3 Caracterizações de grafos planares

Nesta seção veremos (pelo menos) uma caracterização de grafos planares. Para isso, precisamos introduzir o conceito de subdivisão de aresta e subdivisão de um grafo. Também usaremos o conceito de contração de aresta.

A operação de **subdivisão de uma aresta** $\alpha = \{u, v\}$ de um grafo G consiste em remover α de G e substituí-la por um caminho $P = (u, x, v)$, onde x é um vértice novo (ou seja, não pertencente a G).

Começando com um grafo G, podemos usar essa operação repetidamente (nas arestas originais ou nas novas arestas obtidas). O grafo que se obtém é chamado uma **subdivisão de G**: ele é obtido de G fazendo uma sequência de $k \geq 0$ subdivisões de arestas nos sucessivos grafos que são obtidos neste processo. (O caso $k = 0$ é quando não fazemos nenhuma subdivisão).

FATO: K_5 e $K_{3,3}$ não são planares.

Chegamos a ver duas provas desse fato. Alguma razão especial?
SIM! Isto vai ficar claro nesta seção.

EXERCÍCIO: Qualquer subgrafo próprio de K_5 ou de $K_{3,3}$ é planar.

A prova do seguinte fato é imediata.

FATO: Se G é não-planar, então toda subdivisão de G é não-planar.

Temos então que qualquer subdivisão de K_5 ou de $K_{3,3}$ é não-planar. Portanto, se G é um grafo planar, sabemos que G não contém nem uma subdivisão do K_5 e nem uma do $K_{3,3}$. Ou seja, temos o seguinte fato (simples):

CONDIÇÃO NECESSÁRIA PARA UM GRAFO SER PLANAR:
Não conter subdivisões nem do K_5 e nem do $K_{3,3}$.

Kazimierz Kuratowski (1930) provou que a condição acima é **SUFICIENTE**!

Para fazer uma prova da suficiência da condição mencionada, precisamos de alguns conceitos e resultados.

A operação de **contração de uma aresta** $\alpha = \{u, v\}$, $u \neq v$, de um grafo G consiste em remover α de G, e identificar os vértices u e v, num único vértice z, e fazer com que as arestas de G incidentes a u ou v se tornem incidentes a z (no novo grafo).

OBS: Em geral, arestas múltiplas incidentes a um mesmo par de vértices são descartadas, deixando apenas um representante: é o que faremos aqui.

Dependendo do contexto, pode ser importante deixar as arestas múltiplas.

- Resultados que serão usados na prova do Teorema de Kuratowski

Possivelmente veremos uma prova do Lema 9.10.

Lema 9.10. Thomassen, 1980
Se G é um grafo 3-conexo com pelo menos 5 vértices, então G contém uma aresta e tal que G/e é 3-conexo.

Lema 9.11. Seja G um grafo e e uma aresta qualquer de G. Se G/e contém uma subdivisão do K_5 ou do $K_{3,3}$, então G contém uma subdivisão do K_5 ou do $K_{3,3}$.

Lema 9.12. Seja G um grafo planar 2-conexo, $G \neq C_n$. Então G tem uma única imersão plana se e só se G é uma subdivisão de um grafo 3-conexo.

Importância do Teorema de Kuratowski (1930)

- Fornece uma caracterização de grafos planares em termos de um número essencialmente finito de subgrafos proibidos.
- Ocupa uma posição de destaque entre os critérios de planaridade conhecidos, não apenas pela sua beleza e simplicidade, mas também porque implica — de maneira relativamente simples — o critério de planaridade de MacLane (1937) e o de Whtiney (1932), além de outros.
- Diferentemente de outros critérios de planaridade, fornece uma caracterização útil de grafos não-planares.
- Aparentemente, quase todas as provas conhecidas do teorema podem ser transformadas em algoritmos polinomiais para testar planaridade de grafos. [Hopcroft e Tarjan (1974) desenvolveram um algoritmo **linear** para testar se um grafo é planar.]

A prova que veremos do Teorema de Kuratowski é baseada na prova dada no livro:

- T. Nishizeki and N Chiba, Planar Graphs: Theory and Algorithms, Elsevier, 1988.

(Altamente recomendado para quem tem interesse em algoritmos para grafos planares.)

Teorema 9.13. (Caracterização de grafos planares) Kuratowski, 1930
Um grafo G é planar se e só se G não contém subdivisões nem do K_5 e nem do $K_{3,3}$.

Prova. Já vimos que a condição mencionada é necessária. A essência deste teorema é a suficiência dessa condição, ou seja:

"Se G não contém subdivisões nem do K_5 e nem do $K_{3,3}$, então G é planar."

A prova será feita por indução em $n := |V(G)|$. Como $K_5 - e$ é planar para qualquer aresta e em K_5, a afirmação é verdadeira se $n \leq 5$. Suponhamos então que $n \geq 6$. Temos 2 casos a considerar.

Caso 1. G não é 3-conexo.

É imediato que um grafo é planar se e só se cada um de seus blocos (subgrafos 2-conexos maximais) é planar. Podemos então supor que G seja 2-conexo. Neste caso, G tem um par separador $\{x, y\}$. Sejam G_1 e G_2 os *'split graphs'* com relação ao par $\{x, y\}$ (veja a figura abaixo).

Claramente G_1 e G_2 têm menos vértices que G, e também não contêm subdivisões do K_5 e nem do $K_{3,3}$. Logo, pela hipótese de indução, G_1 e G_2 são planares. Além disso, ambos têm uma imersão plana na qual a aresta xy pertence à fronteira da face externa. Estas duas imersões planas podem ser acopladas em x e y de modo a produzir uma imersão plana de G. Portanto, G é planar.

<u>Caso 2.</u> G é 3-conexo.

Como G é 3-conexo, pelo Lema 9.10 temos que G tem uma aresta $e = xy$ tal que G/e é 3-conexo. Seja z o vértice obtido identificando-se os vértices x e y.

Pelo Lema 9.11, G/e não contém uma subdivisão do K_5 e nem do $K_{3,3}$, e portanto, pela hipótese de indução, G/e é planar. Considere um grafo plano G/e e o subgrafo plano $G/e - z$.

Como G/e é 3-conexo, pelo Lema 9.12 a imersão plana de G/e é única.

Seja F a face do grafo plano $G/e - z$ tal que em G/e esta contém o vértice z, e seja C o circuito facial que é a fronteira da face F. É imediato que todos os vizinhos de x ou y, exceto eles próprios, devem pertencer a C.

Sejam $x_1, x_2, \ldots, x_k$ os vizinhos de x que ocorrem em C em ordem cíclica. Seja P_i o caminho em C que vai de x_i a x_{i+1} e não contém nenhum x_j, $j \notin \{i, i+1\}$, onde $x_{k+1} = x_1$.

• Se todos os vizinhos de y, excetuando x, estão contidos em um desses caminhos, então uma imersão plana de G pode ser obtida a partir da imersão de G/e, donde segue que G é planar.

• Analisemos então o caso em que nem todos os vizinhos de y, excetuando x, estão contidos em um dos caminhos P_i. Como y tem 3 ou mais vizinhos incluindo x, uma das 3 possibilidades deve ocorrer:

(a) y tem 3 ou mais vizinhos em $\{x_1, , x_k\}$;

(b) y tem um vizinho u em $P_i - \{x_i, x_{i+1}\}$ para algum i, e algum vizinho v não pertencente a P_i;

(c) y tem 2 vizinhos x_o e x_j tais que $j \neq i + 1$ e $i \neq j + 1$.

No caso **(a)** o subgrafo G induzido pelos vértices de C juntamente com x e y contém uma subdivisão do K_5, contrariando a hipótese.

Nos casos **(b)** e **(c)** o subgrafo de G induzido pelos vértices de C juntamente com x e y contém uma subdvisão do $K_{3,3}$, contrariando a hipótese.

Como as 3 possibilidades analisadas não ocorrem, a prova está completa. $\square$