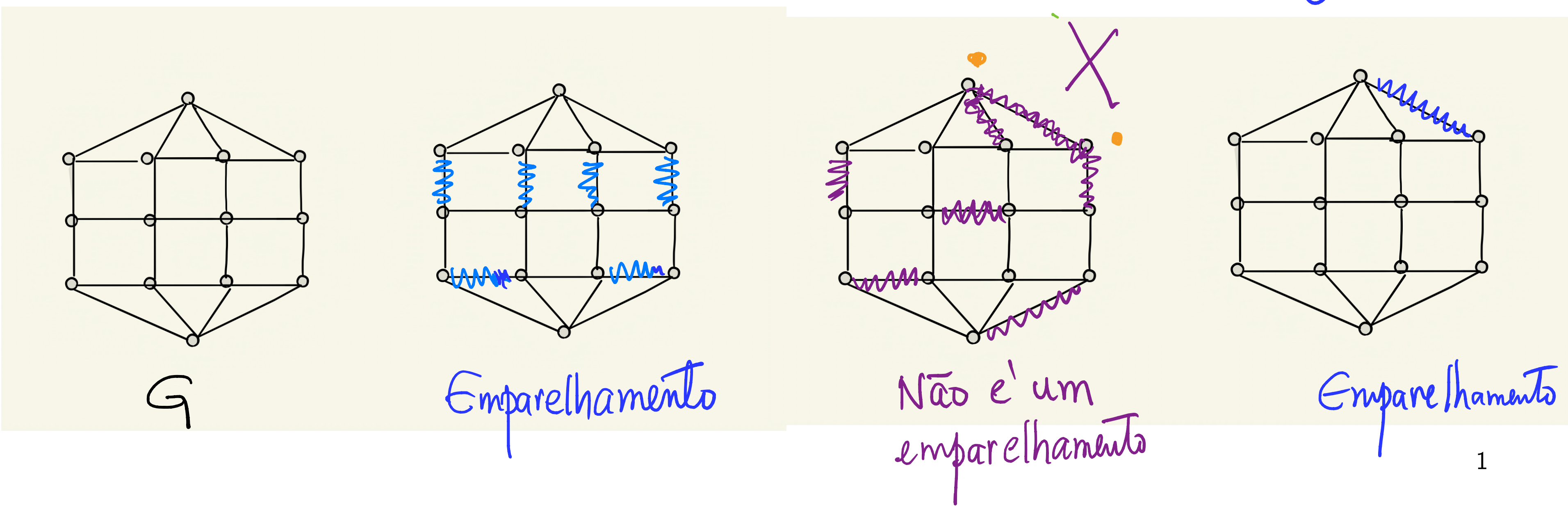
Capítulo 5 — EMPARELHAMENTOS

1 Introdução

Todos os grafos tratados neste capítulo são simples (ou seja, sem laços e sem arestas múltiplas). Um **emparelhamento** num grafo é um conjunto de arestas duas a duas não-adjacentes. Em outras palavras, um emparelhamento é um conjunto E de arestas tal que todo vértice do grafo é extremo de no máximo um elemento de E.

Exemplos: 'matching'



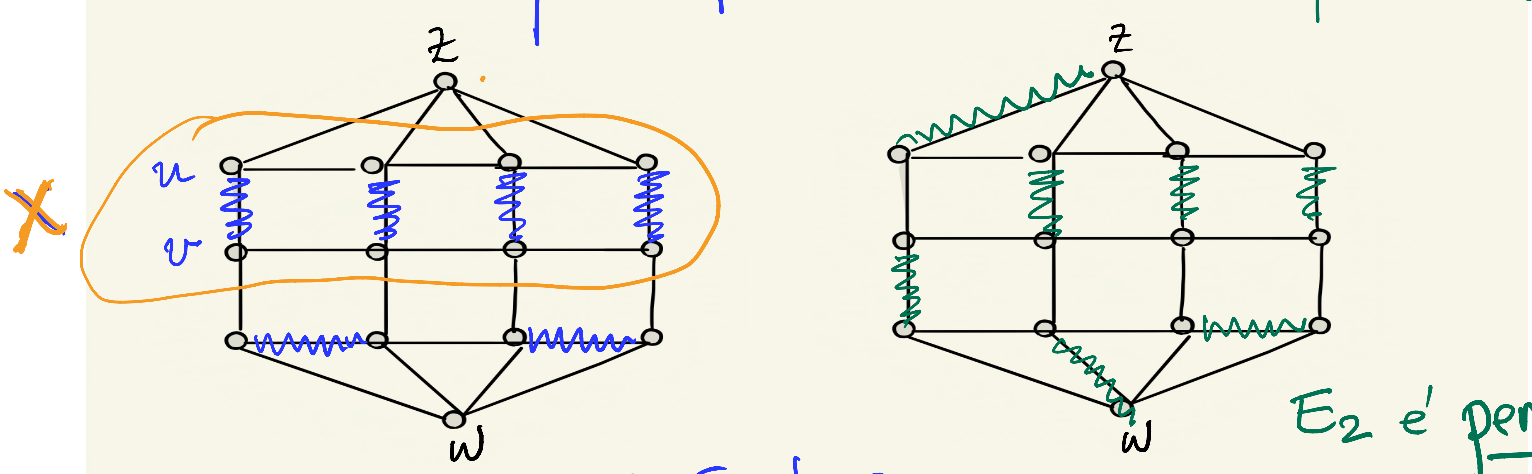
- Seja G um grafo e $X \subseteq V(G)$. Dizemos que um emparelhamento E **cobre** (ou satura) X se em cada vértice de X incide uma aresta de E. Neste caso, também dizemos que X é **coberto** (ou saturado) por E. Se $X = \{v\}$ então dizemos simplesmente que E **cobre** (ou satura) v.

- Um emparelhamento num grafo G é **perfeito** se cobre $V(G)$.

- Se uma aresta uv pertence a um emparelhamento E então dizemos que u e v **são (ou estão) emparelhados por** E.

- Se um vértice v não é coberto por um emparelhamento E então dizemos que v é **livre em relação a** E, ou simplesmente, v é **livre** (se E estiver claro pelo contexto).

Empar. E_1 Empar. E_2



E_2 é perfeito

(E_2 cobre $V(G)$)

E_1 cobre u

E_1 cobre v

E_1 cobre X

E_1 não cobre z

E_1 não cobre w

z é livre (em relação a E_1)

PROBLEMAS DE INTERESSE:

Sim 1. Encontrar um emparelhamento máximo em um grafo. [Existe algoritmo eficiente?]

Berge 2. Dado um grafo e um emparelhamento E, que não é máximo, será que existe algum jeito fácil de convencer alguém de que E não é máximo?

Hall 3. Dado um grafo (X, Y)-bipartido, é fácil decidir se existe um emparelhamento que cobre X? E se não existe, tem um certificado simples para comprovar isso?

4. É mais fácil encontrar um emparelhamento máximo um grafo bipartido do que num grafo arbitrário?

5. Quando o grafo é bipartido existe algum outro parâmetro do grafo relacionado com a cardinalidade de um emparelhamento máximo?

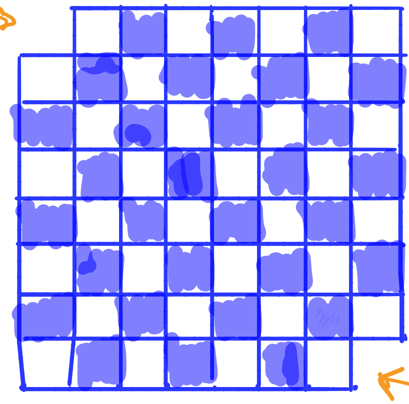
6. Suponha que um grafo G não tenha um emparelhamento perfeito. Existe um certificado que nos convença disso?

7. Existem problemas interessantes cujas soluções (exatas ou aproximadas) dependem de soluções para problemas de emparelhamentos?

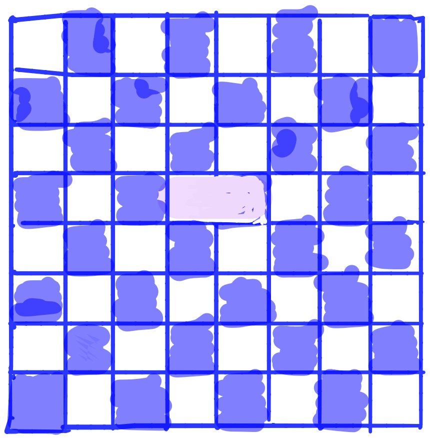
Após estudar este capítulo, esperamos que você saiba as respostas a essas perguntas.

Problemas sobre tabuleiro de xadrez $T_{8\times 8}$ e dominós

Problema 1. Considere um tabuleiro de xadrez $T_{8\times 8}$, cujas casas são quadrados 1×1. Seja T' o tabuleiro obtido de $T_{8\times 8}$ removendo-se duas casas, uma no canto superior esquerdo, e outra no canto inferior direito. É possível cobrir T' com 31 dominós 2×1?



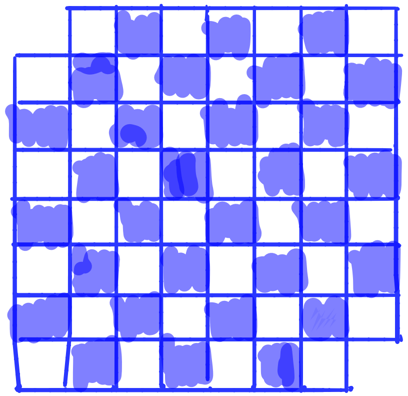
Problema 2. E se no problema acima, T' fosse o tabuleiro obtido de $T_{8\times 8}$, removendo-se duas casas contíguas de qualquer lugar de $T_{8\times 8}$?



Problema 1. Considere um tabuleiro de xadrez $T_{8\times 8}$, cujas casas são quadrados 1×1. Seja T' o tabuleiro obtido de $T_{8\times 8}$ removendo-se duas casas, uma no canto superior esquerdo, e outra no canto inferior direito. É possível cobrir T' com 31 dominós 2×1?

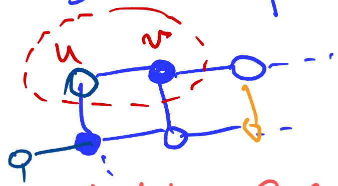
Resp.: NÃO

$T_{8\times 8}$ tem $\left\{\begin{array}{l}\text{32 casas brancas}\\ \text{32 " pretas}\end{array}\right.$

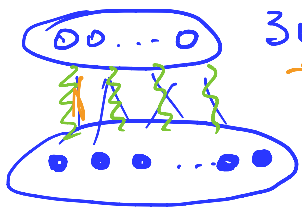


T' tem 30 casas brancas
32 " pretas

Grafo G



aresta uv indica que um dominó pode ser colocado cobrindo casas u e v



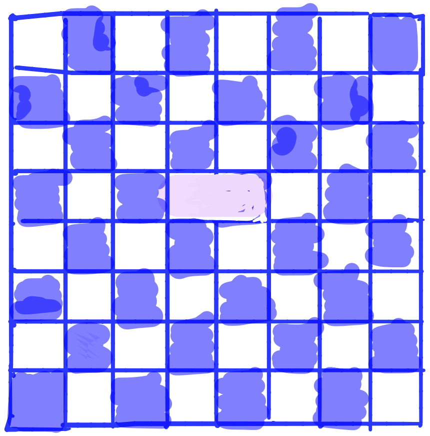
30 branc

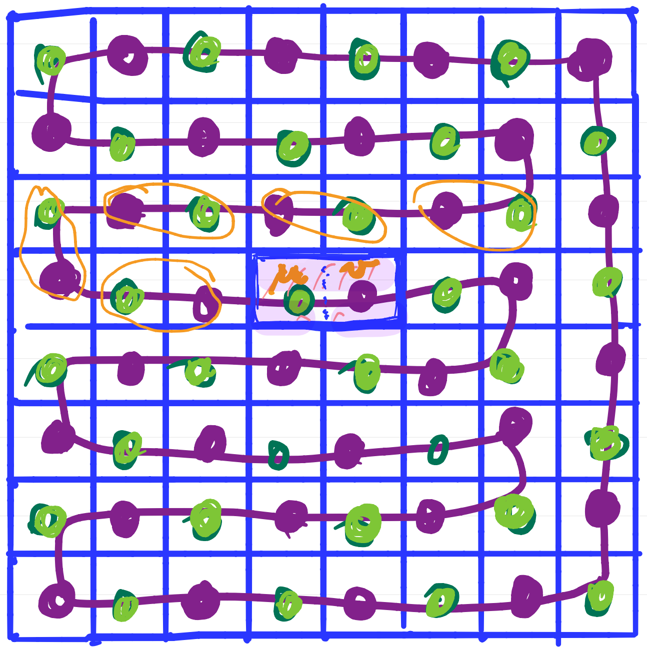
32 pretas

G não tem empar. perfeito.

Problema 2. E se no problema acima, T' fosse o tabuleiro obtido de $T_{8\times 8}$, removendo-se duas casas contíguas de qualquer lugar de $T_{8\times 8}$?

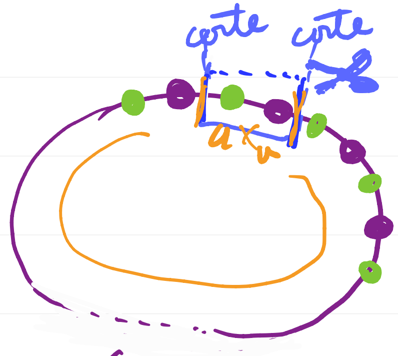
Resp. SIM





G correspondente a $T_{8\times 8}$ tem um

circuito hamiltoniano



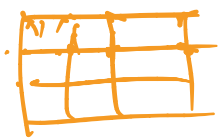
OBS: p/ qq duas casas contíguas u e v dá p/ achar um circ. ham. em G que contém uv

Caminho hamiltoniano em G' ← corresp. ao tabul. T'

(com compr. 62)

Dá p/ ser coberto por 31 dominós

(G' tem empar. perfeito)



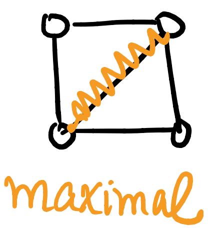
grafo grade $G_{k\times p}$

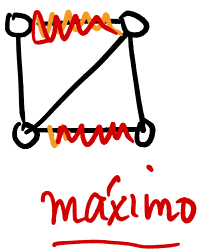
2 Emparelhamentos Máximos

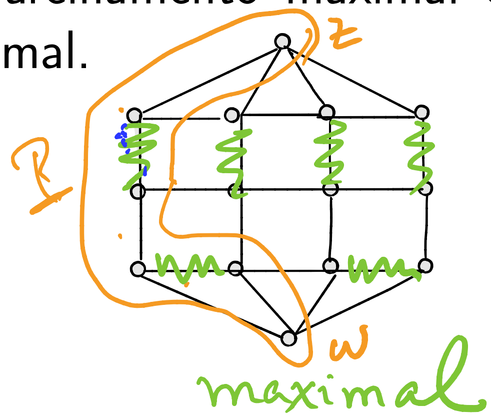
Emparelhamento maximal $\times$ Emparelhamento máximo

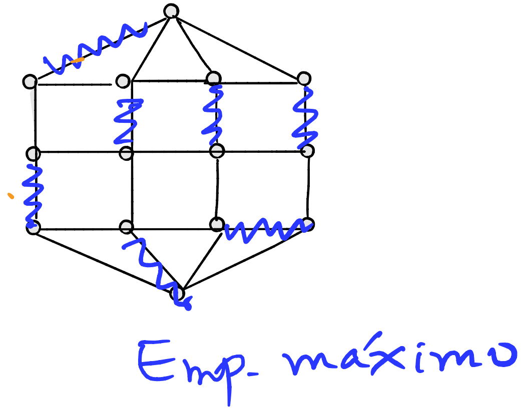
Um emparelhamento E num grafo é **maximal** se não existe nesse grafo um emparelhamento E' que contém E propriamente. Um emparelhamento E num grafo G é **máximo** se não existe em G nenhum emparelhamento de cardinalidade maior que $|E|$.
OBS: Note que nem todo emparelhamento maximal é máximo. Claramente, todo emparelhamento máximo é maximal.

Ex:

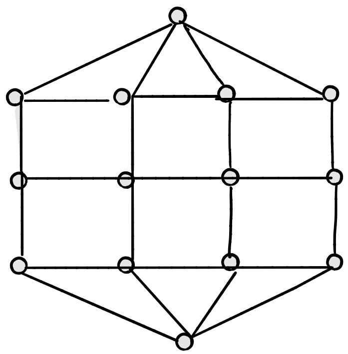


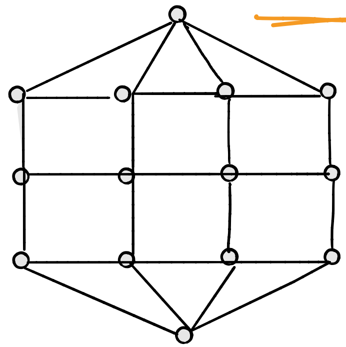






Definição. Seja E um emparelhamento num grafo G. Um **caminho** E**-alternante** em G é um caminho cujas arestas estão alternadamente em E e em $A(G) \setminus E$. Um tal caminho com ambos os extremos livres (em E) é chamado um **caminho aumentador** (*augmenting path*).



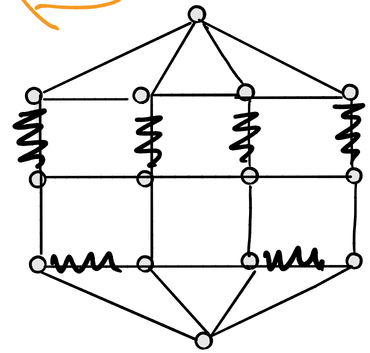


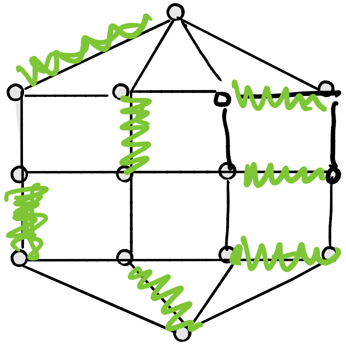
▷ Caracterização de emparelhamentos máximos

Teorema 5.1. (Berge, 1957)
Seja G um grafo e E um emparelhamento em G. Temos que E é um emparelhamento máximo se e só se G não tem nenhum caminho E-alternante com ambos os extremos livres.

(Ideias)

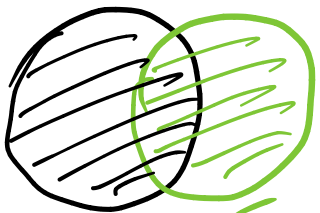
E_1



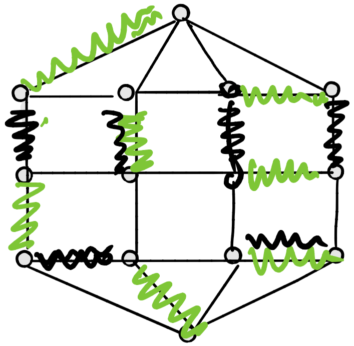


E_2

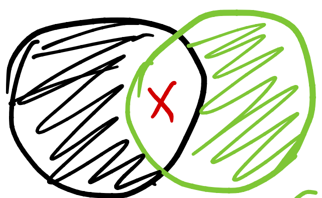
$G[E_1 \Delta E_2]$



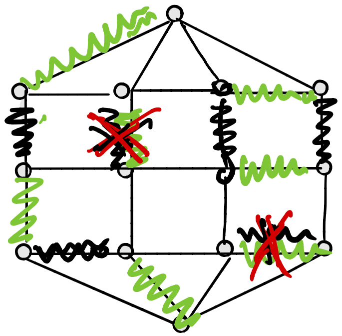
E_1 E_2



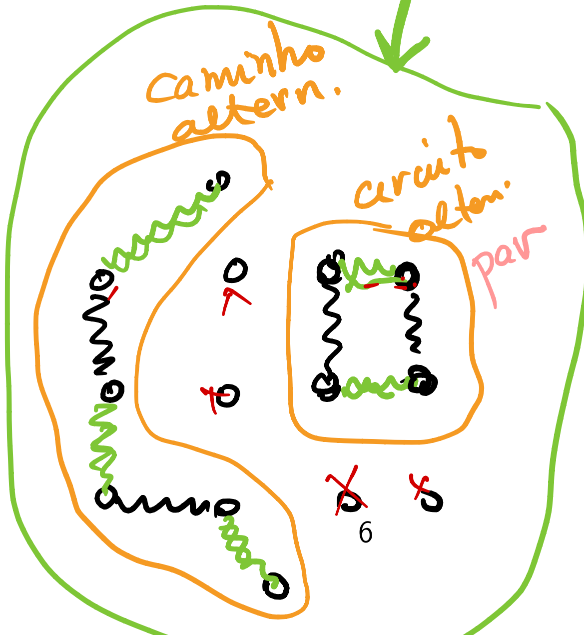
$E_1 \cup E_2$
união

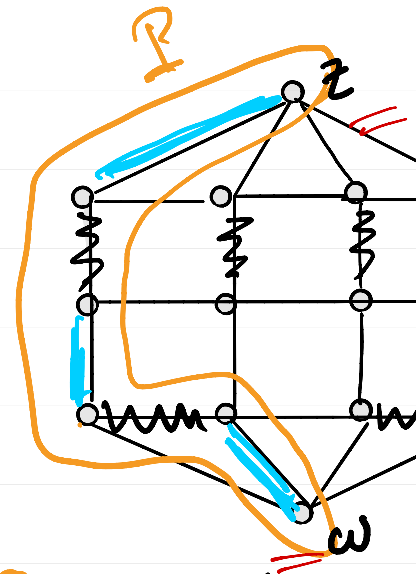


E_1 E_2

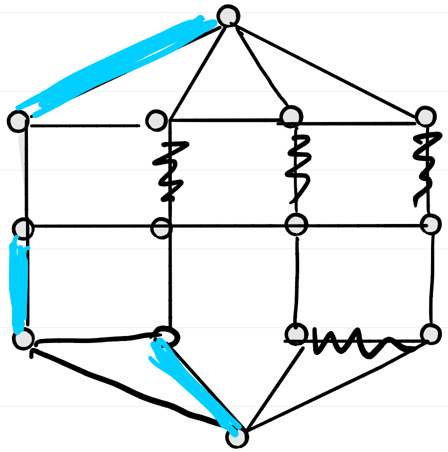


$\boxed{E_1 \Delta E_2} \rightarrow$
diferença simétrica





$\longrightarrow$



P caminho E_1-altern.
com extremos livres

$|E_1| = 6$

$\longrightarrow |E_1 \,\Delta\, A(P)| = 7$

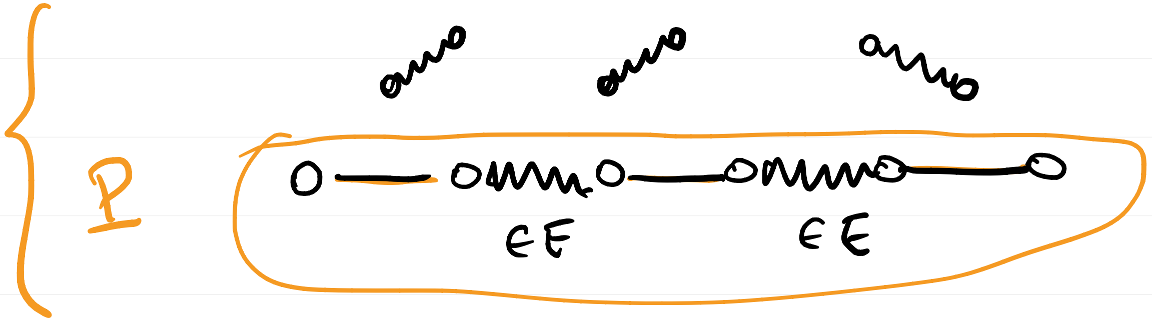
Se G tem caminho E_1-altern. $\Longrightarrow$ E_1 não é máx.
com ambos os extremos livres

PROVA (Hall) (a) E é máx $\Longrightarrow$ $\nexists$ em G cam. E-altern. com ambos os extremos livres

Prova. **(a)** Seja E um emparelhamento máximo em G. Suponha que exista em G um caminho E-alternante com ambos os extremos livres. Seja

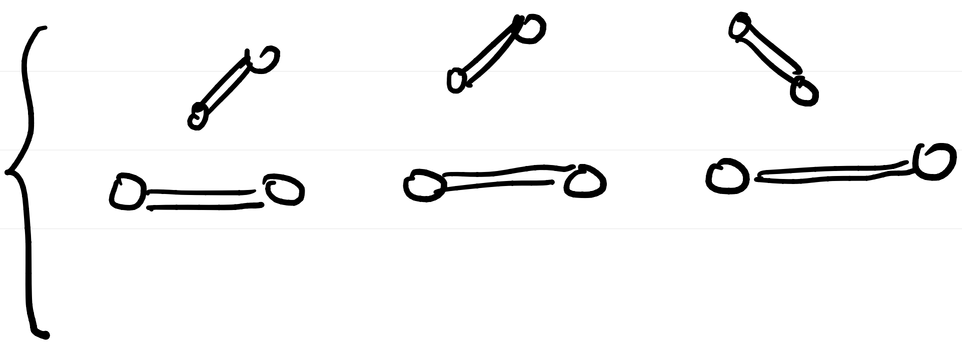
$$E' := \big(E \setminus A(P)\big) \cup \big(A(P) \setminus E\big) = \boxed{E \triangle A(P)}.$$

Claramente E' é um emparelhamento em G, e além disso, $|E'| > |E|$. Logo, E não é um emparelhamento máximo, uma contradição.



$|E| = 5$

$E \triangle A(P)$



$|E \triangle A(P)| = 6$

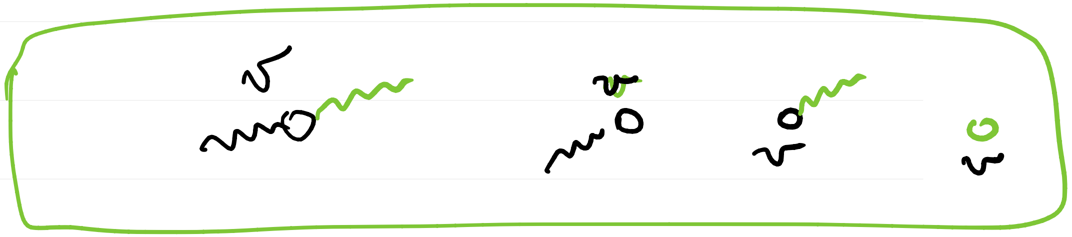
Novo empar.

(b) E empar. em G.

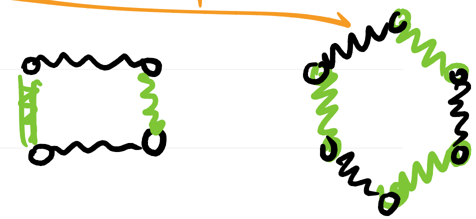
Suponha $\nexists$ cam. E-altern. com extremos livres e que E não seja máx.

Tome E^* empar. máx. e $H = G[E \triangle E^*]$

$|E^*| > |E|$

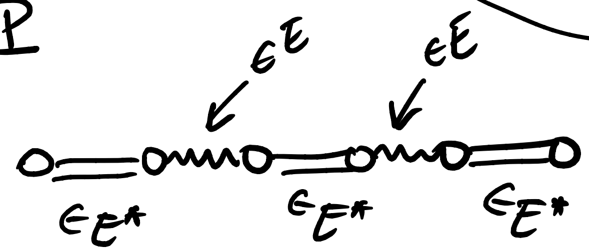


- $g_H(v) \leq 2 \quad \forall v \in V(H)$
- Os componentes de H são caminhos ou circuitos pares



Como $|E^*| > |E|$ existe em H um caminho E-altern. P com mais arestas de E^* do que de E. Então P é um cam. E-alt. com ambos os extremos livres.

P :



Mas isto é uma contradição. Portanto, E é máximo.

Prova Completa do Teo. de Hall

Prova. **(a)** Seja E um emparelhamento máximo em G. Suponha que exista em G um caminho E-alternante com ambos os extremos livres. Seja

$$E' := \Big(E \setminus A(P)\Big) \cup \Big(A(P) \setminus E\Big) = E \triangle A(P).$$

Claramente E' é um emparelhamento em G, e além disso, $|E'| > |E|$. Logo, E não é um emparelhamento máximo, uma contradição.

(b) Vamos agora provar a afirmação recíproca. Para isso, considere um emparelhamento E em G e suponha que não exista em G um caminho E-alternante com ambos os extremos livres. Suponha que E não seja máximo. Tome um emparelhamento máximo E^* em G e considere o grafo

$$H := G[E^* \triangle E].$$

Claramente, $g_H(v) \leq 2$ para todo vértice v em H. Logo, cada componente de H é um circuito ou um caminho com arestas alternadamente em E e em E^*. Como $|E^*| > |E|$, deve existir um componente de H que é um caminho, digamos P, que contém mais arestas de E^* do que de E.

```
P       0******0=======0******0=======0******0=======0******0
```

Então, a primeira e a última aresta de P pertencem a E^*, e portanto os seus extremos não são cobertos por E. Logo, P é um caminho E-alternante com ambos os extremos livres (em E). Mas isto é uma contradição. Portanto, podemos concluir que E é um emparelhamento máximo.

□

3 Emparelhamentos em grafos bipartidos

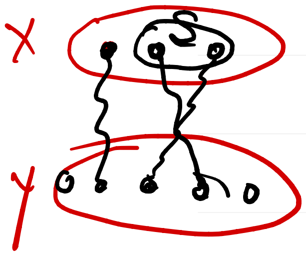
Todos os resultados abaixo serão provados em aula. Algumas vezes, serão discutidas duas ou mais provas distintas. (Desejável: conhecer pelo menos 2 provas distintas do Teorema de Hall.)

Os dois teoremas desta seção são centrais na teoria de emparelhamentos em grafos.

Teorema 5.2. (Hall, 1935)
Seja G um grafo (X, Y)-bipartido. Então
G tem um emparelhamento que cobre X se e só se $|\mathrm{Adj(S)}| \geq |\mathrm{S}|$ para todo $S \subseteq X$.

Condição (H)

Prova 1.



$$\mathrm{Adj}(S) = \{ v \in V(G) : v \text{ é adjac. a algum vértice de } S \}$$

OBS: Hall provou a suficiência da condição (H), a necessidade de (H) é óbvia.

Casamento entre 150 damas e 150 cavaleiros da corte

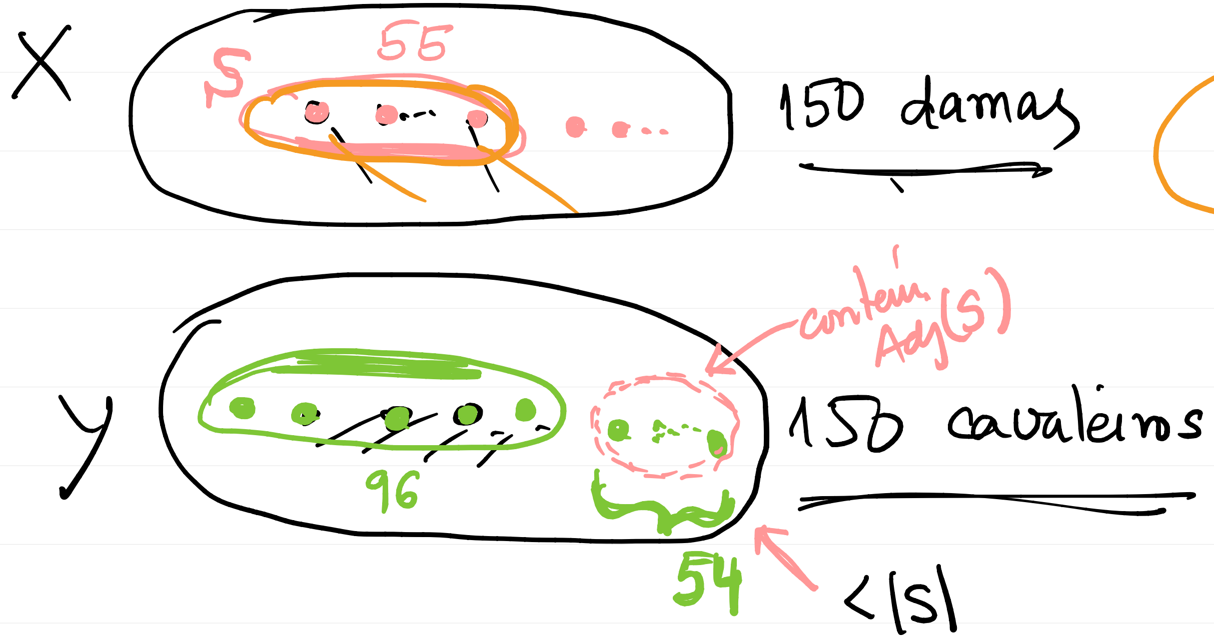
monogâmico

Rei Arthur

Pediu p/

Mago Merlin resolver.

- Merlin Apresentou 55 damas e 96 cavaleiros ao rei e disse que: Nenhuma das 55 damas tinha interesse num dos 96 cavaleiros



S = ~~cjto~~ das 55 damas

$$\Downarrow$$

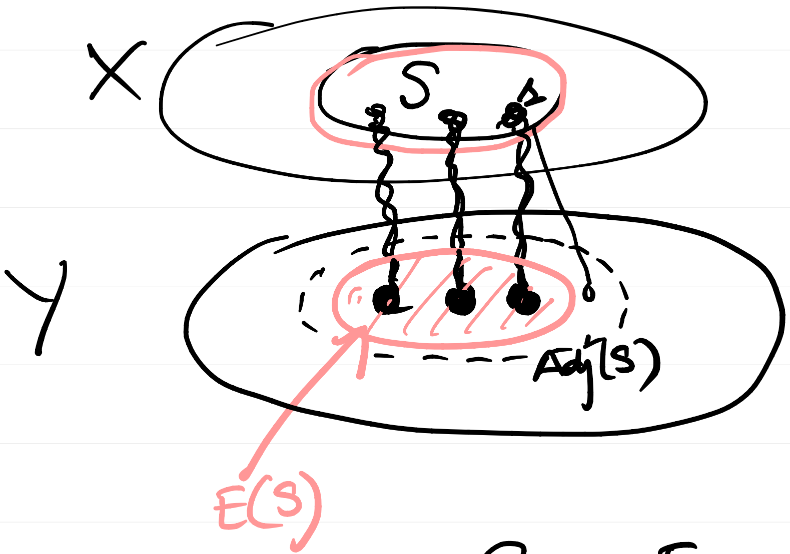
$$|Adj(S)| < |S|$$

O rei Arthur entendeu a razão de não ser possível casar as 150 damas com os 150 cavaleiros.

(Ficou satisfeito com o "certificado" S tal que $|Adj(S)| < |S|$)

Necessidade da condição (H)

Se G tem empar. E que cobre X então a condição (H) está satisfeita.



De fato,

Seja $S \subseteq X$ e seja

$$E(S) = \{ v \in Y : vs \in E \text{ p/ algum } s \in S \}$$

Como E cobre S, temos que $|E(S)| = |S|$.

Claramente, $E(S) \subseteq Adj(S)$.

Logo, $|Adj(S)| \geq |E(S)| = |S|$. $\square$

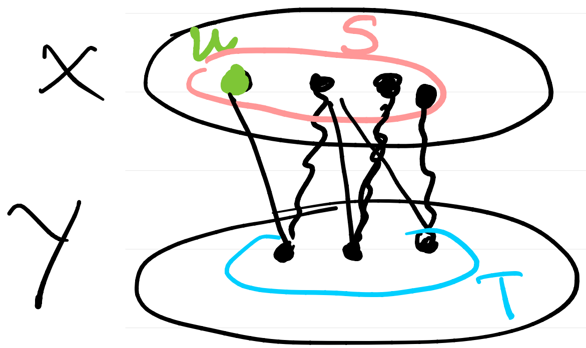
Prova da sufic. de (H)

$$|Adj(S)| \geq |S| \quad \forall S \subseteq X \qquad (H)$$

Suponha que (H) está satisf. e G ñ tenha um emp. que cobre X.

Seja E um empar. máximo em G.

E não cobre X $\Rightarrow$ $\exists\, u \in X$ tq. u ñ é coberto por E



Sejam

$S = \{u\} \cup \{x \in X :$ existe um caminho E-alt. de u a $x\}$

$T = \{y \in Y :$ existe um caminho E-alt. de u a $y\}$

Fato A: $\boxed{Adj(S) \subseteq T}$

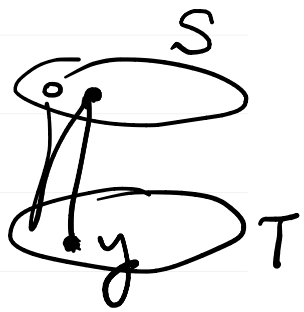
$y \in Adj(S) \Rightarrow \exists\, s \in S$ tq s adjac a y

Como $s \in S$, então existe um cam. $\in$-alt. P de u até s

Se P passa por y, então $y \in T$.

Se P não ...., então $P(s,y)$ é um cam. $\in$-alt. até $y \Rightarrow y \in T$

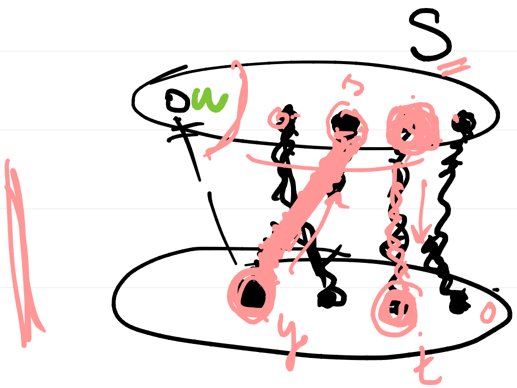
Fato B $\boxed{T \subseteq Adj(S)}$ ← (nem precisamos desse fato)



$y \in T \Rightarrow \exists$ cam. $\in$-alt. P que vai de u a y.

Neste caso, o vértice imediatamente anterior a y em P é um vértice de S. Logo, $y \in Adj(S)$

Fato C:



$\boxed{|T| = |S| - 1}$ (C)

$|Adj(S)| \overset{?}{=} |T| < |S|$ } $|Adj(S)| < |S|$

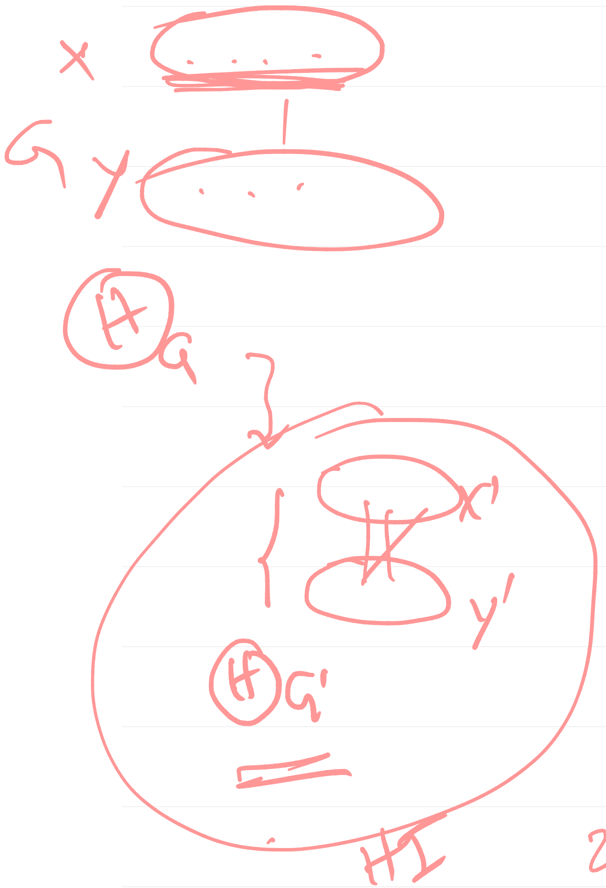
Fato A + Fato B   Fato C

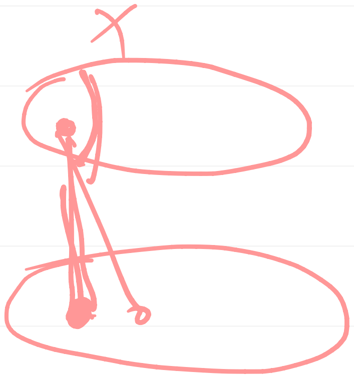
Contradição!

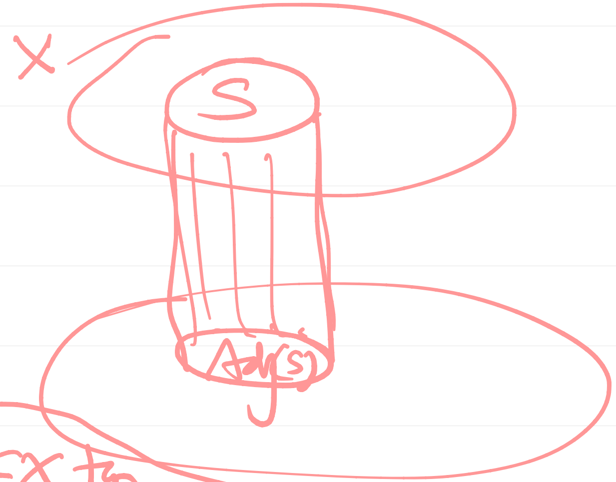
Prova 2. Por indução em $|X|$. (Exercício para casa (com dica na aula))

sufic

Vale Ⓗ $\Rightarrow$ G tem emp. que cobre X







2º $\rightarrow$ Caso 2: $\exists S \subseteq X$ tq $|Adj(S)| = |S|$

1º $\rightarrow$ Caso 1: $|Adj(S)| \geq |S| + 1 \quad \forall S \subset X$

Corolário 5.3.
Seja G um grafo (X,Y)-bipartido. Se $|\mathrm{Adj(S)}| \geq |\mathrm{S}| - \mathrm{k}$ para todo $S \subseteq X$ e algum inteiro fixo k, então G tem um emparelhamento de cardinalidade $|X| - k$.

Prova .

Corolário 5.4.
Todo grafo bipartido k-regular com $k \geq 1$ tem um emparelhamento perfeito.

Prova .

Corolário 5.5.
Todo grafo bipartido k-regular com $k \geq 2$ tem k emparelhamentos perfeitos dois a dois disjuntos.

Prova . (Exercício)

Definição: Seja k um inteiro positivo. Um subgrafo gerador k-regular de um grafo G é chamado ***k*-fator** de G. Assim, um **1-fator** de G é simplesmente um subgrafo gerado pelas arestas de um emparelhamento perfeito de G; um **2-fator** é um subgrafo gerador de G que é uma união de circuitos disjuntos nos vértices.

Corolário 5.6.
Todo grafo bipartido k-regular, $k \geq 1$ tem pelo menos $\binom{k}{2}$ 2-fatores distintos.

O seguinte resultado, para grafos arbitrários, é considerado um dos primeiros resultados na teoria dos grafos.

Teorema do 2-fator (Petersen, 1891): Se G é grafo $2k$-regular, $k \geq 1$, então o conjunto das arestas de G pode ser particionado em k 2-fatores arestas-disjuntos. (Também dizemos simplesmente que G admite uma decomposição em k 2-fatores.)

(Ideia da prova: grafo euleriano + "splitting" de vértices.)