Capítulo 9

Grafos Planares

Neste capítulo estudaremos alguns resultados fundamentais sobre grafos planares. Veremos alguns conceitos básicos, o conceito de grafo dual, a Fórmula de Euler, e apresentaremos uma prova do Teorema de Kuratowski (1930) que caracteriza grafos planares.

1 Conceitos básicos

Um grafo G é **planar** se pode se desenhado no plano de modo que quaisquer duas de suas arestas não se intersectam, exceto em extremos que sejam comuns a ambas. Um tal desenho no plano de um grafo G é chamado uma **imersão plana** ou **representação plana** ou um **mapa** de G. Quando G é planar, dizemos também que G é **imersível no plano**.

Um **grafo plano** é um grafo planar que está imerso no plano.

Dado um grafo plano G, removendo-se todas as curvas e os pontos que representam as arestas e os vértices de G, o que resta são regiões conexas, chamadas **faces**.

(Imagine que o desenho está feito na areia de uma praia, e que desenhamos as arestas e os vértices escavando sulcos com um bastão; agora, olhe esse desenho, ignorando os sulcos que são as arestas e os vértices; o que se vê são algumas regiões conexas, nas quais não há nenhum sulco, a não ser em sua fronteira.)

Note que sempre há uma face ilimitada. Tal face é chamada **face externa** (ou **infinita**). Os grafos planos G_1 e G_2 têm 4 faces.

A **fronteira** de uma face é o passeio fechado formado pelas arestas e vértices no fecho da face. Um circuito de um grafo plano é chamado **circuito facial** se é fronteira de uma face.

Dizemos que uma face é **incidente** aos vértices e arestas na sua fronteira. Se α é uma aresta-de-corte, então apenas uma face é incidente a α. Se α não é uma aresta-de-corte, então há exatamente duas faces incidentes a α, e neste caso dizemos que α **separa** essas faces.

O **grau de uma face f**, denotado por **gr(f)**, é o númeero de arestas incidentes a f, onde as arestas-de-corte são contadas duas vezes.

Dizemos que duas imersões planas são **equivalentes** se a fronteira de uma face em uma imersão sempre corresponde à fronteira de uma face em outra imersão. As imersões planas G_1 e G_2 não são equivalentes: a fronteira da face externa de G_2 não corresponde à fronteira de nenhuma face de G_1.

Dizemos que um grafo tem uma **única imersão plana** quando todas as suas imersões planas são equivalentes. (FATO: "Grafos planares 3-conexos têm uma única imersão plana". Usaremos esse resultado mais adiante.)

Curva de Jordan: curva contínua que não se auto-intersecta e cujo início coincide com o seu término.

Se J é uma curva de Jordan, então J divide o plano em duas regiões: o **interior de $\boldsymbol{J}$** (**int($\boldsymbol{J}$)**) e o **exterior de $\boldsymbol{J}$** (**ext ($\boldsymbol{J}$)**).

> **Teorema de Jordan.** Se J é uma curva de Jordan, então dado um ponto u em int(J) e um ponto v em ext(J), qualquer curva ligando u a v deve intersectar J em algum ponto.

Usando o teorema acima, podemos provar que os grafos K_5 e $K_{3,3}$ não são planares. (Veremos mais tarde uma outra prova.)

Teorema J.1. O grafo K_5 não é planar.

Teorema J.2. O grafo $K_{3,3}$ não é planar.

Grafo Dual (de um grafo plano)

Seja G um grafo plano. O **dual de G**, denotado por $\mathbf{G}^*$, é o grafo definido da seguinte maneira:

(a) a cada face f de G fazemos corresponder um vértice f^* em G^*;

(b) a cada aresta e de G fazemos corresponder uma aresta e^* em G^*, tal que e^* liga dois vértices f^* e h^* se e só se as faces f e h em G são separadas por e.

Notação: Vamos denotar por $\boldsymbol{F(G)}$ o conjunto das faces de G.
Temos que $|V(G^*)| = |F(G)|$ e $|A(G^*)| = |A(G)|$.

IMPORTANTE: O conceito de grafo duals só faz sentido para grafo plano.
FATO: Se G é um grafo plano, então G^* é um grafo planar.
FATO: Seja G um grafo plano. Então $G \cong G^*$ se e somente se G é conexo.

OBS: Um grafo planar pode ter representações planas distintas cujos duais não são isomorfos. Vejam como ficam os duais das seguintes representações planas de um mesmo grafo G.

Da definição de G^*, temos que $|V(G^*)| = |F(G)|$, $|A(G^*)| = |A(G)|$, e além disso,

$$g(f^*) = gr(f) \text{ para toda face } f \in F(G).$$

Com isso, segue imediatamente o seguinte resultado.

Teorema 9.1. Se G é um grafo plano, então $\displaystyle\sum_{f \in F(G)} gr(f) = 2\,|A(G)|$.

2 A Fórmula de Euler e suas consequências

Teorema 9.2. (Fórmula de Euler) Euler, 1750
Se G é um grafo plano conexo, então

$$|V(G)| - |A(G)| + |F(G)| = 2.$$

Corolário 9.3. Todas as representações planas de um grafo planar conexo têm o mesmo número de faces.

Corolário 9.4. Se G é um grafo planar <u>simples</u> com $n \geq 3$ vértices e m arestas, então $m \leq 3n - 6$.

Corolário 9.5. Se G é um grafo planar simples, então $\delta(G) \leq 5$.

Corolário 9.6. Se G é um grafo planar simples com $n \geq 3$ vértices e m arestas, então $m \leq 2n - 4$.

Corolário 9.7. O grafo K_5 não é planar.

Corolário 9.8. O grafo $K_{3,3}$ não é planar.

OBS: O grafo completo K_5 é um grafo não planar com o menor número possível de vértices, e $K_{3,3}$ é um grafo não planar com o menor número possível de arestas. (Todo grafo não planar tem pelo menos 5 vértices e 9 arestas.

Definição: Uma **triangulação plana** é um grafo plano no qual a fronteira de cada face tem exatamente 3 arestas (cada face é limitada por um triângulo).

EXERCÍCIOS

E9.1. Mostre que todo grafo com no máximo 3 circuitos é planar.

E9.2. Encontre um grafo simples G com sequência de graus $(4, 4, 3, 3, 3, 3)$ tal que (a) G é planar; (b) G não é planar.

E9.3. Mostre que o complemento de um Seja G um grafo planar simples com 11 vértices. Mostre que o complemento de G não é planar.

E9.4. Generalize a Fórmula de Euler para grafos planos não conexos.

E9.5. Dizemos que um grafo plano G é auto-dual se $G \cong G^*$. Prove que: (a) Todas as rodas W_n $(n \geq 3)$ são auto-duais. (b) Se G é auto-dual com n vértices e m arestas, então $2n = m + 2$. (c) Construa outra família infinita de grafos auto-duais.