Capítulo 4 – Grafos Hamiltonianos

PROBLEMA: "Volta ao redor do mundo"

Em 1856, William Hamilton inventou o seguinte brinquedo: dado um dodecaedro em cujos vértices estão indicados nomes de 20 cidades distintas, usando uma cordinha — que pode passar apenas ao longo das arestas do dodecaedro — visitar cada uma das 20 cidades exatamente uma vez e terminar na cidade de partida.

Figura 1: William R. Hamilton

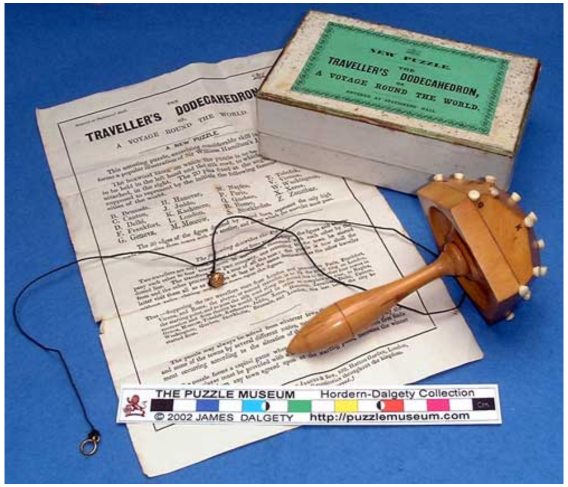
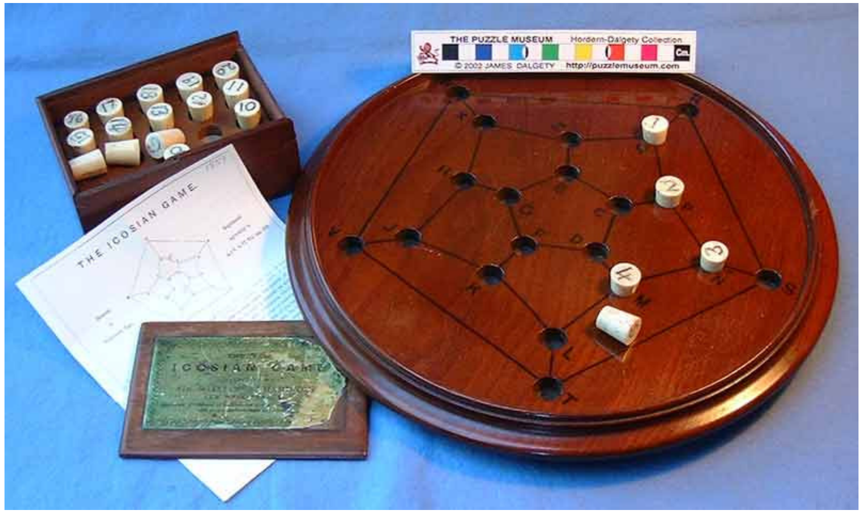


Figura 2: Dodecaedro com nomes de 20 cidades



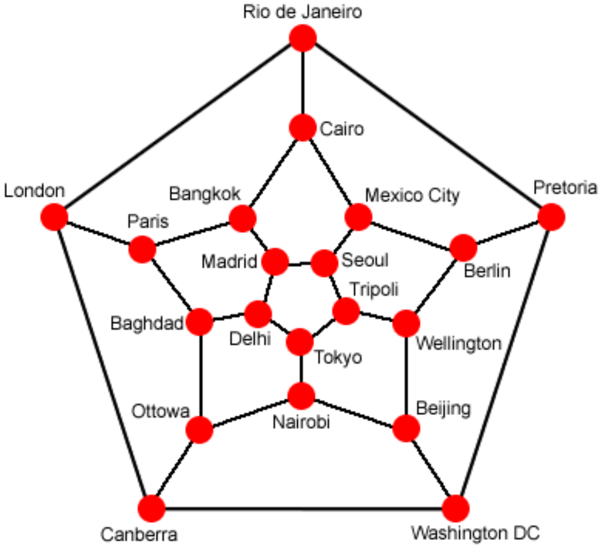
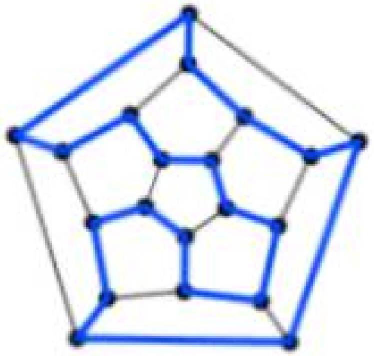


Figura 3: Versão planar do brinquedo

O problema na linguagem de grafos

Encontrar no grafo acima um circuito que passa exatamente uma vez em cada um dos seus vértices.

Em homenagem a Hamilton: **circuito hamiltoniano**



Definição. Um circuito (resp. caminho) que contém todos os vértices de um grafo é chamado **hamiltoniano**. Um **grafo hamiltoniano** é um grafo que contém um circuito hamiltoniano.

Problema 1: Dado um grafo G, decidir se G é hamiltoniano.

Problema 2: Dado um grafo hamiltoniano G, encontrar um circuito hamiltoniano.

Os problemas acima são difíceis! (O Problema 1 é NP-completo.) Não se conhece algoritmos polinomiais para se resolvê-los.

Teorema 4.1 (Condição necessária para um grafo ser hamiltoniano)
Se G é um grafo hamiltoniano, então para todo conjunto não-vazio $S \subset V(G)$,

$$c(G - S) \leq |S|.$$

Prova.

Vimos que

$$\boxed{c(G - S) \leq |S| \text{ para todo conjunto não-vazio } S \subset V(G)}$$

é C.N. (Condição Necesssária) para um grafo ser hamiltoniano.
Note que ela não é C.S. (Condição Suficiente).

Condições suficientes para um grafo ser hamiltoniano

Teorema 4.2. (Dirac, 1952)
Se G é um grafo simples de ordem $n \geq 3$ e $g(v) \geq n/2$ para todo $v \in V(G)$, então G é hamiltoniano.

Prova 1. Suponha que a afirmacão seja falsa. Então existe um grafo simples não-hamiltoniano *maximal* G de ordem $n \geq 3$ tal que $g(v) \geq n/2$ para todo $v \in V(G)$. Ou seja, (maximal no sentido de que) G é não-hamiltoniano, mas para qualquer par de vértices não-adjacentes u, v em G, temos que o grafo $G + uv$ é hamiltoniano.

Claramente G não é completo (todo grafo completo com pelo menos 3 vértices é obviamente hamiltoniano). Portanto, existem vértices u e v não-adjacentes em G. Considere o grafo $H := G+uv$. Pela maximalidade de G, segue que H é hamiltoniano. Logo, todo circuito hamiltoniano em H deve conter a aresta uv. Então G tem um caminho hamiltoniano de u a v, digamos

$$P := (u = v_1, v_2, \ldots, v_n = v).$$

Note que, *se* v_i *é adjacente a* u*, então* v_{i-1} *não é adjacente a* v, pois senão

$$C = (v_1, v_i, v_{i+1}, \ldots, v_n, v_{i-1}, v_{i-2}, \ldots, v_1)$$

seria um circuito hamiltoniano em G, contrariando a escolha de G.

Portanto, para todo vértice adjacente a u, existe um vértice de $V(G) \setminus \{v\}$ que não é adjacente a v. Mas neste caso,

$$g(v) \leq n - 1 - g(u).$$

Como $g(u) \geq n/2$, temos que $g(v) \leq n-1-n/2 = n/2-1$, uma contradição. Logo, a afirmação é verdadeira, e o teorema está provado.

$\square$

Prova 2. Idêntica à prova acima até a existência do caminho P. [A partir desse ponto, substituir por:]

Sejam

$$U := \{v_i : v_i \text{ é adjacente a } u\},$$
$$W := \{v_i : v_{i-1} \text{ é adjacente a } v\},$$

Então $U \cap W = \emptyset$, pois caso contrário

$$C = (v_1, v_i, v_{i+1}, \ldots, v_n, v_{i-1}, v_{i-2}, \ldots, v_1)$$

seria um circuito hamiltoniano em G, contrariando a escolha de G.

Por outro lado, como $u \notin U \cup W$, resulta que $|U \cup W| < n$. Logo,

$$n > |U \cup W| = |U| + |W| - |U \cap W| = g(u) + g(v) \geq n/2 + n/2 = n.$$

uma contradição.

□

A prova do Teorema 4.2 motivou o seguinte resultado, cuja prova segue analogamente. Note que o Teorema 4.2 é um corolário do Teorema 4.3.

Teorema 4.3. (Ore, 1960)
Se G é um grafo simples de ordem $n \geq 3$ tal que

$$g(u) + g(v) \geq n \quad \text{para todo par } \ u, v \text{ de vértices não-adjacentes,}$$

então G é hamiltoniano.

O seguinte resultado também foi motivado pela prova do Teorema 4.2. Note que a prova é análoga a que fizemos para o Teorema 4.2.

Teorema 4.4. (Bondy & Chvátal, 1976)
Seja G um grafo simples de ordem n e sejam u, v vértices não-adjacentes em G tais que

$$g(u) + g(v) \geq n.$$

Então G é hamiltoniano se e só se $G + uv$ é hamiltoniano.

O resultado anterior motivou a definição do conceito de fecho de um grafo e resultados algorítmicos baseados nesse conceito combinado com o Teorema 4.4.

O **fecho de um grafo** G, denotado por $\mathcal{F}(G)$, é o grafo que se obtém de G acrescentando-se recursivamente arestas ligando pares de vértices não-adjacentes cuja soma dos graus é pelo menos $|V(G)|$ até que não exista mais nenhum tal par.

Exemplos:

FATO F: O fecho de um grafo é único (independe da ordem em que as arestas são acrescentadas).

Da definição de fecho de um grafo e do Teorema 4.4, temos imediatamente os seguinte resultados.

Corolário 4.5. (Bondy & Chvátal, 1976)
Um grafo G é hamiltoniando se e só se $\mathcal{F}(G)$ é hamiltoniano.

Corolário 4.6.
Se $\mathcal{F}(G)$ é completo, então G é hamiltoniano.

Na aula: algoritmo para encontrar um circuito hamiltoniano de um grafo G, quando temos um circuito hamiltoniano em $\mathcal{F}(G)$.

EXERCÍCIO: Provar o FATO F (unicidade do fecho de um grafo).

Prova.