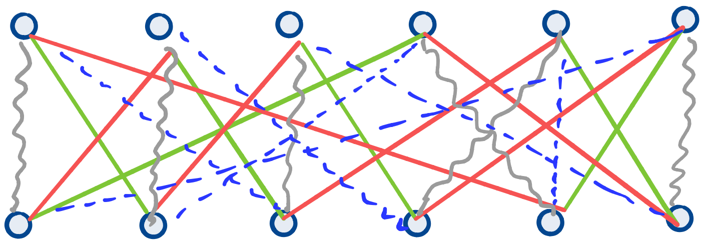
E_1 ✓

$G - E_1$

$(k-1)$-reg

Definição: Seja k um inteiro positivo. Um subgrafo gerador k-regular de um grafo G é chamado ***k*-fator** de G. Assim, um **1-fator** de G é simplesmente um subgrafo gerado pelas arestas de um emparelhamento perfeito de G; um **2-fator** é um subgrafo gerador de G que é uma união de circuitos disjuntos nos vértices.

Corolário 5.6.
Todo grafo bipartido k-regular, $k \geq 1$ tem pelo menos $\binom{k}{2}$ 2-fatores distintos.



G tem k emparelhem 2 a 2 disj.

Cada 2 desses k empar → 2-fator

em G há $\binom{k}{2}$ 2-fatores

Material Extra (curiosidade) - só esta página

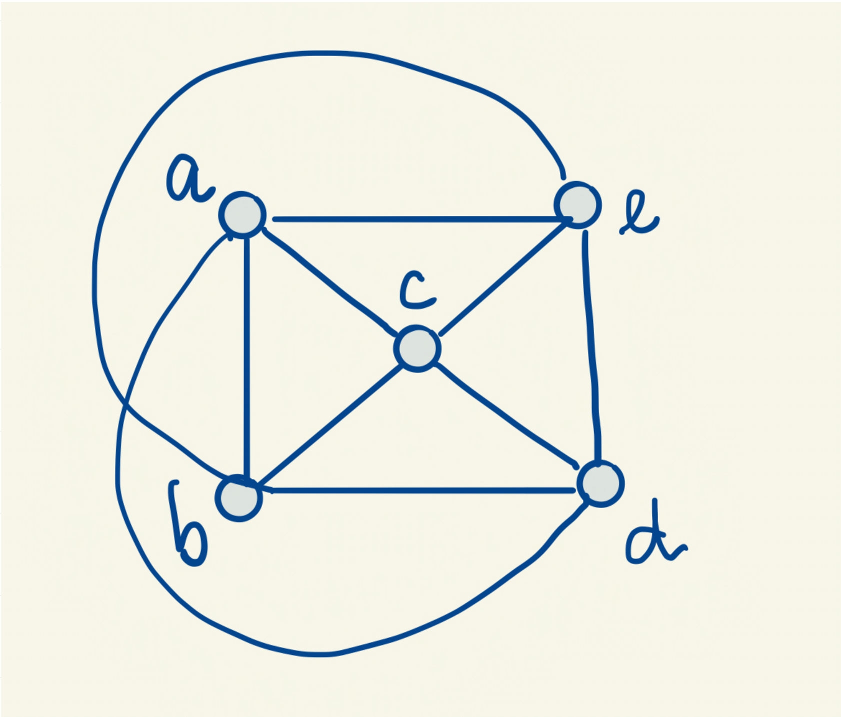
O seguinte resultado, para grafos arbitrários, é considerado um dos primeiros resultados na teoria dos grafos.

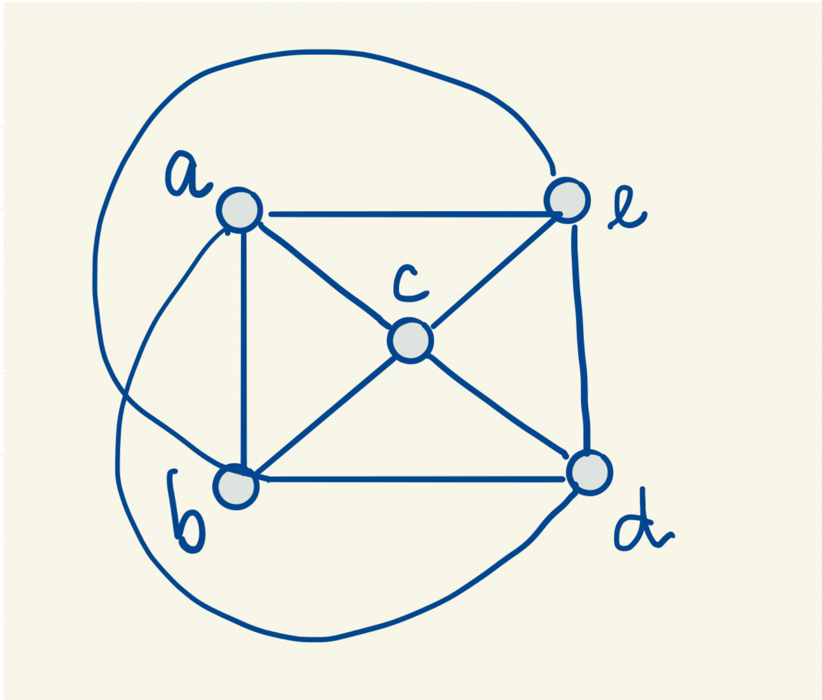
Teorema do 2-fator (Petersen, 1891): Se G é grafo $2k$-regular, $k \geq 1$, então o conjunto das arestas de G pode ser particionado em k 2-fatores arestas-disjuntos. (Também dizemos simplesmente que G admite uma decomposição em k 2-fatores.)

par

G conexo

(Ideia da prova: grafo euleriano + "splitting" de vértices.)





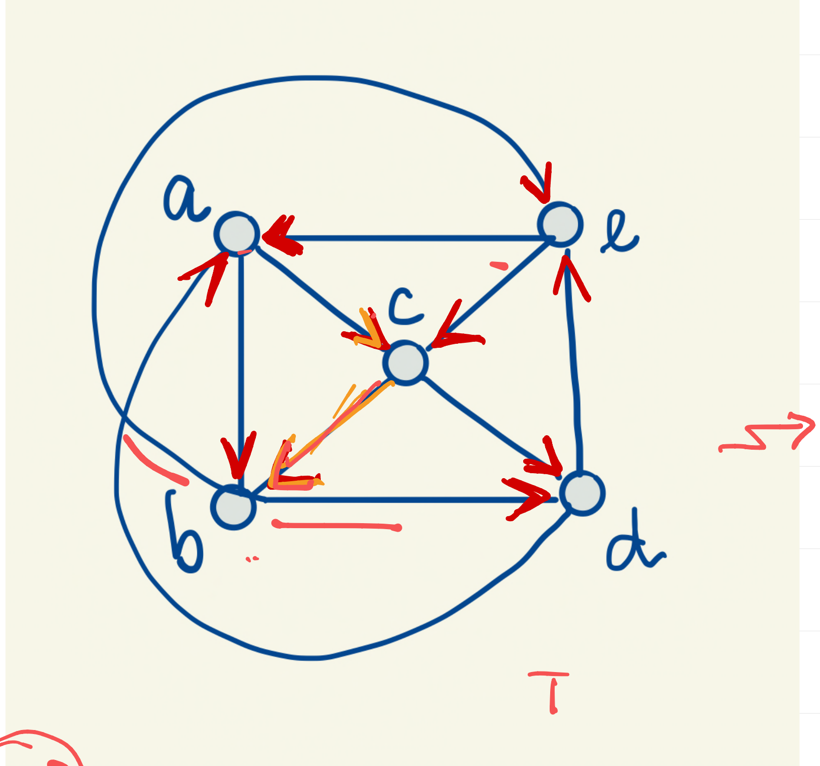
G $2k$-regular, $k=2$

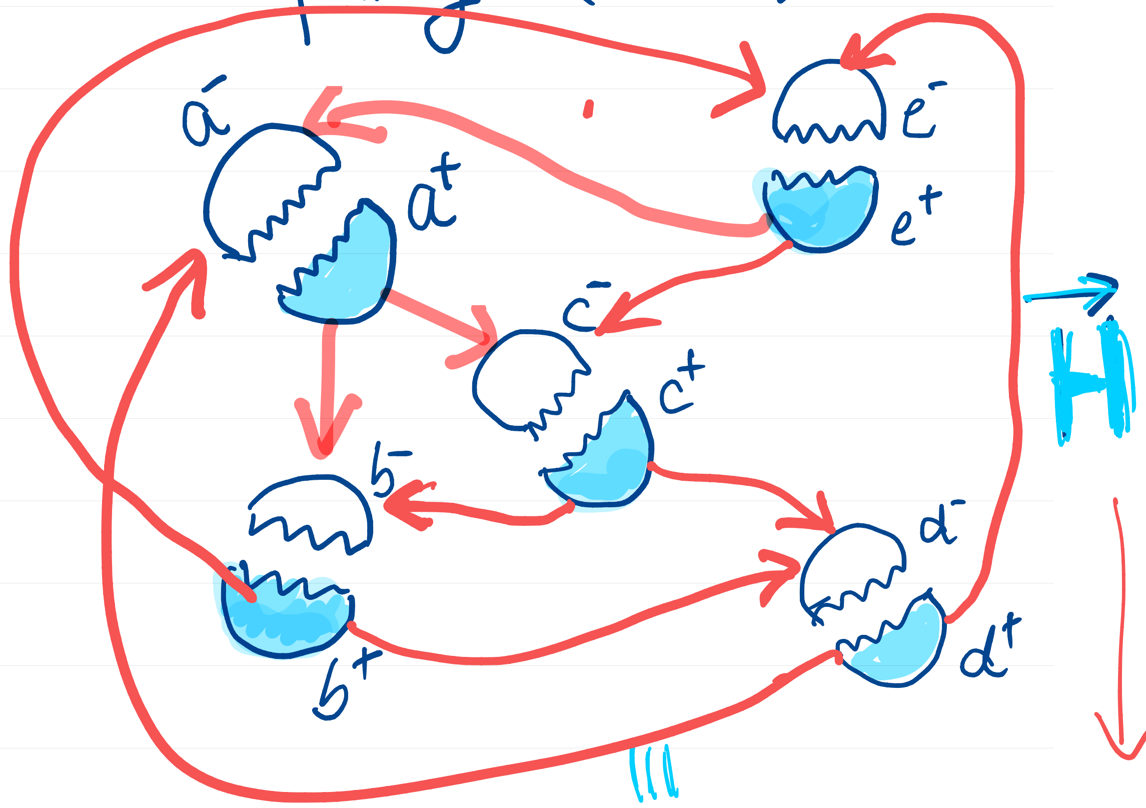
$\Downarrow$

G é euleriano $\longrightarrow$ Trilha euleriana fechada

$T = (a, c, b, d, e, c, d, a, b, e, a)$

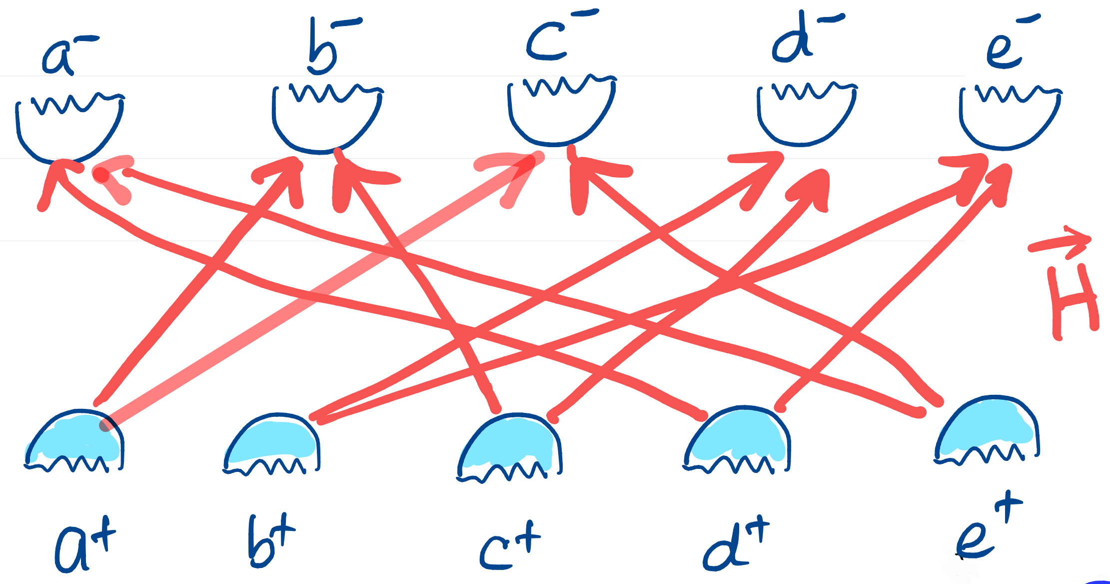
"splitting" (divisão) de cada vértice





$\vec{G}$ grafo obtido de G orientando as arestas no sentido da trilha T

$$\boxed{g^+_{\vec{G}}(v) = g^-_{\vec{G}}(v) = k}$$



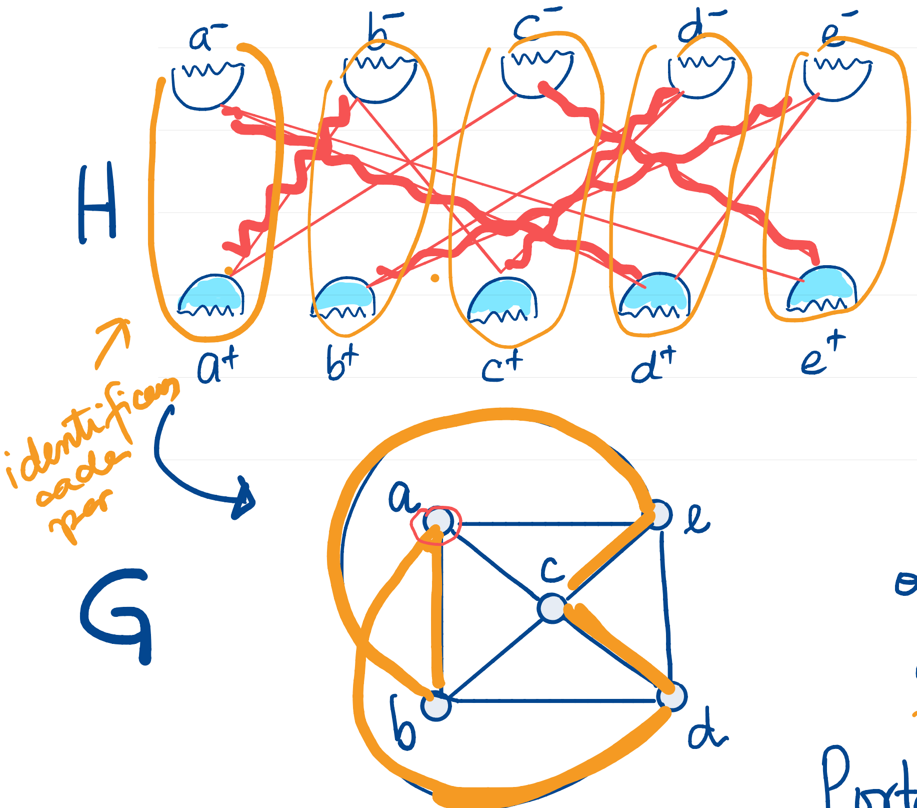
Seja H o grafo obtido de $\vec{G}$ tomando

$$V(H) = \{ x^-, x^+ : x \in V(\vec{G}) \} \text{ e}$$

$$A(H) = \{ \{x^+, y^-\} : xy \in A(\vec{G}) \}.$$

H é um grafo bipartido k-regular.

$\Downarrow$



Pelo Corol. 5.5,
H tem k emp. perf. 2 a 2 disj.

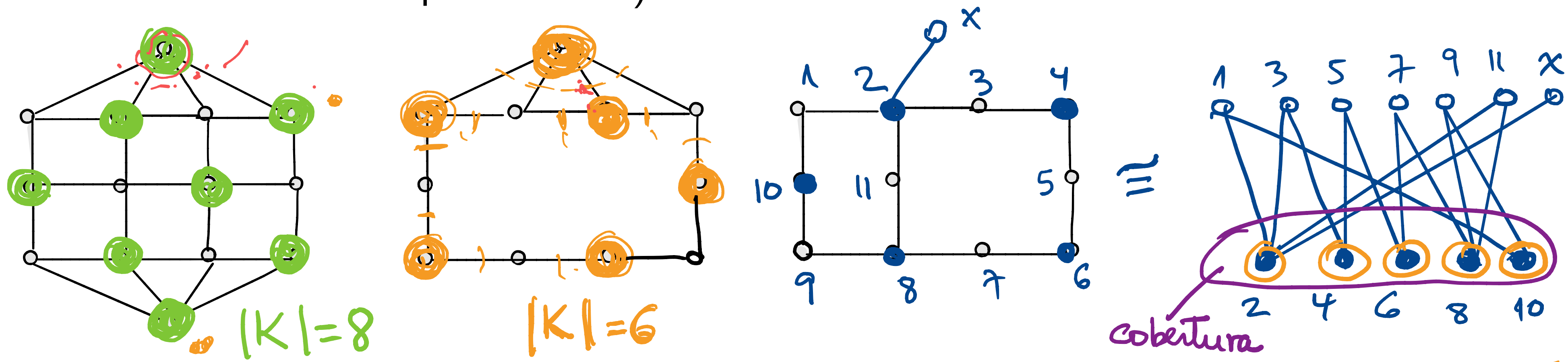
Identificando-se cada par de vértices x^-, x^+ em H a um vértice x, obtemos o grafo G. Além disso, cada emparelhamento em H dá origem a um 2-fator em G.

Portanto, G tem k 2-fatores arestas-disjuntos. ∎

Emparelhamentos e Coberturas – um resultado min-max

Definição: Uma **cobertura** de um grafo G é um conjunto $K \subseteq V(G)$ tal que toda aresta de G tem pelo menos um dos extremos em K. (Mais precisamente, K é uma cobertura das arestas de G por vértices.)

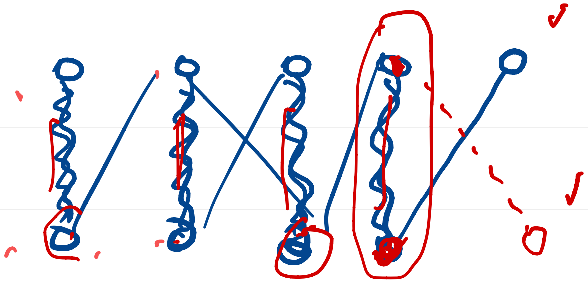
Ex:

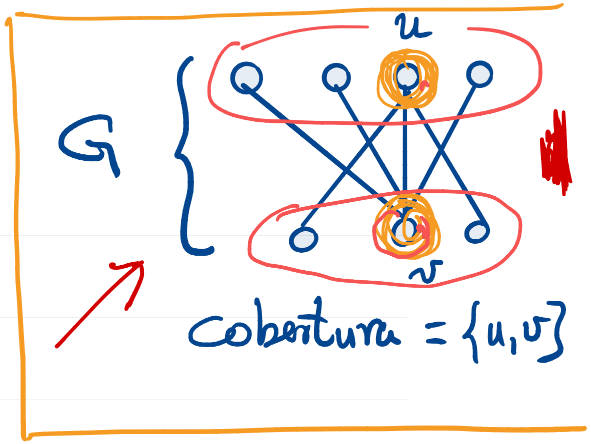


Relação entre emparelhamentos e coberturas em um grafo.

E: emparelhamento em G

K: cobertura em G





$$|K| \geq |E|$$ $\Longleftarrow$ Pelo menos um dos extremos de cada aresta de E tem que pertencer à uma cobertura de G.

$\forall$ cobert K e $\forall$ emp. E em G

PROBLEMA DA COBERTURA MÍNIMA

Dado um grafo, encontrar uma cobertura mínima

- Problema difícil (NP-difícil)
- Fácil se G é bipartido!

empar. maximiza | cobert. minimiza

$$\mathrm{Emp}(G) \leq \mathrm{cob}(G) \quad (*)$$

Notação

- $\mathrm{Emp}(G)$ = cardinalidade de um empar. máx. em G
- $\mathrm{cob}(G)$ = " " uma cobertura mínima em G.

Vimos que $\mathrm{Emp}(G) \leq \mathrm{cob}(G)$ (*)

Perg: pode ocorrer = em (*)?

Resp: SIM,

quando G é bipartido

Teorema 5.6. (König*, 1931) – Teorema min-max
Seja G um grafo (X, Y)-bipartido. Então a cardinalidade de um emparelhamento máximo em G é igual à cardinalidade de uma cobertura mínima.

Prova .

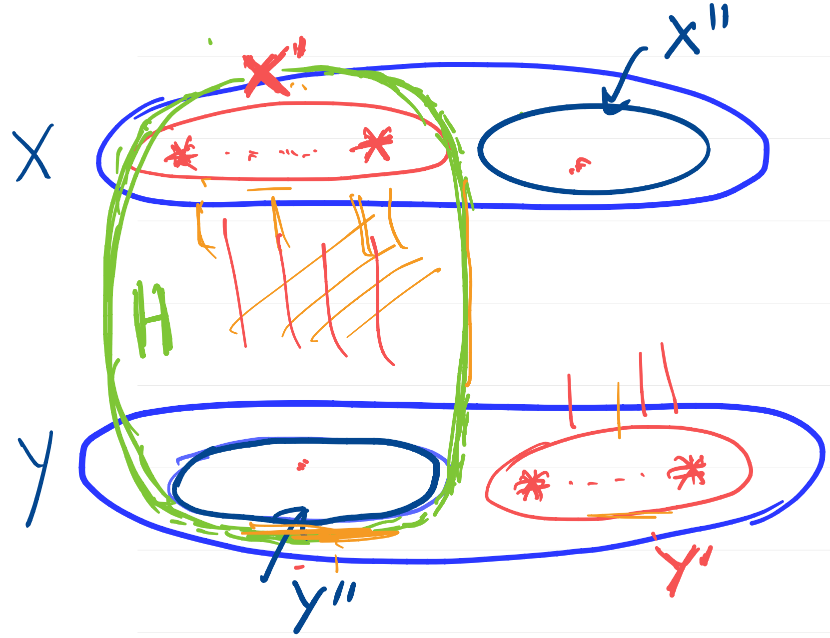
Também provado por Egerváry

* König-Egerváry

G bipartido $\Rightarrow$ $\underbrace{Emp(G)}_{max} = \underbrace{cob(G)}_{min}$

É imediato que $Emp(G) \leq cob(G)$.
Vamos mostrar que $Emp(G) \geq cob(G)$.

Seja G um grafo (X,Y)-bipartido e
K uma cobertura mínima de G.



$K = X' \cup Y'$, $X' \subseteq X$, $Y' \subseteq Y$

Defina os conjuntos

$$\begin{cases} X' = X \cap K \quad \text{e} \\ X'' = X \setminus X'. \end{cases}$$

$$\begin{cases} Y' = Y \cap K \quad \text{e} \\ Y'' = Y \setminus Y'. \end{cases}$$

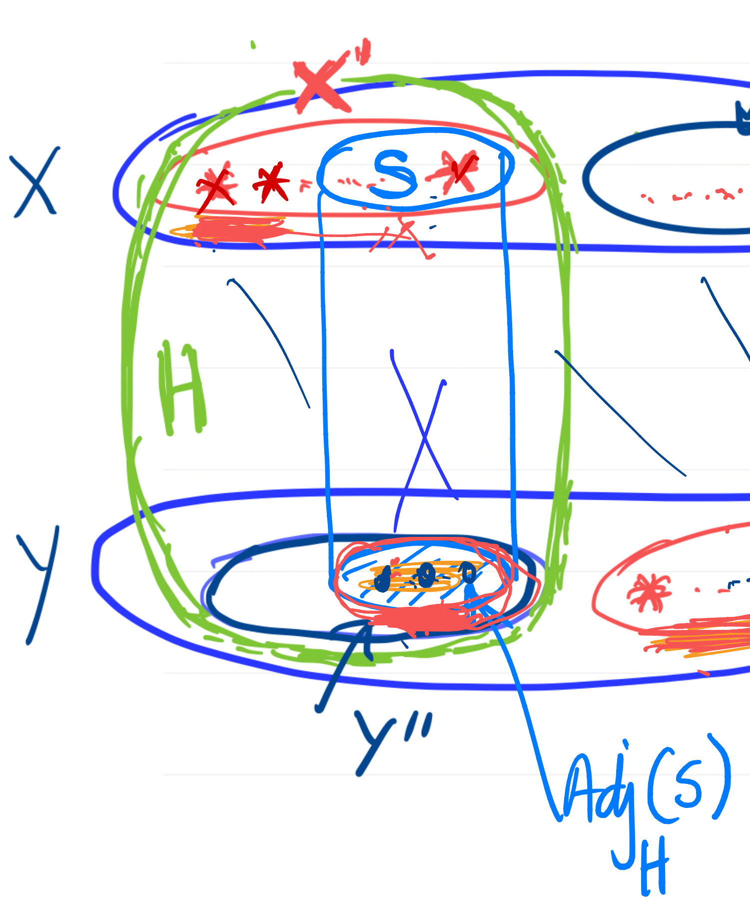
Seja $H = G[X' \cup Y'']$ subg. de G induzido por $X' \cup Y''$.

Claramente, H é (X', Y'')-bipartido.

$\underbrace{\text{Vamos mostrar que}}$ H tem um empar. que cobre X'.

Para isso, " H satisfaz a condição do Teo. Hall.

H



Seja $S \subseteq X'$

Vamos provar que

$$|Adj_H(S)| \geq |S| .$$

Seja $\hat{K} = (K \setminus S) \cup Adj_H(S)$

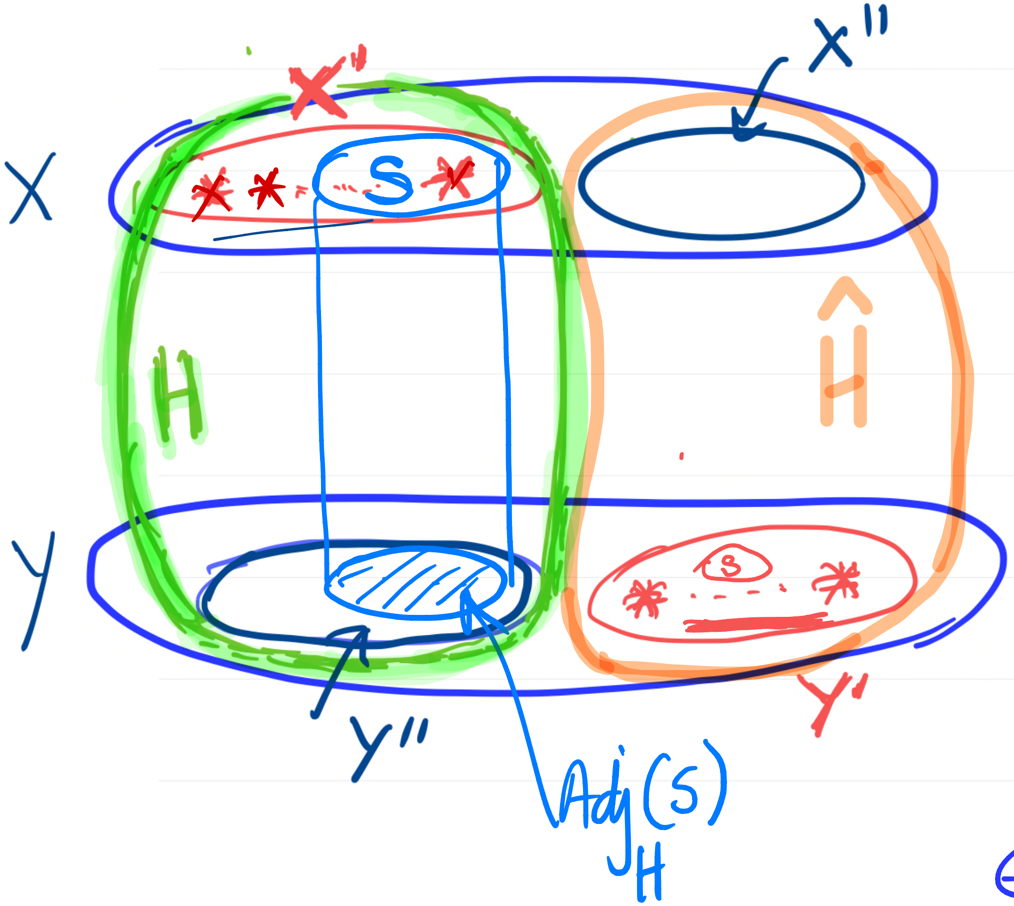
Claramente, $\hat{K}$ é uma cobert. de G.

Como K é uma cobert. mínima,

então $|K| \leq |\hat{K}|$. Logo,

$$|K| \leq |(K\setminus S) \cup Adj_H(S)| = |K| - |S| + |Adj_H(S)| .$$

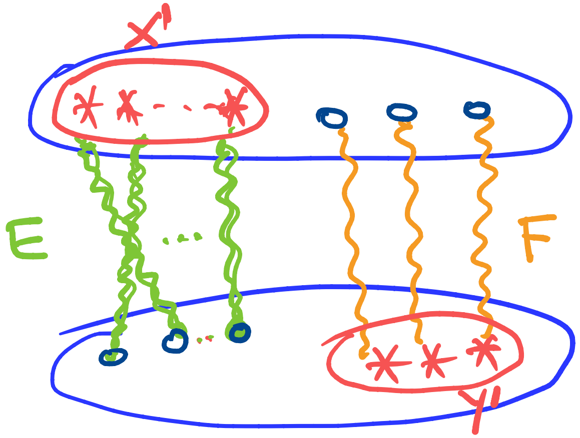
Portanto, $|Adj_H(S)| \geq |S|$. Pelo Teo. de Hall, H tem um emparelhamento, digamos E, que cobre X'.



Seja

$\hat{H} = G[X'' \cup Y']$

Analogamente ao caso anterior, podemos provar que $\hat{H}$ tem um empar., digamos F que cobre Y'.



Então $E \cup F$ é um empar. em G tal que $|E \cup F| = |K|$.

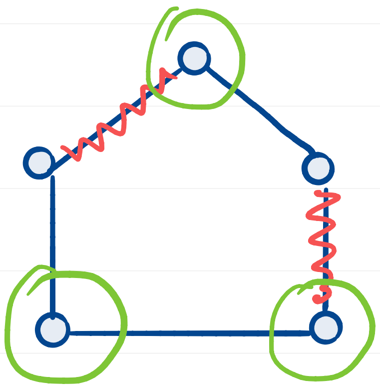
Neste caso, $E \cup F$ é um empar. máximo em G. Portanto,

$$Emp(G) = cob(G).$$ ■

OBS: A hipótese G bipartido é essencial!

Quando G não é bipartido, a igualdade $Emp(G) = cob(G)$ pode não ocorrer.

Ex: $G \cong C_n$, n ímpar (circuito ímpar)



$$Emp(C_5) = 2$$

$$cob(C_5) = 3$$

$$Emp(C_n) = \lfloor n/2 \rfloor$$

$$Cob(C_n) = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$$

$\neq$ qdo n ímpar

Qdo G é bipartido, a igualdade min-max pode ser provada usando dualidade em programação linear.

Prova 3 do Teorema de Hall (via Teorema de König)

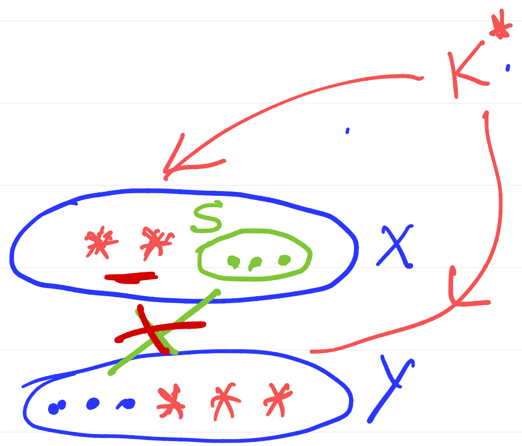
30/4

Aula 3

Vamos provar que se G é (X,Y)-bipartido e

$|Adj(S)| \geq |S| \quad \forall S \subseteq X$, então G tem um empar. que cobre X.

Sejam E^* um empar. máximo em G e
K^* uma cobertura mínima.



Pelo Teorema de König, $|E^*| = |K^*|$.

Suponha que E^* não cobre X.

Seja $S = X \setminus K^*$. Então $Adj(S) \subseteq K^* \cap Y$

Logo, $|Adj(S)| \leq |K^* \cap Y| = \underbrace{|K^*|}_{\shortparallel} - |K^* \cap X|$

$= |E^*| - |K^* \cap X|$

$= |E^*| - (|X| - |S|)$

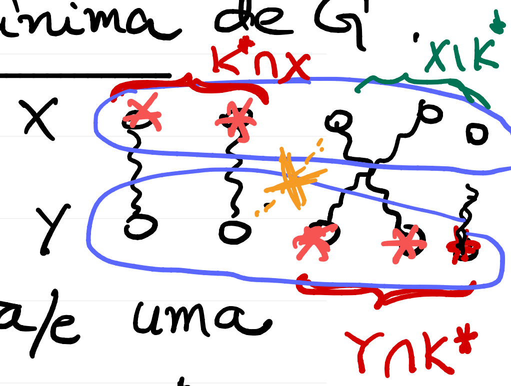
$= \underbrace{|E^*| - |X|}_{\text{negat}} + |S| < |S|$.

Neste caso, S viola a hipótese, o que é uma contradição. Portanto, E^* cobre X. ■

Prova 4 do Teo. de Hall (via Teo min-max de König)

Para estudar em casa.

Seja E^* um empar. máx. e K^* uma cobert. mínima de G.



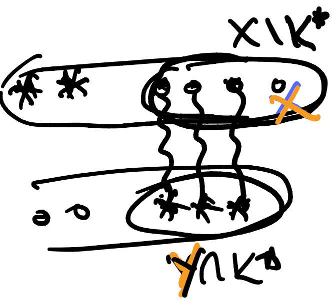
Pelo Teorema de König, $|E^*|=|K^*|$.

Então cada vértice de K é extremo de exata/e uma aresta de E^*. Em particular, cada vértice de $K^*\cap X$ é extremo de uma aresta de E^*, ie, E^* cobre $K^*\cap X$ (e E^* cobre $Y\cap K^*$).

- Queremos provar que E^* cobre X. Para isso, resta provar que E^* cobre $X\setminus K^*$.

$$|X\setminus K^*| \geq |\{a\in E^* : a \text{ incide em } Y\cap K^*\}| = |Y\cap K^*| \geq |Adj(X\setminus K^*)| \overset{\text{hipót}}{\geq} |X\setminus K^*|.$$

Logo, $|X\setminus K^*| = |\{a\in E^* : a \text{ incide em } Y\cap K^*\}| = |Y\cap K^*|$.

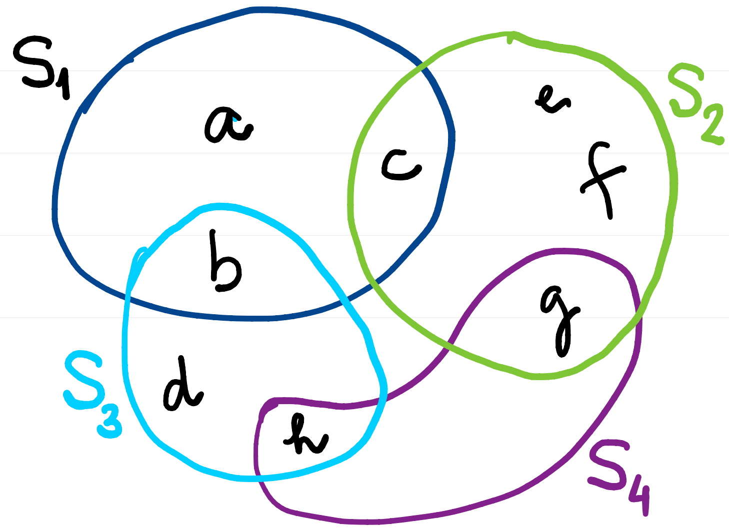


Como toda aresta de E^* que incide em $Y\cap K^*$ tem o outro extremo em $X\setminus K^*$, E^* cobre $Y\cap K^*$ e $|X\setminus K^*|=|Y\cap K^*|$, segue que E^* cobre $X\setminus K^*$.

TEOREMA DE HALL (1935) (versão original)

Def. Seja $\mathcal{F} = \{S_1, \dots, S_n\}$ uma família de subconjuntos (não necessariamente distintos) de um conjunto finito S.
Um conjunto de n elementos $\{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ é chamado um SISTEMA DE REPRESENTANTES DISTINTOS (SRD) ou uma TRANSVERSAL de $\mathcal{F}$ se $s_i \in S_i$ p/ $i = 1, \dots, n$, e $s_i \neq s_j$ quando $i \neq j$.

Ex.



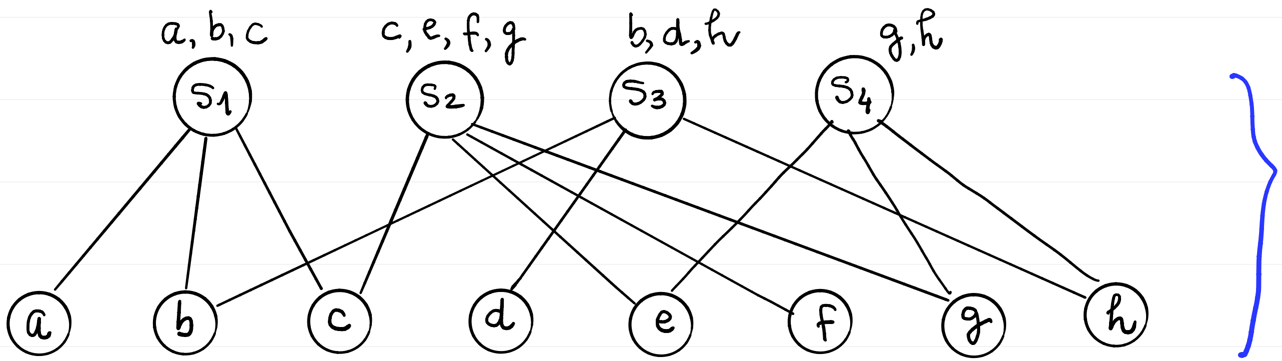
$S = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$

$S_1 = \{a, b, c\}$

$S_2 = \{c, e, f, g\}$

$S_3 = \{b, d, h\}$

$S_4 = \{g, h\}$



Teorema H (Teorema de Hall na sua versão original)

Uma família $\{S_1, S_2, \ldots, S_n\}$ de subconjuntos finitos de um cj.to S tem um SRD se e só se

não necessariamente distintos

$$\left|\bigcup_{j\in J} S_j\right| \geq |J| \quad \forall J \subseteq \{1,2,..,n\}$$

- **EXERCÍCIO**: Prove que o Teorema H é equivalente ao Teorema 5.2 (Formulação provada por König e Egerváry)

Algoritmo para encontrar um emparelhamento máximo num grafo bipartido

ALGORITMO (grafo bipartido)

Entrada: Grafo bipartido G com bipartição (X, Y)

Saída: Emparelhamento E que cobre X, caso exista; ou um subconjto S de X tal que $|Adj(S)| < |S|$.

0. [Inicialização] $E \leftarrow$ emparelhamento arbitrário em G.

1. Se E cobre todos os vértices de X, ok. Pare.
   Caso contrário, tome $u \in X$, u não coberto por E.
   $S \leftarrow \{u\}$
   $T \leftarrow \emptyset$

2. Se $Adj(S) = T$ então $|Adj(S)| < |S|$. Pare.
   (Pelo Teo. de Hall, não existe emparelhamento que cobre X).
   Caso contrário, tome $y \in Adj(S) \setminus T$.

3. Se y é coberto por E então $\left\{ \begin{array}{l} \text{seja } z \text{ t.q. } yz \in E \\ S \leftarrow S \cup \{z\} \\ T \leftarrow T \cup \{y\} \\ \text{Vá para o Passo 2.} \end{array} \right.$

   senão $\left\{ \begin{array}{l} \text{seja } P \text{ um caminho } E\text{-alt. de } u \text{ a } y \\ E \leftarrow E \,\Delta\, AP \\ \text{Vá para o Passo 1} \end{array} \right.$

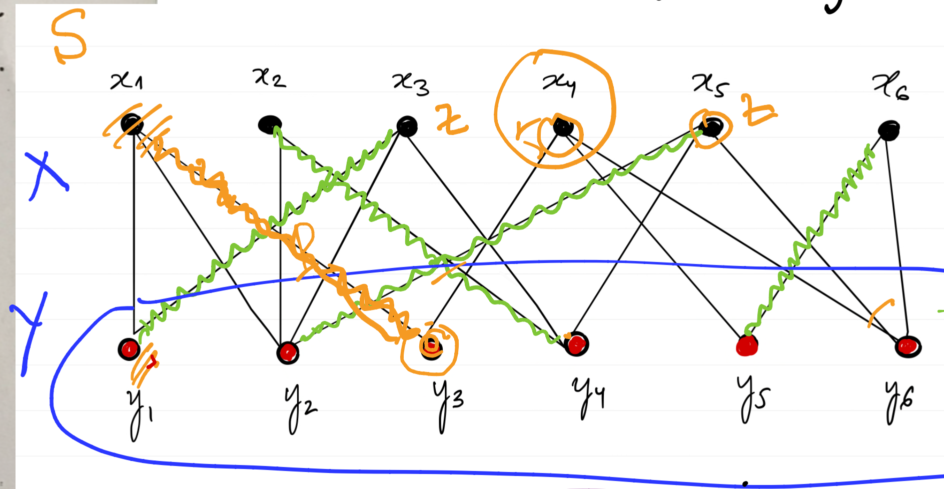
Comparar com 1ª prova do Teo. Hall

artigo clássico

Paths, flowers and trees

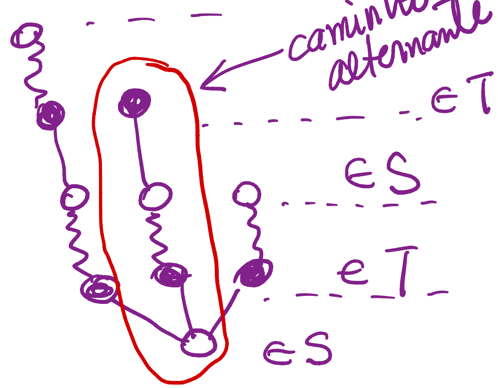
(Edmonds)

$E = \{x_3y_1, x_2y_4, x_5y_2, x_6y_5\}$



Idéia básica

construir árvores alternantes



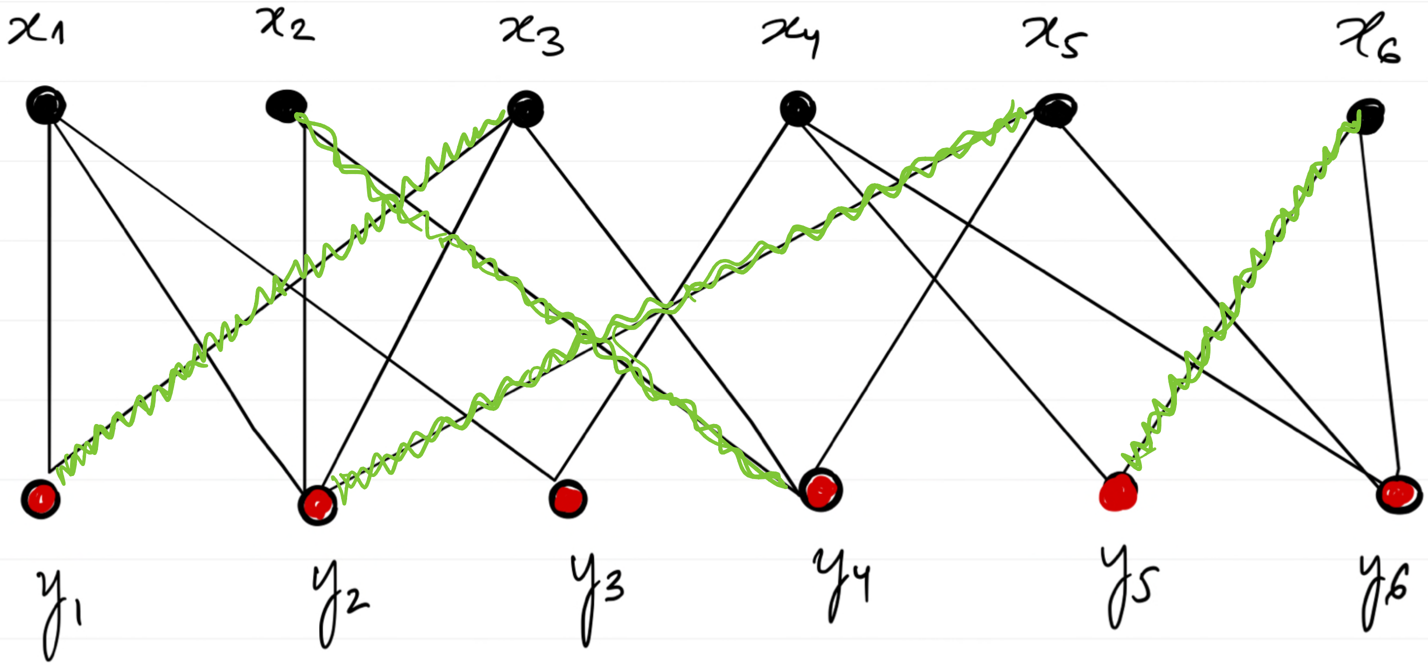
$$E = \{x_3y_1,\ x_2y_4,\ x_5y_2,\ x_6y_5\}$$

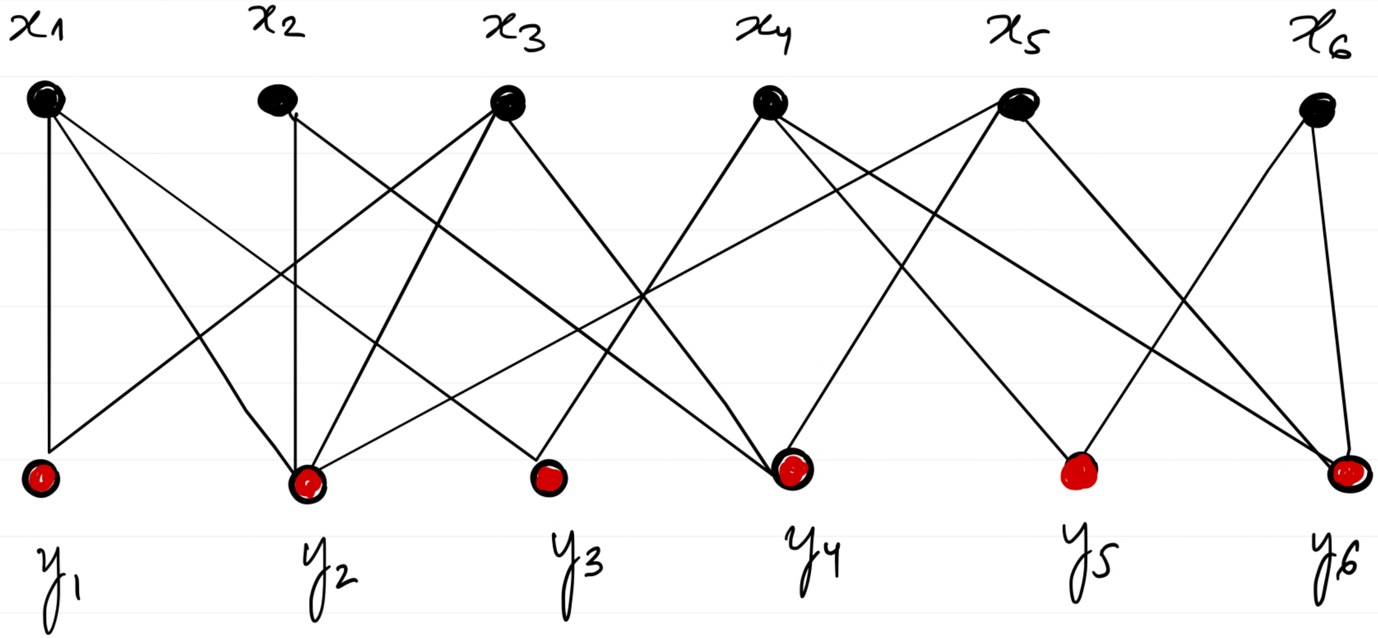
empar. inicial

EXERCÍCIO p/ casa

Aplicar o algoritmo neste grafo G

G




x_1
x_2
x_3
x_4
x_5
x_6
y_1
y_2
y_3
y_4
y_5
y_6

Caracterização de existência de um empar. perfeito

Teorema de Tutte * 1947

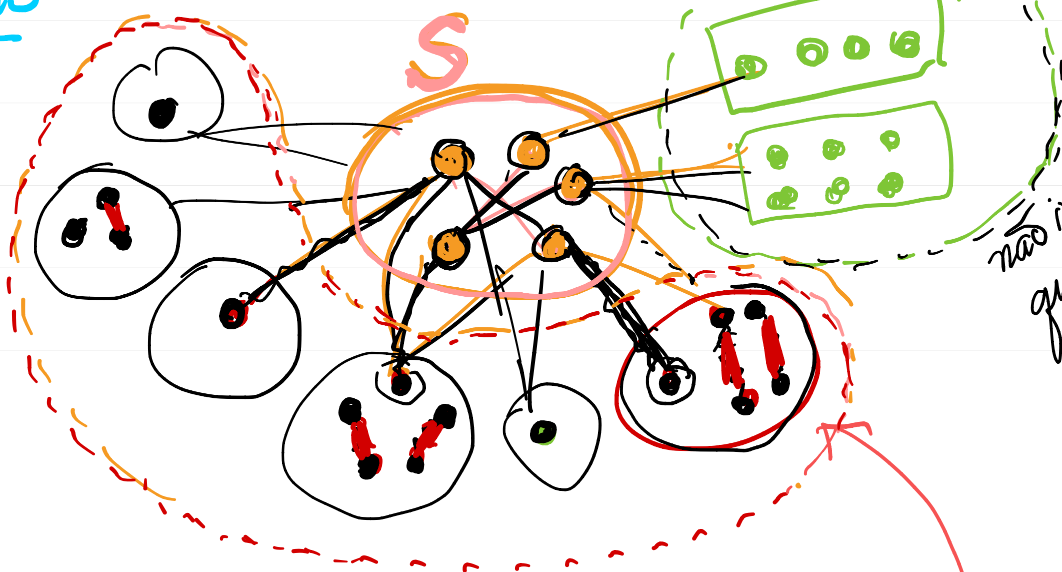
Seja G um grafo (conexo).

$$G \text{ tem um empar. perfeito} \iff c_i(G-S) \le |S| \quad \forall\, S \subseteq V(G)$$

compon. ímpares de G-S

* William Tutte

Ver material extra na página da disciplina.



compon. pares

par de elementos

não importa quantos são

Componentes ímpares

São 6 (neste exemplo)

EXERCÍCIO: Entender bem o enunciado deste teorema.

Dicas e errata sobre a Lista 6

- **Exercício E22**: Corrigir o enunciado acrescentando as hipóteses (em vermelho):

  Sejam E e F emparelhamentos disjuntos, tais que $|E| > |F|$. ....

- **Exercício E24**: (Dica: inspirar-se na prova do Corol. 5.4)

- **Exercício E25**: (resolver via empar. num grafo, o probl. de aumentar apenas uma linha.) Qual?

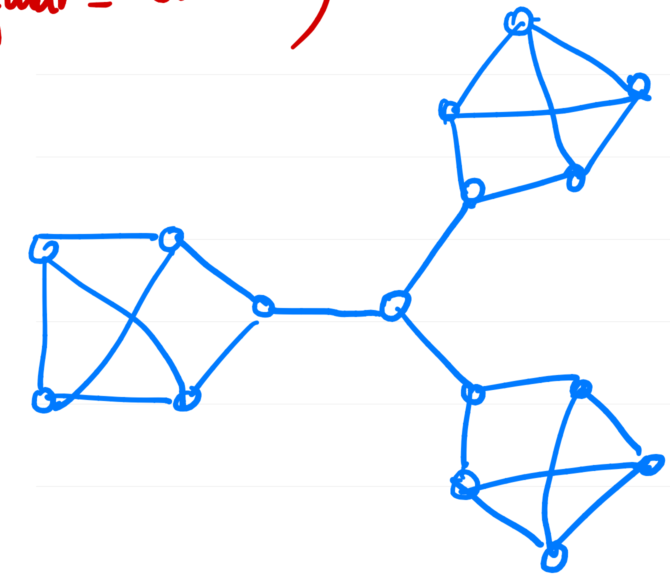
EXERCÍCIO EXTRA 1

(Petersen, 1891)

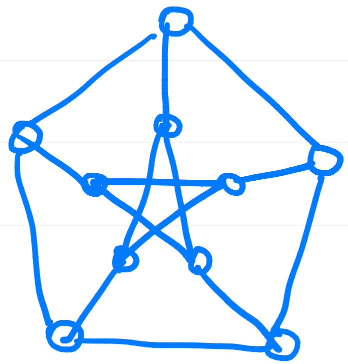
Prove que se G é 3-regular, sem pontes, então G tem um emparelhamento perfeito.

3-regular ≡ cúbico)

Dica: usar o Teorema de Tutte.



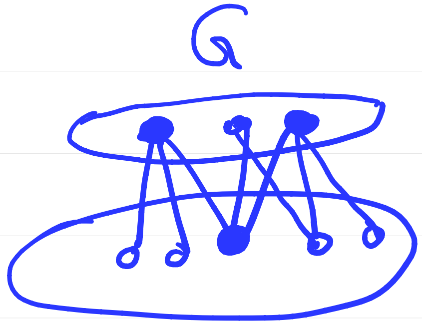
3-regular com pontes
(não tem empar. perfeito)



Grafo de Petersen

tem
(empar. perf.)

EXERCÍCIO EXTRA 2 (difícil)



Seja G um grafo bipartido.

Provar que existe em G um emparelhamento que cobre todos os vértices de grau máximo.

(com mais vértices que G)

Dica: • Dado G, (não regular) construir um grafo bipartido G' tal que

- $G' \supseteq G$
- $\delta(G') > \delta(G)$ e $\Delta(G') = \Delta(G)$

grau mínimo

- Usar essa construção p/ chegar num grafo G^* Δ-regular que contém G.