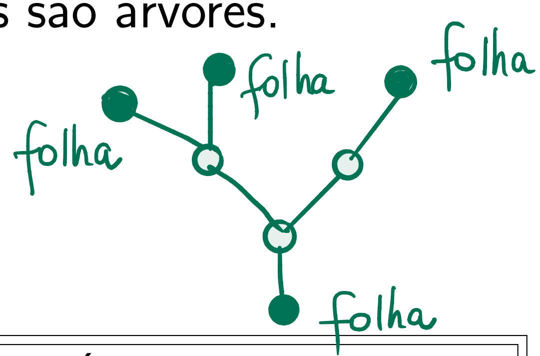
Cap. 3 (cont.)

Material da aula 2 com provas completas

31/mar/2020

Def. Uma **árvore** é um grafo conexo acíclico. Uma **floresta** é um grafo acíclico (não necessariamente conexo); ou seja, é um grafo cujos componentes são árvores.

Def. Numa árvore um vértice de grau 1 é chamado **folha**.



Juntando as Proposições 3.1 e 3.2, e a definição acima, temos:

Teorema 3.3. Um grafo conexo com n vértices é uma árvore se e só se tem exatamente $n - 1$ arestas.

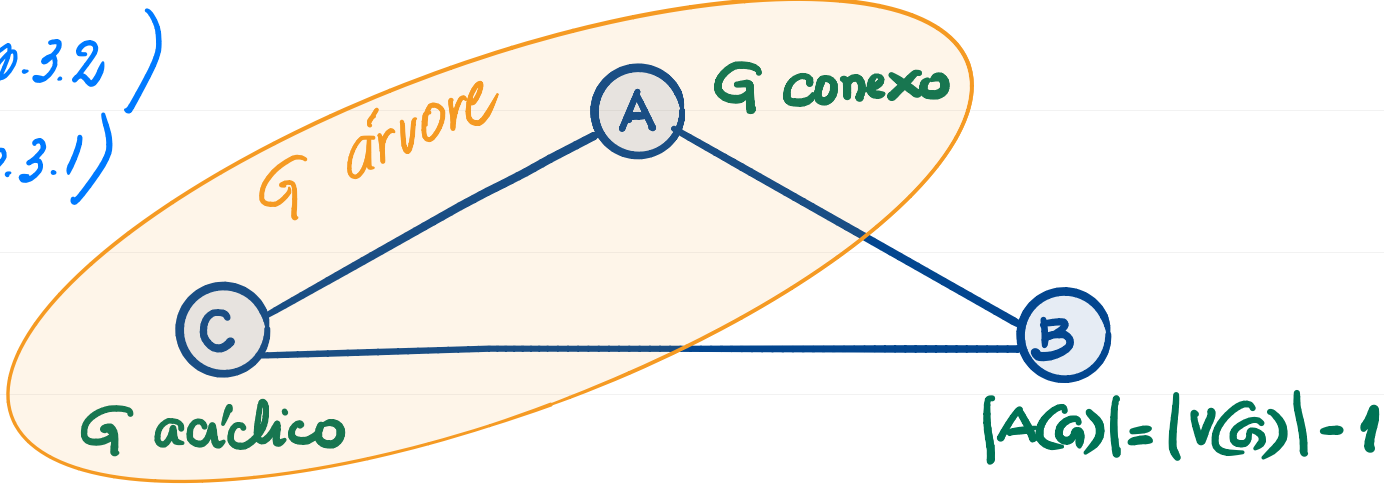
Caracterização de árvore

G conexo

G é árvore $\iff |A(G)| = |V(G)| - 1$

PROVA

(a) $\Rightarrow$ (Prop. 3.2)
(b) $\Leftarrow$ (Prop. 3.1)



Prop. 3.1. $A + B \Rightarrow C$

Prop. 3.2. $A + C \Rightarrow B$

EXERCÍCIO: $\boxed{B + C \Rightarrow A}$

- **Solução 1. (Por contradição)**

Seja G um grafo acíclico com $|A(G)| = |V(G)| - 1 \geq 1$.

Suponha, por contradição, que G não seja conexo.

Sejam $G_1, G_2, \ldots, G_k$, $k \geq 2$, os componentes de G.

Cada G_i é conexo e acíclico $(i=1,\dots,k)$. Então pela Prop. 3.2, $|A(G_i)| = |V(G_i)| - 1$. Logo,

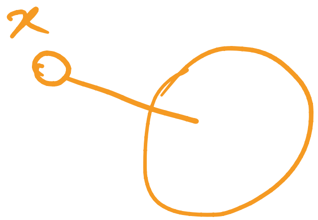
$$|A(G)| = \sum_{i=1}^{k} \left(|V(G_i)| - 1 \right) = |V(G)| - k.$$

Como $|A(G)| = |V(G)| - 1$, segue que $k = 1$, uma contradição. Concluímos então que G é conexo. $\square$

- **Solução 2.** (Por indução em $|V(G)|$)

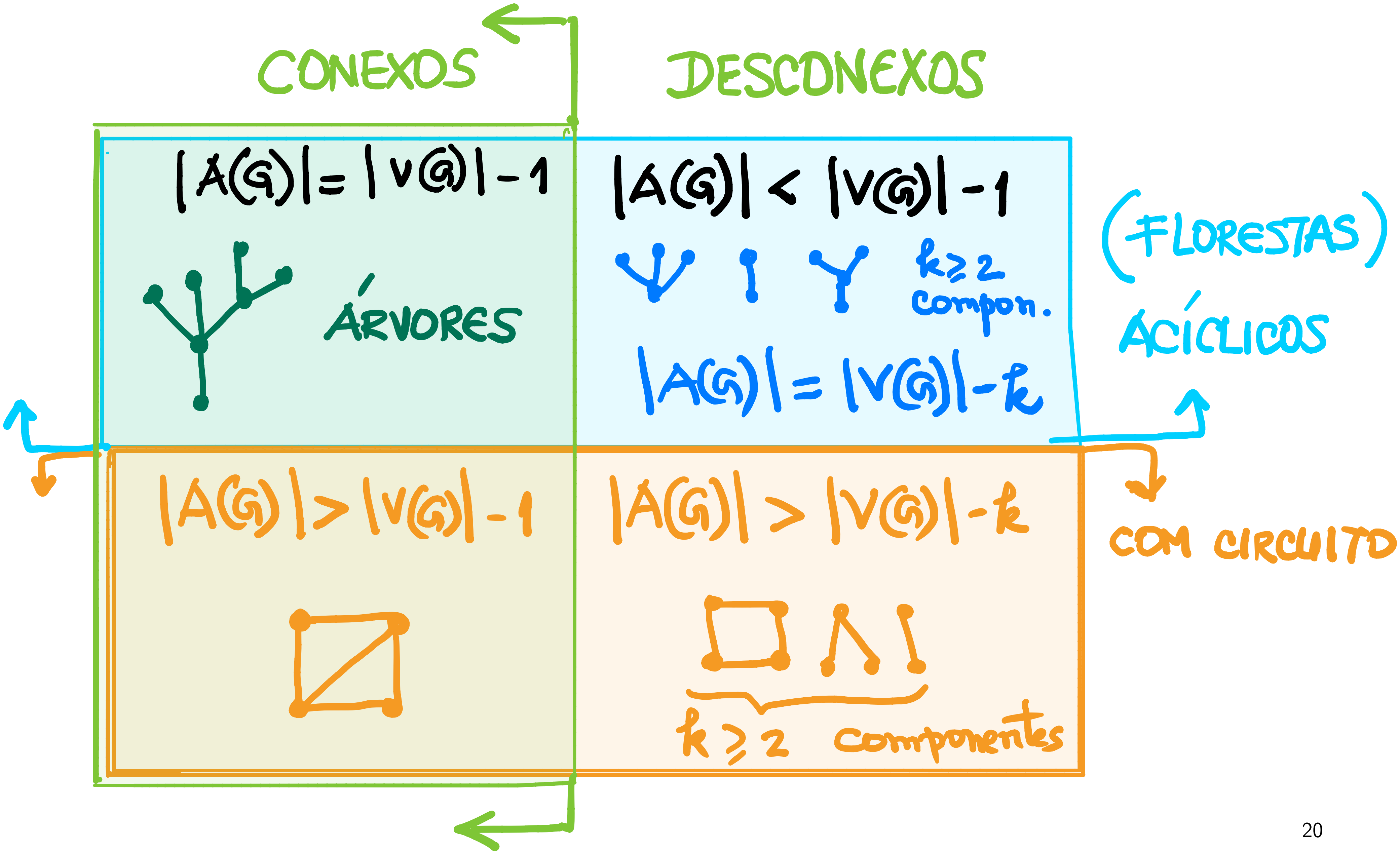
Esboço de prov

a) G acíclico, ñ trivial, $|A(G)| = |V(G)| - 1$ $\Longrightarrow$ G tem vértice de grau 1

b) 

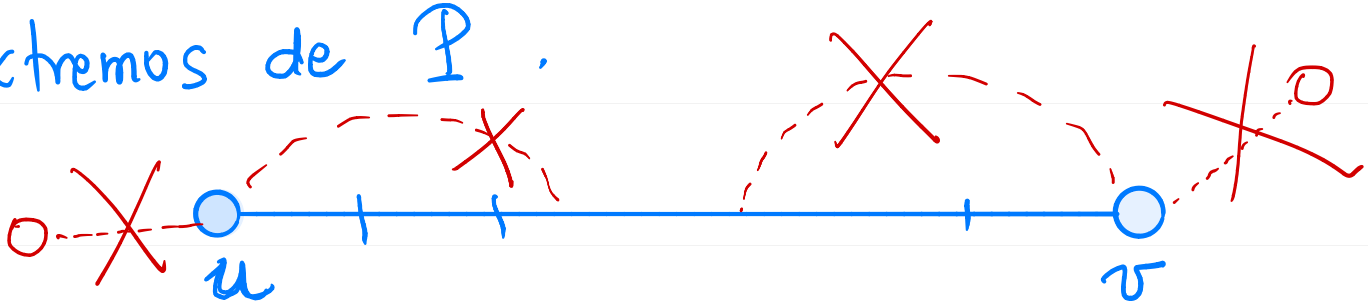
$G' = G - x$

Aplicar HI em G' $\Rightarrow$ G' conexo $\Downarrow$ G conexo


CONEXOS
DESCONEXOS
$|A(G)| = |V(G)| - 1$
ÁRVORES
$|A(G)| < |V(G)| - 1$
$k \geq 2$ compon.
$|A(G)| = |V(G)| - k$
(FLORESTAS)
ACÍCLICOS
$|A(G)| > |V(G)| - 1$
$|A(G)| > |V(G)| - k$
COM CIRCUITO
$k \geq 2$ componentes

Corolário 3.4. Toda árvore não trivial tem pelo menos 2 folhas.
Prova (na aula).

Seja G uma árvore não trivial, e seja P um caminho mais longo em G. Sejam $\underline{u}$ e $\underline{v}$ os extremos de P.



Afirmamos que $\underline{u}$ e $\underline{v}$ têm grau 1 em G.

De fato, - completar!

Logo, G tem pelo menos duas folhas. ■

Teorema 3.5. As seguintes afirmações a respeito de um grafo simples G são equivalentes:

(a) G é uma árvore.

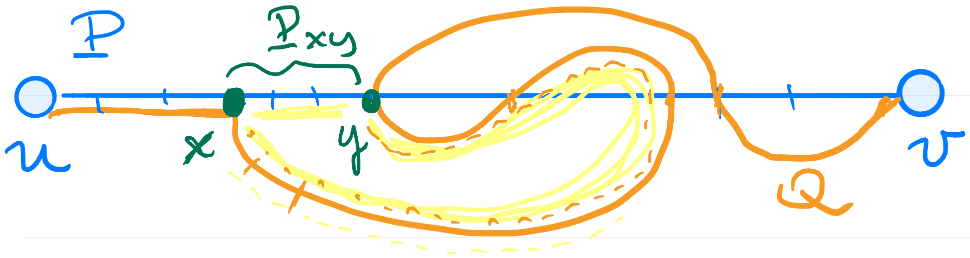
(b) Entre quaisquer dois vértices de G existe um único caminho.

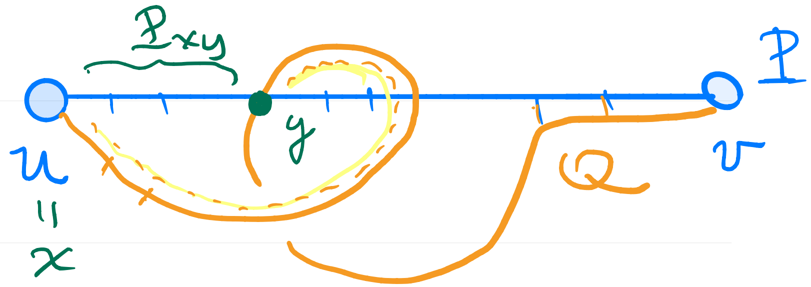
(c) G é acíclico e se u, v são dois vértices distintos de G, então $G + uv$ tem exatamente um circuito. (Isto é, G é um grafo acíclico maximal.)

(d) G é conexo e se e é uma aresta de G então $G - e$ é desconexo. (Em outras palavras, G é conexo e toda aresta de G é uma ponte.)

Prova. [Na aula veremos algumas implicações. Complemente em casa.]

(a) $\Rightarrow$ (b) Seja G uma árvore, e sejam $\underline{u}$ e $\underline{v}$ dois vértices distintos de G. Como G é conexo, existe um caminho, digamos P, de $\underline{u}$ a $\underline{v}$. Suponha que exista em G um outro caminho Q de $\underline{u}$ a $\underline{v}$, $Q \neq P$.





- Seja x o primeiro vértice em P tal que $x \in V(Q)$, e o seu sucessor em P não seja sucessor de x em Q. (Possivelmente, $x = u$.)

- Seja y o próximo vértice em P a partir de x tal que $y \in V(Q)$. (Possivelmente, $y = v$.)

Seja P_{xy} (resp. Q_{xy}) a seção de P (resp. Q) que vai de x a y.

(Veja o uso de "-1")

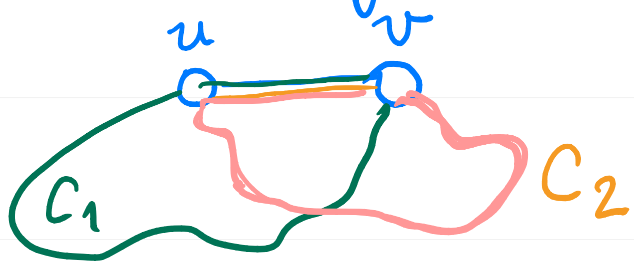
Então $P_{xy} \cdot Q_{xy}^{-1}$ é um circuito em G.

(OBS: Outra opção seria definir y como o próximo vértice em Q a partir de $\underline{x}$ tal que $y \in V(P)$. Veja nas figuras acima onde estaria $\underline{y}$.)

Como chegamos a uma contradição, já que G é acíclico, concluímos que Q não existe, e portanto a prova está completa. $\square$

(b) ⇒ (c) Claramente, G é acíclico. Se G contivesse um circuito, digamos C, então entre quaisquer dois vértices de C existiriam dois caminhos distintos, contrariando a hipótese. Sejam $\underline{u}$ e $\underline{v}$ dois vértices distintos de G. Seja P o caminho em G que vai de $\underline{v}$ a $\underline{u}$. Então $P \cdot (u,v)$ é um circuito em $G+uv$.

Suponha que $G+uv$ tenha dois circuitos distintos, digamos C_1 e C_2, ambos contendo a aresta uv. (Claramente em $G+uv$ não existe circuito sem a aresta uv.) Neste caso, $C_1 - uv$ e $C_2 - uv$ são caminhos distintos de $\underline{v}$ para $\underline{u}$ em G, contrariando a hipótese. Logo, $G+uv$ contém um único circuito.



$\square$

(c) ⇒ (d) Sejam $\underline{u}$ e $\underline{v}$ vértices distintos de G, não adjacentes. Como G é acíclico e $G+uv$

contém um circuito, claramente tal circuito contém a aresta uv. Removendo-se a aresta uv desse circuito, obtemos um caminho de $\underline{v}$ para $\underline{u}$ em G. Portanto, G é conexo.

Seja $e = xy$ uma aresta de G. Suponha que $G-e$ seja conexo. Então existe em $G-e$ um caminho, digamos P, de $\underline{y}$ a $\underline{x}$. Neste caso, $P.(x,y)$ é um circuito em G, contrariando a hipótese de que G é acíclico. Portanto, $G-e$ é desconexo, e a prova da afirmação está completa.

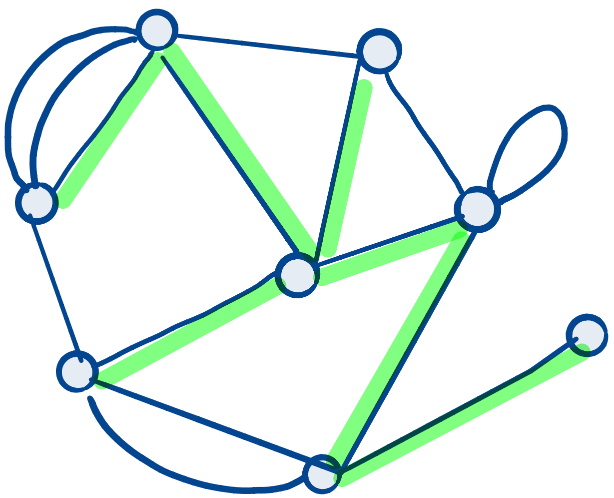
(d) $\Rightarrow$ (a) (EXERCÍCIO PARA CASA.)

Exercício 25. *Prove que se G é um grafo conexo com n vértices e exatamente n arestas, $n \geq 1$, então G contém um único circuito.*

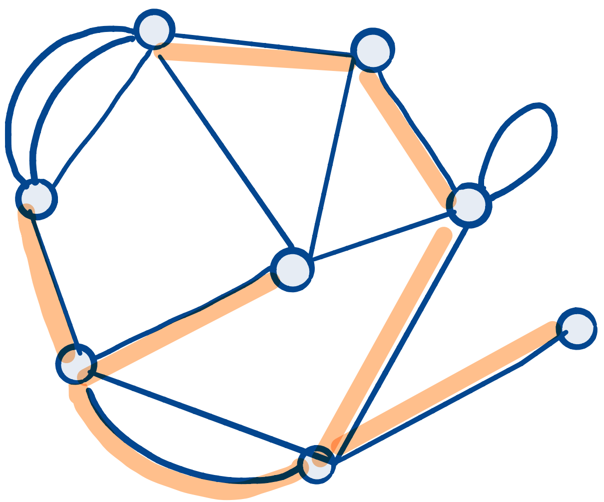
Exercício 26. *Prove que se G é um grafo simples com pelo menos 5 vértices então ou G ou o seu complemento $\bar{G}$ contém um circuito.*

Def. Uma **árvore geradora** (*spanning tree*) de um grafo G é um subgrafo gerador de G que é uma árvore. (Lembramos que um subgrafo T de G é gerador se $V(T) = V(G)$.)

Exemplos:



T_1



T_2

Corolário 3.6. Todo grafo conexo contém uma árvore geradora.

Prova (na aula). **Prova 1**. Seja G um grafo conexo e seja T um subgrafo gerador conexo minimal de G. Como T é conexo minimal, então para toda aresta $e \in A(T)$ temos que $T - e$ é desconexo. Pelo Teorema 3.5, T é uma árvore. ■

Prova 2. Seja G um grafo conexo. Tome em G um subgrafo T que é acíclico maximal. Não é difícil provar que T é gerador e conexo, e portanto é uma árvore geradora. ■

Prova 3. Seja T uma árvore em G com o maior número possível de vértices. Afirmamos que $V(T)=V(G)$. De fato, se isso não ocorresse, então $G' = G[V(T)]$ seria um componente próprio de G, implicando que G não é conexo. Concluímos então que $V(T)=V(G)$, e portanto T é uma árvore geradora de G. ∎

Prova 4. (EXERCÍCIO: provar por indução em $|V(G)|$.)

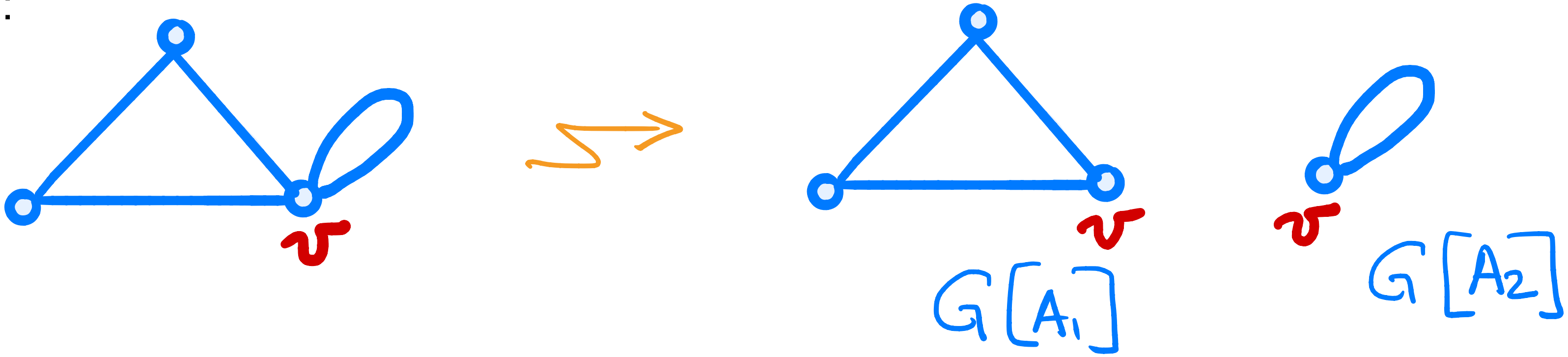
Vértice-de-corte (ou vértice separador).

Num grafo G um vértice v é um **vértice-de-corte** se o conjunto das arestas de G pode ser particionado em dois subconjuntos não-vazios A_1 e A_2 tais que os subgrafos $G[A_1]$ e $G[A_2]$ têm apenas o vértice v em comum. Se $G \equiv K_1$ então o seu único vértice não é vértice-de-corte.

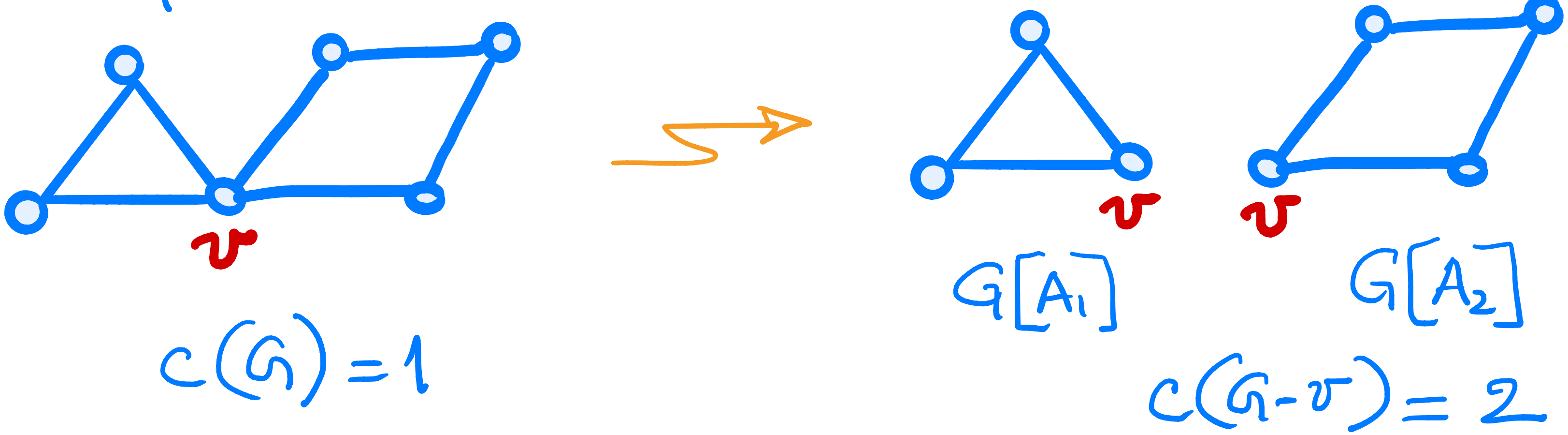
OBS: Se G é um grafo *sem laços* então a definição acima é equivalente a: v é um vértice-de-corte se $c(G-v) > c(G)$, isto é, o número de componentes de $G-v$ é maior do que o número de componentes de G.

Exemplos:

EX1.



EX2. G sem laços



Teorema 3.7. Em uma árvore um vértice v é um vértice-de-corte se e só se $\underbrace{g(v) > 1}_{\Longleftrightarrow}$.

Prova (na aula).

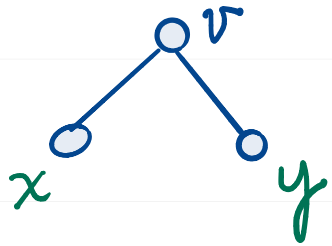
Seja G uma árvore.

($\Rightarrow$) Queremos provar que se $\underline{v}$ é um vértice-de-corte então $g(v) > 1$. Para isso, vamos provar que se $g(v) \leq 1$, então $\underline{v}$ não é vértice-de-corte.

- Se $g(v) = 0$, então $\underline{v}$ não é vértice-de-corte.
- Se $g(v) = 1$ (v é uma folha de G), então claramente $c(G - v) = c(G)$, e portanto, $\underline{v}$ não é vértice-de-corte.

($\Leftarrow$) Vamos provar que se $g(v) > 1$ então $\underline{v}$ é um vértice-de-corte.

Sejam $\underline{x}$ e $\underline{y}$ dois vizinhos distintos de $\underline{v}$.



Neste caso, $\underline{P} = (x, v, y)$ é um caminho em G de $\underline{x}$ a $\underline{y}$.

Como G é árvore, $\underline{P}$ é o único caminho de $\underline{x}$ a $\underline{y}$ em (pelo Teorema 3.5). Então em $G - v$ não existe caminho de $\underline{x}$ a $\underline{y}$. Logo, $c(G-v) > c(G)$, e portanto $\underline{v}$ é um vértice-de-corte de G. $\square$

Corolário 3.8. Todo grafo conexo não-trivial, sem laços, tem pelo menos 2 vértices que não são vértices-de-corte.

Prova (na aula). Seja G um grafo conexo não trivial. Tome em G uma árvore geradora, digamos T. (Veja o Corolário 3.6.) Como T é não trivial, T tem pelo menos duas folhas, digamos $\underline{x}$ e $\underline{y}$. Pelo Corolário anterior,

$$c(T-x) = c(T-y) = c(T).$$

Como $T \subseteq G$, temos que

$$c(G-x) \leq c(T-x) = c(T) = 1.$$

Então $c(G-x) = 1$ e portanto, $\underline{x}$ não é vértice-de-corte de G. Analogamente concluímos que y não é vert-de-corte de G, e com isso completamos a prova da afirmação. $\square$

Corolário 3.9. Todo grafo conexo não-trivial G tem um vértice v tal que $G - v$ é conexo.

<u>EXERCÍCIO 27.</u> *Seja G um grafo. Prove que uma aresta α de G é uma aresta-de-corte se e só se α não está contida em nenhum circuito de G.*

<u>EXERCÍCIO 28.</u> *Seja G um grafo conexo e α uma aresta de G. Prove que α pertence a todas as árvores geradoras de G se e só se α é uma aresta-de-corte de G.*

<u>EXERCÍCIO</u>. É verdade que, se G é um grafo conexo com pelo menos 3 vértices, então G tem (pelo menos) dois vértices <u>x</u> e <u>y</u> tais que $G - \{x, y\}$ (o grafo que resulta de G removendo-se <u>x</u> e <u>y</u>) é conexo? [**Dica**: Pensar numa árvore geradora de G e inspirar-se na prova do Corolário 3.8.]