Capítulo 5 — Emparelhamentos

1 Introdução

Todos os grafos tratados neste capítulo são simples (ou seja, sem laços e sem arestas múltiplas). Um **emparelhamento** num grafo é um conjunto de arestas duas a duas não-adjacentes. Em outras palavras, um emparelhamento é um conjunto E de arestas tal que todo vértice do grafo é extremo de no máximo um elemento de E.

Aula 1

- Seja G um grafo e $X \subseteq V(G)$. Dizemos que um emparelhamento E **cobre** (ou satura) X se em cada vértice de X incide uma aresta de E. Neste caso, também dizemos que X é **coberto** (ou saturado) por E. Se $X = \{v\}$ então dizemos simplesmente que E **cobre** (ou satura) v.

- Um emparelhamento num grafo G é **perfeito** se cobre $V(G)$.

- Se uma aresta uv pertence a um emparelhamento E então dizemos que u e v **são (ou estão) emparelhados por** E.

- Se um vértice v não é coberto por um emparelhamento E então dizemos que v é **livre em relação a** E, ou simplesmente, v é **livre** (se E estiver claro pelo contexto).

PROBLEMAS DE INTERESSE:

1. Encontrar um emparelhamento máximo em um grafo. [Existe algoritmo eficiente?]

SIM Teo Berge

2. Dado um grafo e um emparelhamento E, que não é máximo, será que existe algum jeito fácil de convencer alguém de que E não é máximo?

SIM Teo Hall

3. Dado um grafo (X, Y)-bipartido, é fácil decidir se existe um emparelhamento que cobre X? E se não existe, tem um certificado simples para comprovar isso?

S Adj(S)

4. É mais fácil encontrar um emparelhamento máximo um grafo bipartido do que num grafo arbitrário?

Aula 1

SIM

5. Quando o grafo é bipartido existe algum outro parâmetro do grafo relacionado com a cardinalidade de um emparelhamento máximo?

6. Suponha que um grafo G não tenha um emparelhamento perfeito. Existe um certificado que nos convença disso?

7. Existem problemas interessantes cujas soluções (exatas ou aproximadas) dependem de soluções para problemas de emparelhamentos?

Após estudar este capítulo, esperamos que você saiba as respostas a essas perguntas.

2 Emparelhamentos Máximos

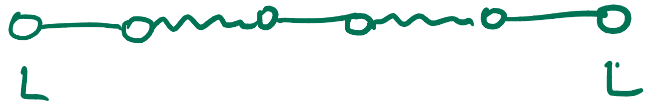
Emparelhamento maximal $\times$ Emparelhamento máximo

Um emparelhamento E num grafo é **maximal** se não existe nesse grafo um emparelhamento E' que contém E propriamente. Um emparelhamento E num grafo G é **máximo** se não existe em G nenhum emparelhamento de cardinalidade maior que $|E|$.
OBS: Note que nem todo emparelhamento maximal é máximo. Claramente, todo emparelhamento máximo é maximal.

Aula 1

Definição. Seja E um emparelhamento num grafo G. Um **caminho E-alternante** em G é um caminho cujas arestas estão alternadamente em E e em $A(G) \setminus E$. Um tal caminho com ambos os extremos livres (em E) é chamado um **caminho aumentador** (*augmenting path*).

▷ Caracterização de emparelhamentos máximos



> **Teorema 5.1. (Berge, 1957)**
> Seja G um grafo e E um emparelhamento em G. Temos que E é um emparelhamento máximo se e só se G não tem nenhum caminho E-alternante com ambos os extremos livres.

3 Emparelhamentos em grafos bipartidos

Todos os resultados abaixo serão provados em aula. Algumas vezes, serão discutidas duas ou mais provas distintas. (Desejável: conhecer pelo menos 2 provas distintas do Teorema de Hall.)

Os dois teoremas desta seção são centrais na teoria de emparelhamentos em grafos.

Aula 1

Teorema 5.2. (Hall, 1935)
Seja G um grafo (X, Y)-bipartido. Então
G tem um emparelhamento que cobre X se e só se $|\mathrm{Adj(S)}| \geq |\mathrm{S}|$ para todo $S \subseteq X$.

Prova 1. Usando caminhos alternantes. (Vista na aula anterior.) ✓

Prova 2. Por indução em $|X|$. (Exercício para casa (com dica na aula).) ✓

Prova 3. Usando o Teorema min-max de König . (Veremos adiante.) ✓

28 abril 2020

Aula 2

Corolário 5.3.
Seja G um grafo (X, Y)-bipartido. Se $|\mathrm{Adj(S)}| \geq |\mathrm{S}| - \mathrm{k}$ para todo $S \subseteq X$ e algum inteiro fixo k, então G tem um emparelhamento de cardinalidade $|X| - k$.

Prova .

$|\mathrm{Adj}(S)| \geq |X| - k$

G' é o grafo obtido de G acrescentando-se k novos vértices, todos adjac. aos vért. de X.

Ou seja, $G' = (X, Y \cup Y')$, onde $|Y'| = k$, e

$A(G') = A(G) \cup \{xy' : x \in X,\ y' \in Y'\}$.

G' é $(X, Y \cup Y')$-bipartido e satisfaz condição (H)

Pelo Teo. Hall, G' tem um empar. E que cobre X.

Então $E \cap A(G)$ é um empar. em G de cardinalid. $\geq |X| - k$. ∎

Corolário 5.4.
Todo grafo bipartido k-regular com $k \geq 1$ tem um emparelhamento perfeito.

Prova .

Seja G um grafo (X,Y)-bipartido, k-regular, $k \geq 1$.

$$k|Y| = |A(G)| = k|X| \Longrightarrow |X| = |Y|.$$

Vamos provar que G satisfy (H).

- $S \subseteq X$

Sejam $A_1 = \{ a \in A(G) : a \text{ incide em } S \}$ e

$A_2 = \{ a \in A(G) : a \text{ incide em } Adj(S) \}$.

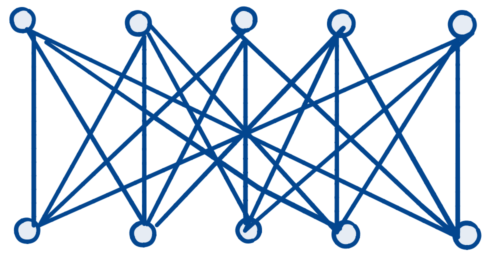
$$A_1 \subseteq A_2 \Rightarrow \underbrace{|A_1|}_{k|S|} \leq \underbrace{|A_2|}_{k|Adj(S)|}$$

$$|S| \leq |Adj(S)| \leftarrow (H)$$

Pelo Teo Hall, G tem um emp. que cobre X. Como $|X| = |Y|$, esse empar. é perfeito.

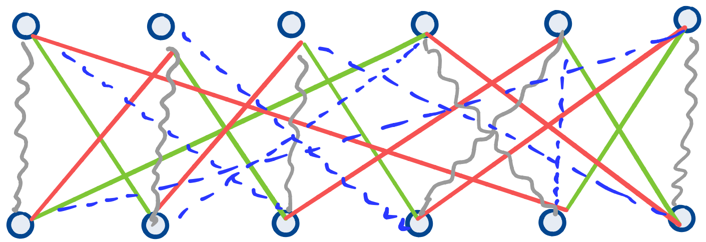
Corolário 5.5.
Todo grafo bipartido k-regular com $k \geq 2$ tem k emparelhamentos perfeitos dois a dois disjuntos.

Prova . (Exercício) (Indução em k.)



Definição: Seja k um inteiro positivo. Um subgrafo gerador k-regular de um grafo G é chamado ***k*-fator** de G. Assim, um **1-fator** de G é simplesmente um subgrafo gerado pelas arestas de um emparelhamento perfeito de G; um **2-fator** é um subgrafo gerador de G que é uma união de circuitos disjuntos nos vértices.

Corolário 5.6.
Todo grafo bipartido k-regular, $k \geq 1$ tem pelo menos $\binom{k}{2}$ 2-fatores distintos.



G tem k emparelham 2 a 2 disj.

Cada 2 desses k empar $\rightarrow$ 2-fator

em G há $\binom{k}{2}$ 2-fatores

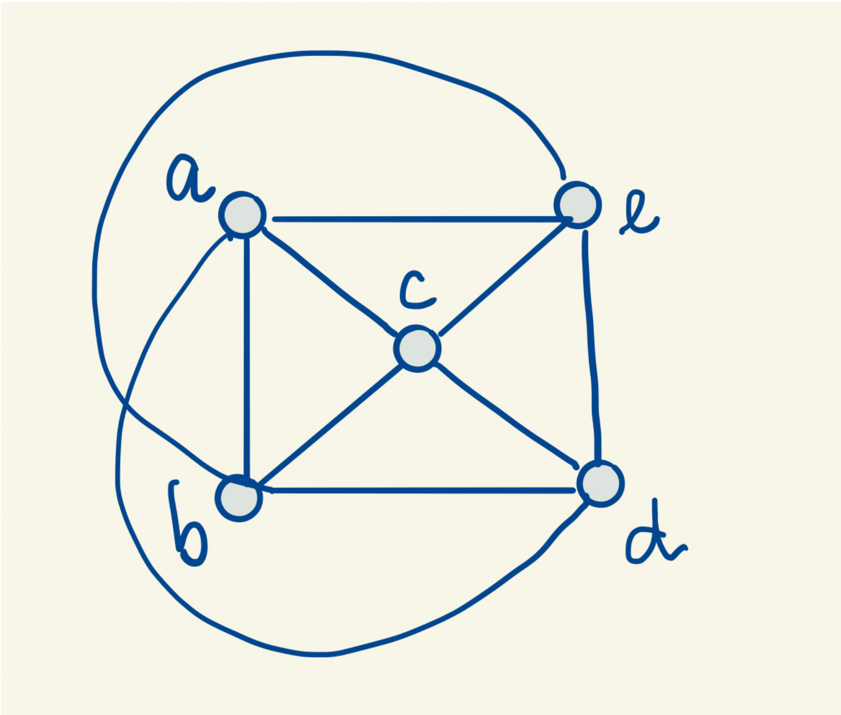
Material Extra (curiosidade) - só esta página

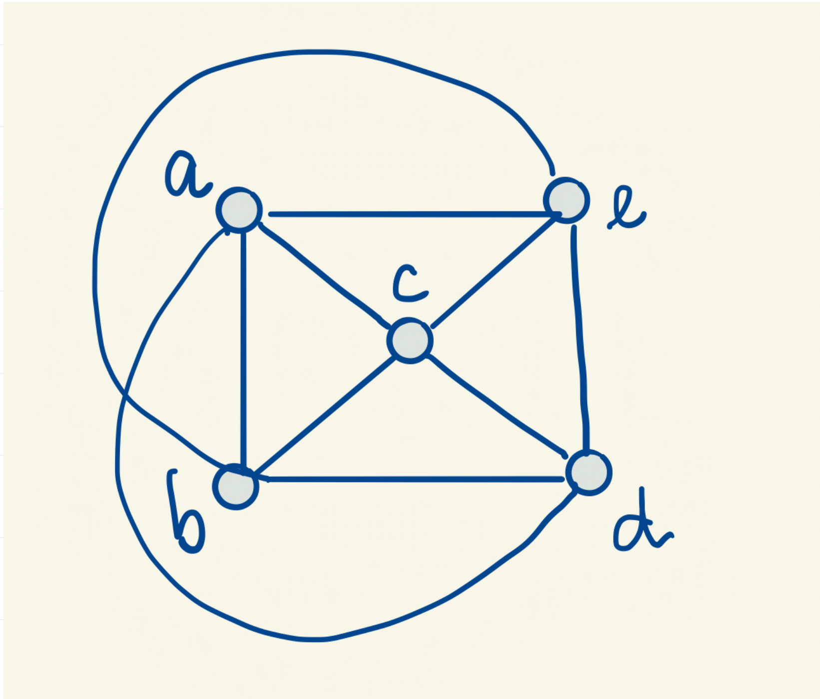
O seguinte resultado, para grafos arbitrários, é considerado um dos primeiros resultados na teoria dos grafos.

G conexo

Teorema do 2-fator (Petersen, 1891): Se G é grafo $2k$-regular, $k \geq 1$, então o conjunto das arestas de G pode ser particionado em k 2-fatores arestas-disjuntos. (Também dizemos simplesmente que G admite uma decomposição em k 2-fatores.)

(Ideia da prova: grafo euleriano + "splitting" de vértices.)





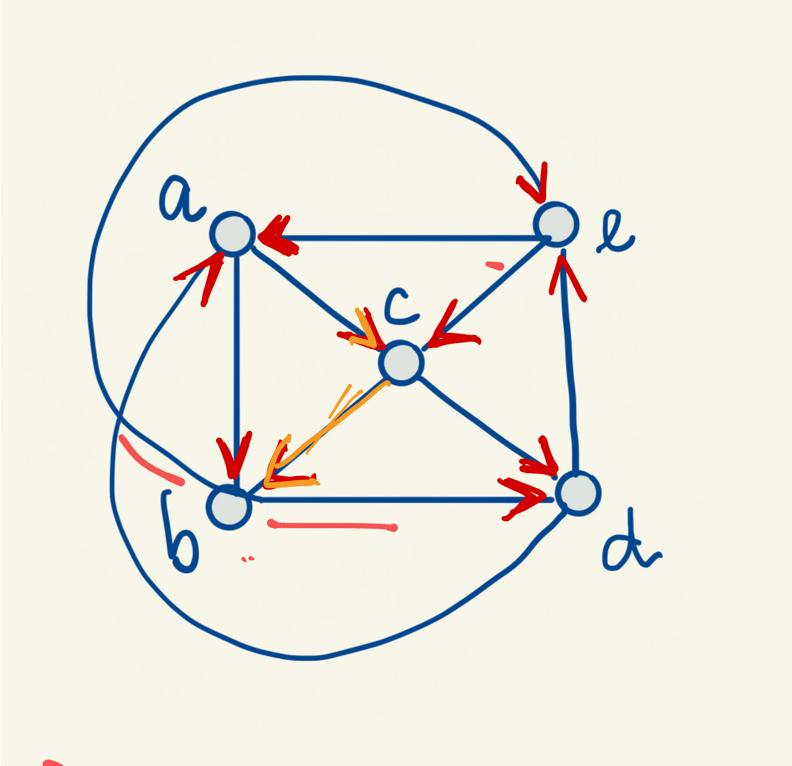
G $2k$-regular, $k=2$

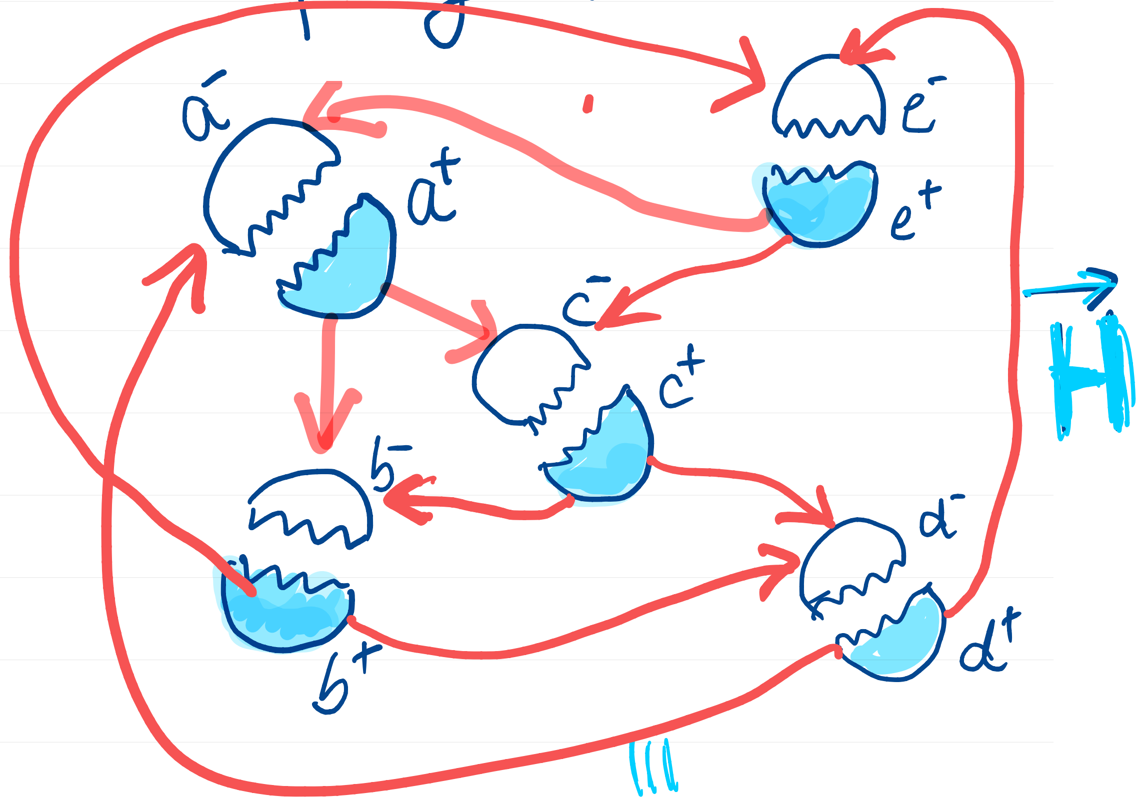
$\Downarrow$

G é euleriano $\rightarrow$ Trilha euleriana

$T = (a, c, b, d, e, c, d, a, b, e, a)$

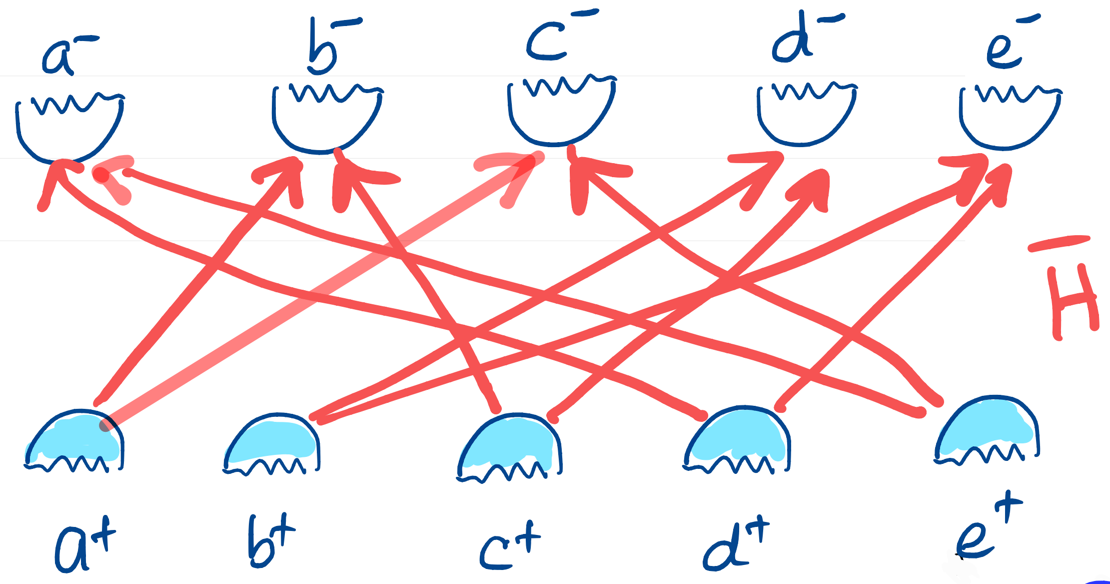
"splitting" (divisão) de cada vértice





$\vec{G}$ grafo obtido de G orientando as arestas no sentido da trilha T

$$\boxed{g^+_{\vec{G}}(v) = g^-_{\vec{G}}(v) = k}$$



Seja H o grafo obtido de $\vec{G}$ tomando

$$V(H) = \{ x^-, x^+ : x \in V(\vec{G}) \} \text{ e}$$

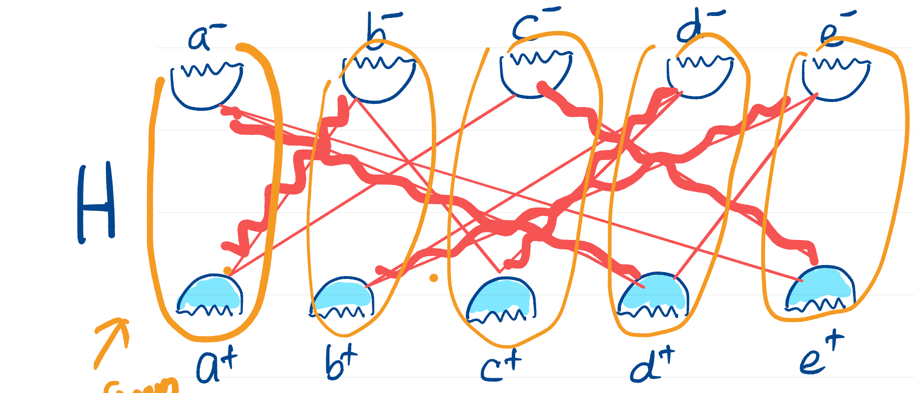
$$A(H) = \{ \{x^+, y^-\} : xy \in A(\vec{G}) \}.$$

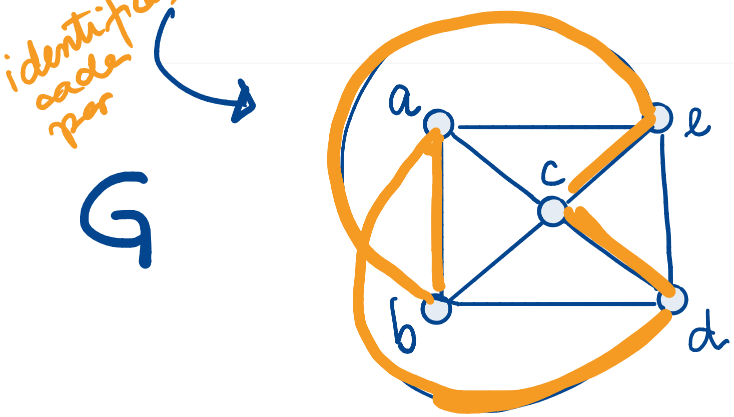
H é um grafo bipartido k-regular.

$\Downarrow$

Pelo Corol. 5.5,

H tem k emp. perf. 2 a 2 disj.



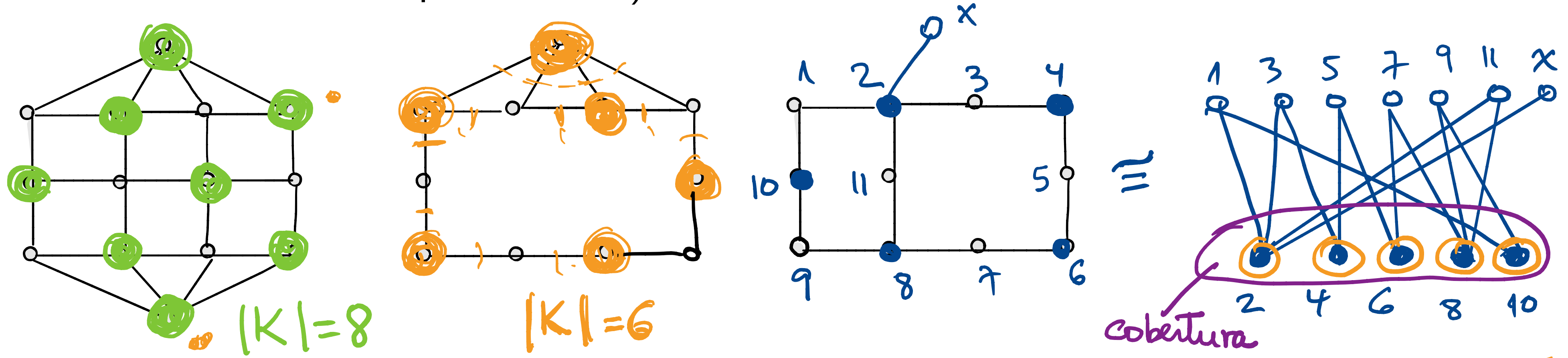


Identificando-se cada par de vértices x^-, x^+ em H a um vértice x, obtemos o grafo G. Além disso, cada emparelhamento em H dá origem a um 2-fator em G.

Portanto, G tem k 2-fatores arestas-disjuntos.

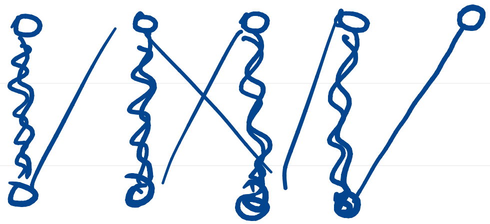
Definição: Uma **cobertura** de um grafo G é um conjunto $K \subseteq V(G)$ tal que toda aresta de G tem pelo menos um dos extremos em K. (Mais precisamente, K é uma cobertura das arestas de G por vértices.)

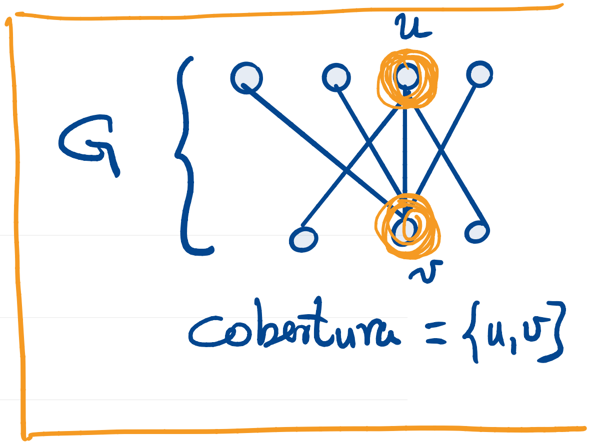
Ex:



Relação entre emparelhamentos e coberturas em um grafo.

E : emparelhamento em G
K: cobertura em G





Pelo menos um dos extremos de cada aresta de E tem que pertencer à uma cobertura de G.

$|K| \geq |E|$ $\Leftarrow$

$\forall$ cobert K e $\forall$ emp. E em G

PROBLEMA DA COBERTURA MÍNIMA

Dado um grafo, encontrar uma cobertura mínima

Problema difícil (NP-difícil)

- Fácil se G é bipartido!

empar. maximiza → | ← cobert. minimiza

$Emp(G) \leq cob(G)$ (*)

Notação

$Emp(G)$ = cardinalidade de um empar. máx. em G

$cob(G)$ = " " uma cobertura mínima em G.

Vimos que $Emp(G) \leq cob(G)$ (*)

Perg: pode ocorrer = em (*)?

Resp: SIM,

quando G é bipartido

Teorema 5.6. (König*, 1931) – Teorema min-max
Seja G um grafo (X, Y)-bipartido. Então a cardinalidade de um emparelhamento máximo em G é igual à cardinalidade de uma cobertura mínima.

Também provado por Egerváry

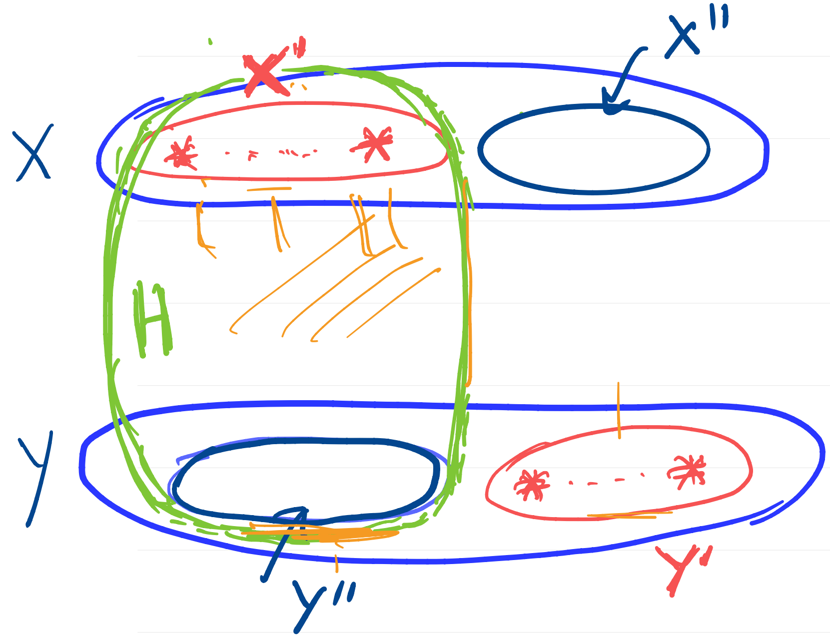
* König-Egerváry

Prova .

$$G \text{ bipartido} \Rightarrow \underbrace{Emp(G)}_{max} = \underbrace{cob(G)}_{min}$$

É imediato que $Emp(G) \leq cob(G)$.
Vamos mostrar que $Emp(G) \geq cob(G)$.

Seja G um grafo (X,Y)-bipartido e
K uma cobertura mínima de G.



Defina os conjuntos

$$\begin{cases} X' = X \cap K \text{ e} \\ X'' = X \setminus X'. \end{cases}$$

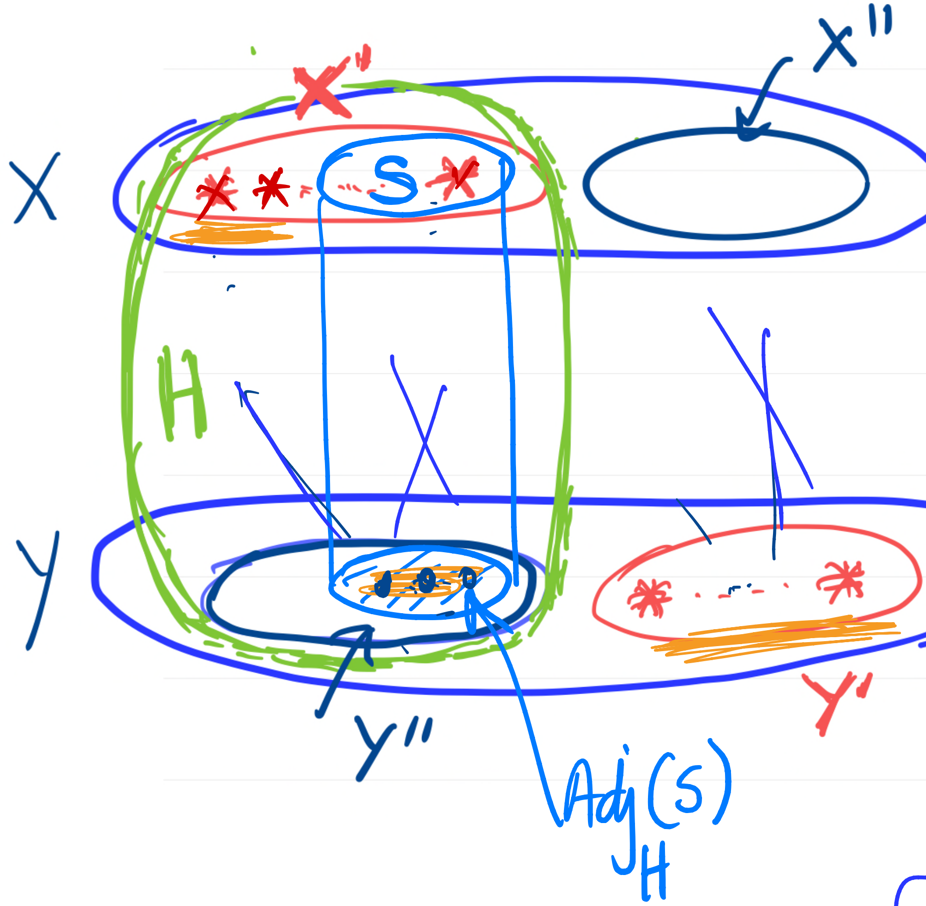
$$\begin{cases} Y' = Y \cap K \text{ e} \\ Y'' = Y \setminus Y'. \end{cases}$$

Seja $H = G[X'' \cup Y'']$ subg. de G induzido por $X' \cup Y''$.

Claramente, H é (X', Y'')-bipartido.

Vamos mostrar que H tem um empar. que cobre X'.

Para isso, $\underbrace{\text{vamos mostrar que}}$ H satisfaz a condição do Teo. Hall.



Seja $S \subseteq X'$

Vamos provar que

$$|\mathrm{Adj}_H(S)| \geq |S| .$$

Seja $\hat{K} = (K \setminus S) \cup \mathrm{Adj}_H(S)$

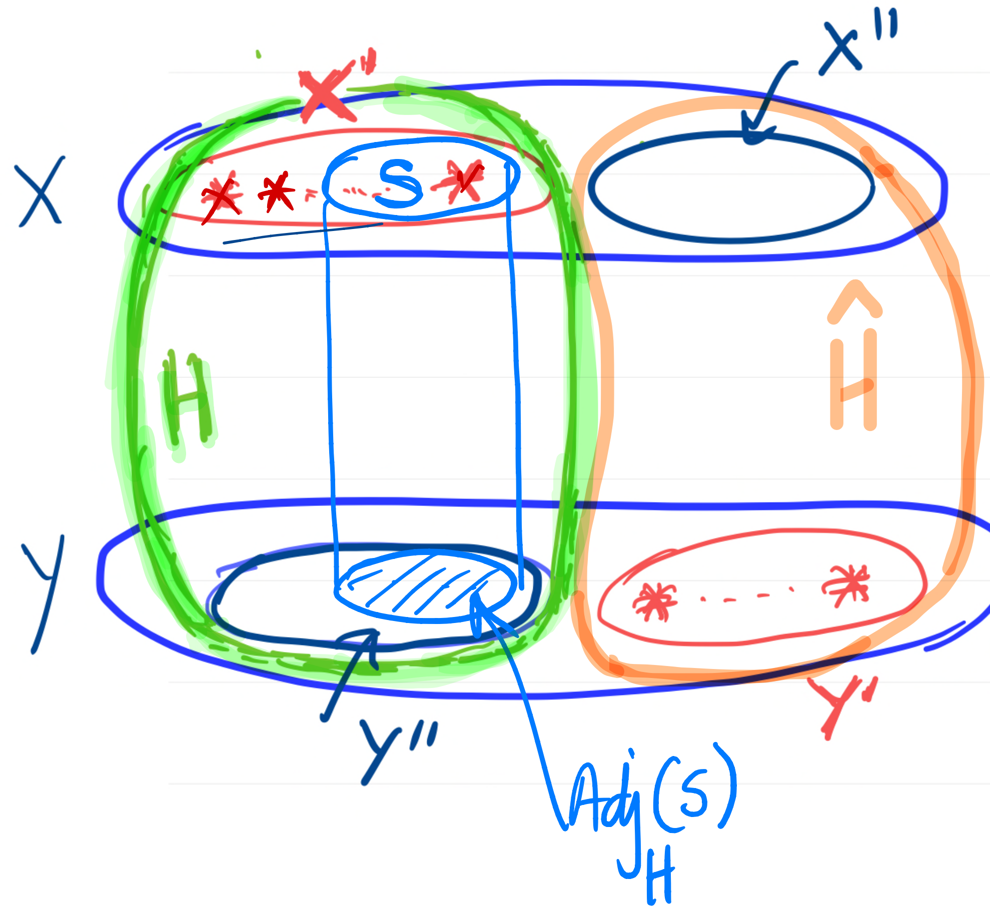
Claramente, $\hat{K}$ é uma cobert. de G.

Como K é uma cobert. mínima,

então $|K| \leq |\hat{K}|$. Logo,

$$|K| \leq |(K \setminus S) \cup \mathrm{Adj}_H(S)| = |K| - |S| + |\mathrm{Adj}_H(S)| .$$

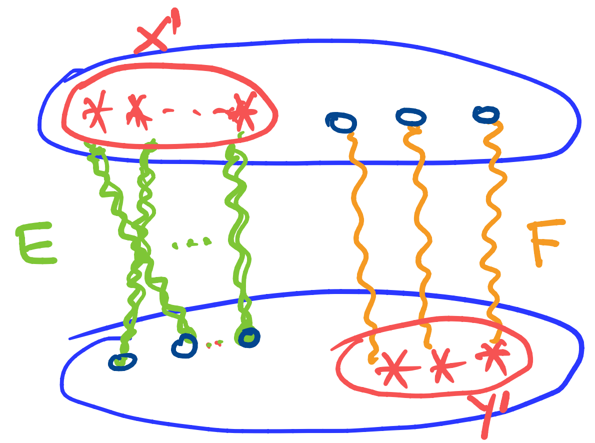
Portanto, $|\mathrm{Adj}_H(S)| \geq |S|$. Pelo Teo. de Hall, H tem um emparelhamento, digamos E, que cobre X'.



Seja

$\hat{H} = G[X'' \cup Y']$

Analogamente ao caso anterior, podemos provar que $\hat{H}$ tem um empar., digamos F que cobre Y'.



Então $E \cup F$ é um empar. em G tal que $|E \cup F| = |K|$.

Neste caso, $E \cup F$ é um empar. máximo em G. Portanto,

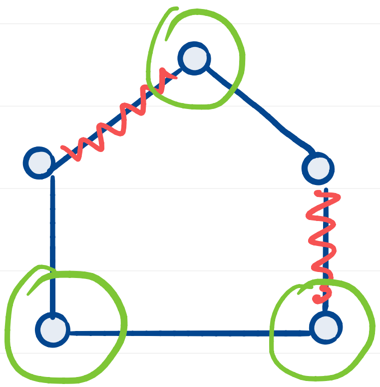
$$Emp(G) = cob(G).$$

■

OBS: A hipótese G bipartido é essencial!

Quando G não é bipartido, a igualdade $\mathrm{Emp}(G) = \mathrm{cob}(G)$ pode não ocorrer.

Ex: $G \cong C_n$, n ímpar (circuito ímpar)



$$\mathrm{Emp}(C_5) = 2$$
$$\mathrm{cob}(C_5) = 3$$

$$\mathrm{Emp}(C_n) = \lfloor n/2 \rfloor$$
$$\mathrm{Cob}(C_n) = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$$

$\neq$ qdo n ímpar

Qdo G é bipartido, a igualdade min-max pode ser provada usando dualidade em programação linear.

Prova 3 do Teorema de Hall

(usando Teo. min-max König-Egerváry)

Algoritmo para encontrar um emparelhamento máximo num grafo bipartido

ALGORITMO (grafo bipartido)

Entrada: Grafo bipartido G com bipartição (X, Y)

Saída: Emparelhamento E que cobre X, caso exista; ou um subconjto S de X tal que $|Adj(S)| < |S|$.

0. [Inicialização] $E \leftarrow$ emparelhaᵒ arbitrário em G.

1. Se E cobre todos os vértices de X, ok. Pare.
   Caso contrário, tome $u \in X$, u não coberto por E.
   $S \leftarrow \{u\}$
   $T \leftarrow \emptyset$.

2. Se $Adj(S) = T$ então $|Adj(S)| < |S|$. Pare.
   (Pelo Teo. de Hall, não existe emparelhaᵒ que cobre X).
   Caso contrário, tome $y \in Adj(S) \setminus T$.

3. Se y é coberto por E então
   - seja z tq. $yz \in E$
   - $S \leftarrow S \cup \{z\}$
   - $T \leftarrow T \cup \{y\}$
   - Vá para o Passo 2.

   senão
   - seja P um caminho E-alt. de u a y
   - $E \leftarrow E \,\Delta\, AP$
   - Vá para o Passo 1.