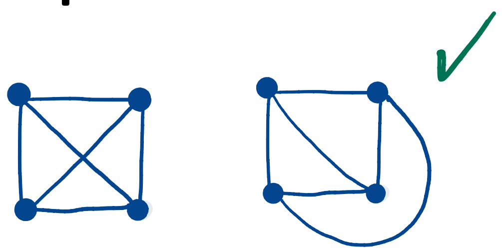
Capítulo 9

Grafos Planares

Neste capítulo estudaremos alguns resultados fundamentais sobre grafos planares. Veremos alguns conceitos básicos, o conceito de grafo dual, a Fórmula de Euler, e apresentaremos uma prova do Teorema de Kuratowski (1930) que caracteriza grafos planares.

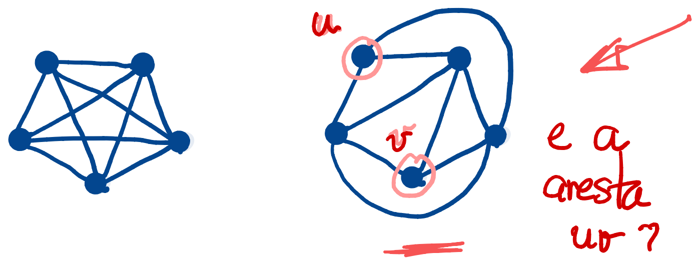
1 Conceitos básicos

Um grafo G é **planar** se pode se desenhado no plano de modo que quaisquer duas de suas arestas não se intersectam, exceto em extremos que sejam comuns a ambas. Um tal desenho no plano de um grafo G é chamado uma **imersão plana** ou **representação plana** ou um **mapa** de G. Quando G é planar, dizemos também que G é **imersível no plano**.



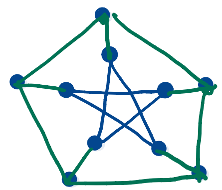
X

K_4 é planar



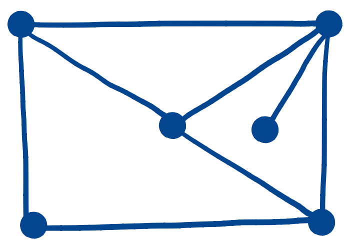
K_5 não é planar?

Grafo de Petersen

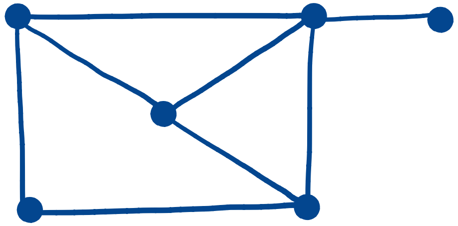


É planar ou não?

Um **grafo plano** é um grafo planar que está imerso no plano.

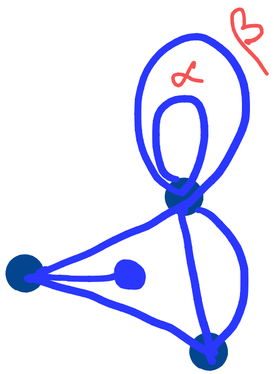


Grafo plano G_1

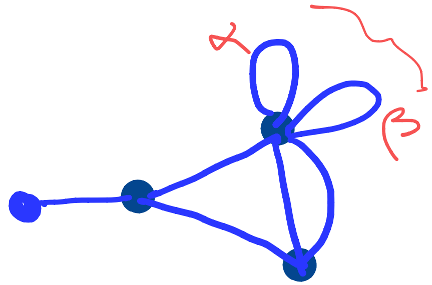


Grafo plano G_2

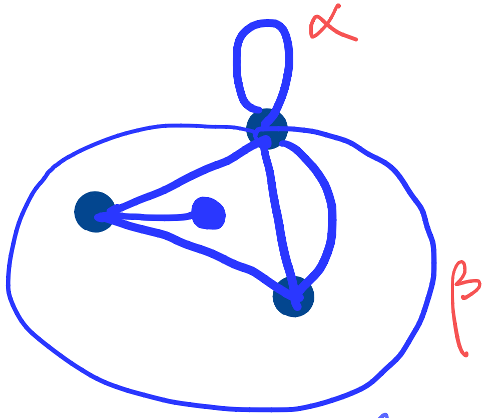
Representações planas de um mesmo grafo G



Grafo plano H_1



Grafo plano H_2



Grafo plano H_3

Representações planas de um mesmo grafo H

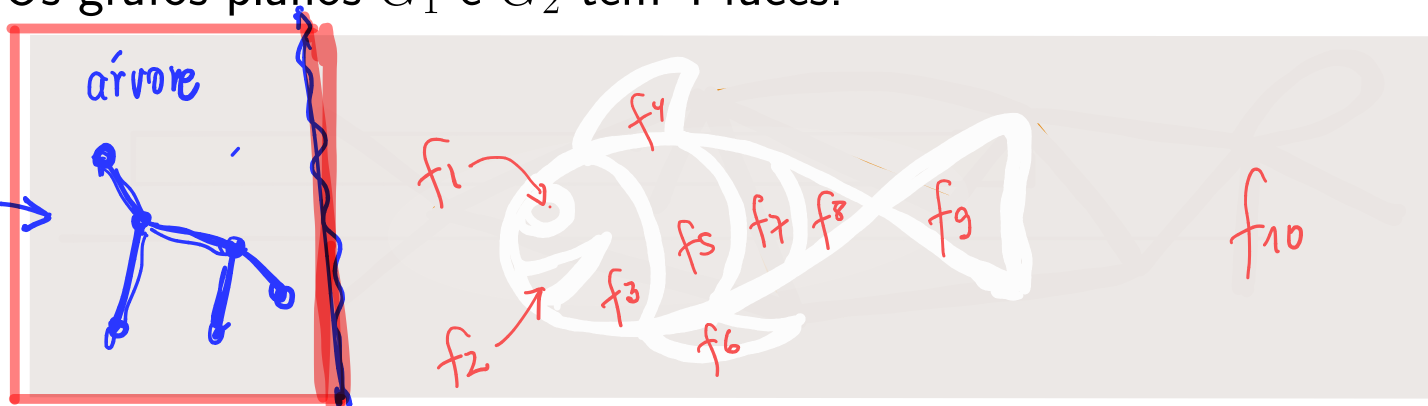
Dado um grafo plano G, removendo-se todas as curvas e os pontos que representam as arestas e os vértices de G, o que resta são regiões conexas, chamadas **faces**.

(Imagine que o desenho está feito na areia de uma praia, e que desenhamos as arestas e os vértices escavando sulcos com um bastão; agora, olhe esse desenho, ignorando os sulcos que são as arestas e os vértices; o que se vê são algumas regiões conexas, nas quais não há nenhum sulco, a não ser em sua fronteira.)

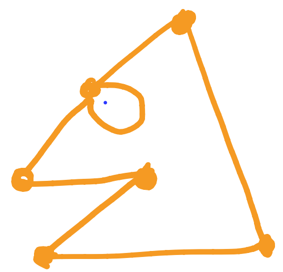
Note que sempre há uma face ilimitada. Tal face é chamada **face externa** (ou **infinita**). Os grafos planos G_1 e G_2 têm 4 faces.

Outro exemplo

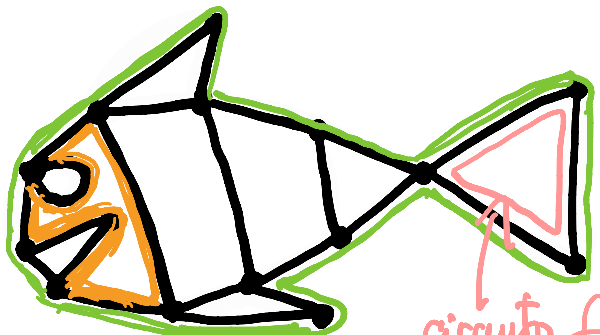
Só tem uma face



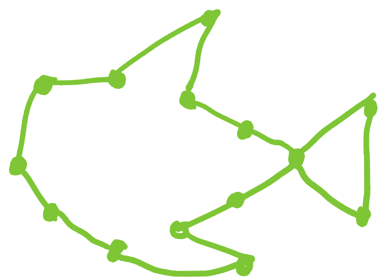
A **fronteira** de uma face é o passeio fechado formado pelas arestas e vértices no fecho da face. Um circuito de um grafo plano é chamado **circuito facial** se é fronteira de uma face.



fronteira da face f3



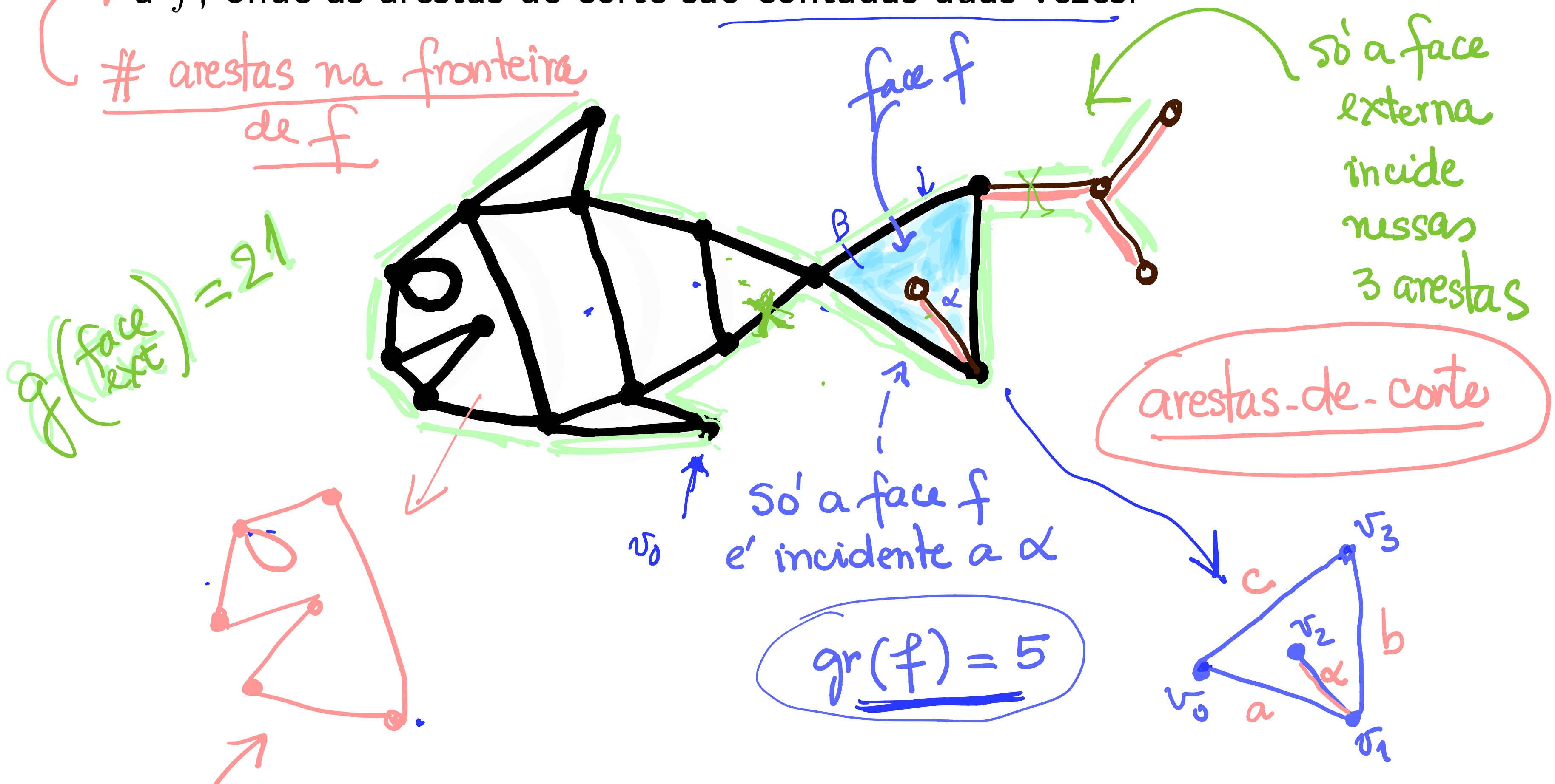
circuito facial (fronteira da face f9)



fronteira da face f10 (externa)

Dizemos que uma face é **incidente** aos vértices e arestas na sua fronteira. Se α é uma aresta-de-corte, então apenas uma face é incidente a α. Se α não é uma aresta-de-corte, então há exatamente duas faces incidentes a α, e neste caso dizemos que α **separa** essas faces.

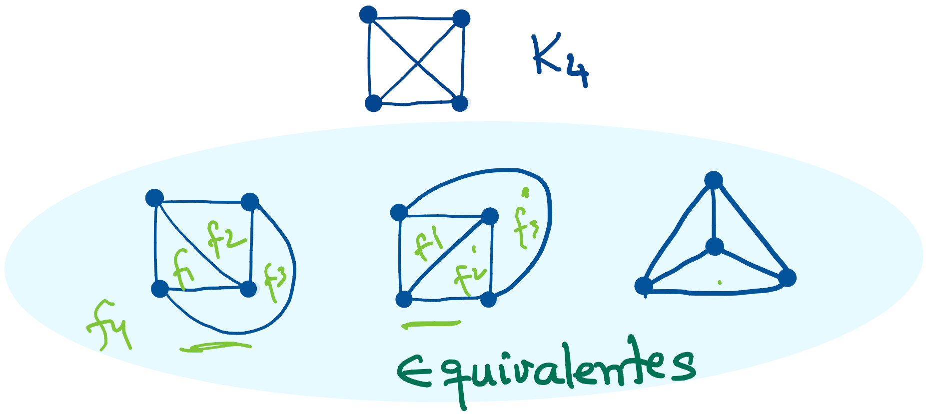
O **grau de uma face** f, denotado por $\mathbf{gr}(f)$, é o número de arestas incidentes a f, onde as arestas-de-corte são contadas duas vezes.

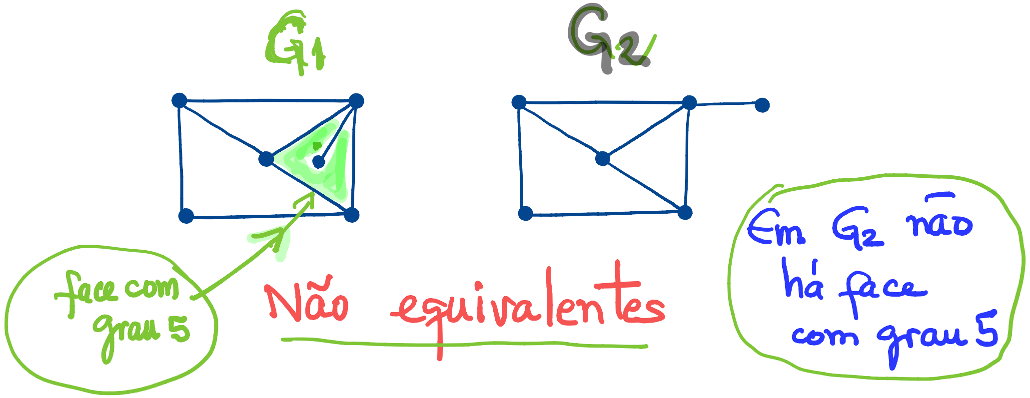


fronteira de f: $(v_0, a, v_1, \alpha, v_2, \alpha, v_1, b, v_3, c, v_0)$

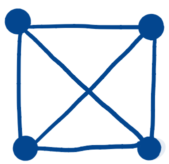
2 vezes

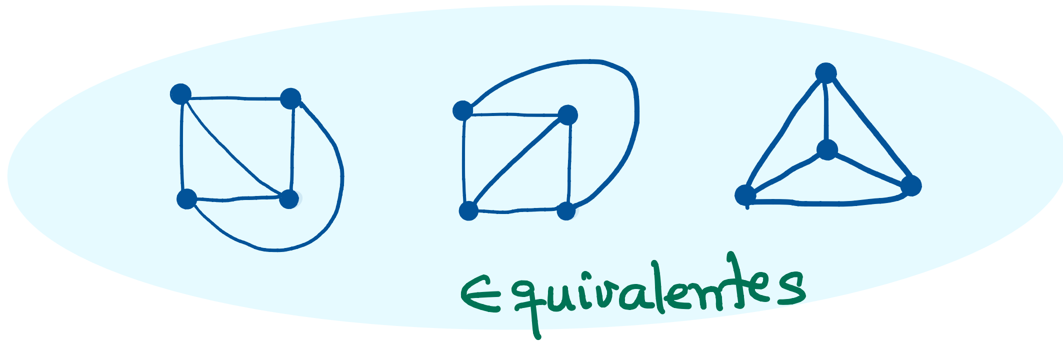
Dizemos que duas imersões planas são **equivalentes** se a fronteira de uma face em uma imersão sempre corresponde à fronteira de uma face em outra imersão. As imersões planas G_1 e G_2 não são equivalentes: a fronteira da face externa de G_2 não corresponde à fronteira de nenhuma face de G_1.





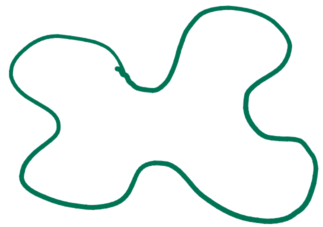
Dizemos que um grafo tem uma **única imersão plana** quando todas as suas imersões planas são equivalentes. (FATO: "Grafos planares 3-conexos têm uma única imersão plana". Usaremos esse resultado mais adiante.)





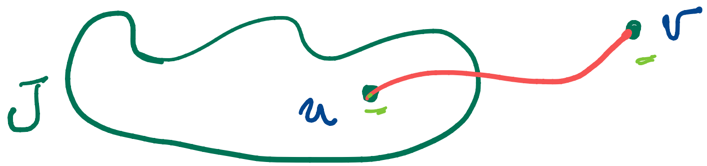
K4 tem uma única imersão plana

Curva de Jordan: curva contínua que não se auto-intersecta e cujo início coincide com o seu término.



Se J é uma curva de Jordan, então J divide o plano em duas regiões: o **interior de** $\boldsymbol{J}$ (**int**$(\boldsymbol{J})$) e o **exterior de** $\boldsymbol{J}$ (**ext** $(\boldsymbol{J})$).

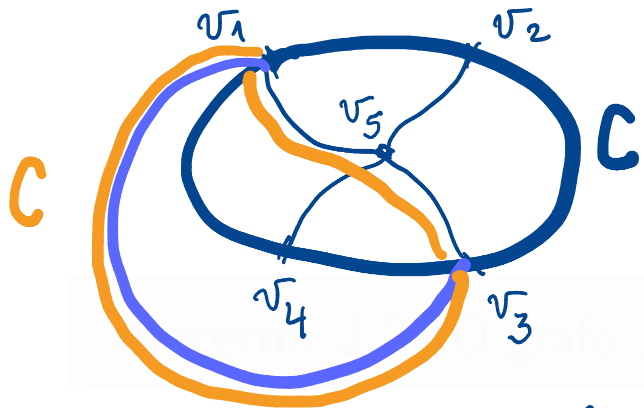
> **Teorema de Jordan.** Se J é uma curva de Jordan, então dado um ponto u em int(J) e um ponto v em ext(J), qualquer curva ligando u a v deve intersectar J em algum ponto.



Usando o teorema acima, podemos provar que os grafos K_5 e $K_{3,3}$ não são planares. (Veremos mais tarde uma outra prova.)

Teorema J.1. O grafo K_5 não é planar.

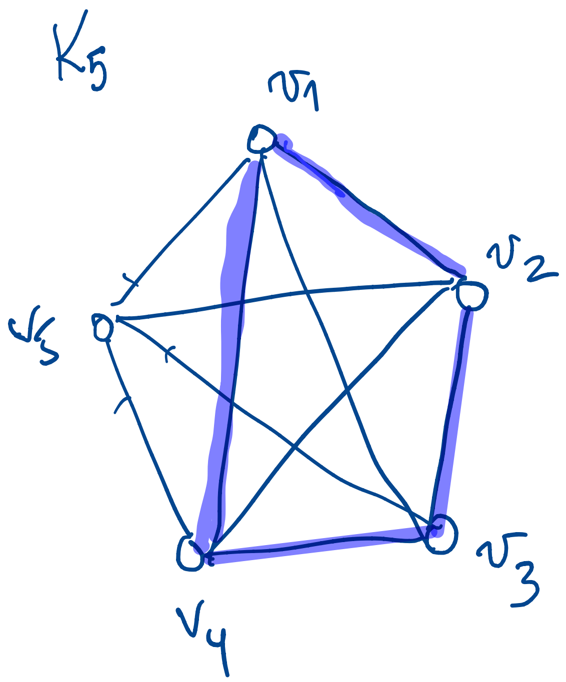
Prova. Suponha que K_5 seja planar. Seja $V(K_5) = \{v_1, \dots, v_5\}$.
O circuito $C = (v_1, \dots, v_4)$ define uma curva de Jordan e como tal divide o plano em duas regiões: $\text{int}(C)$ e $\text{ext}(C)$.

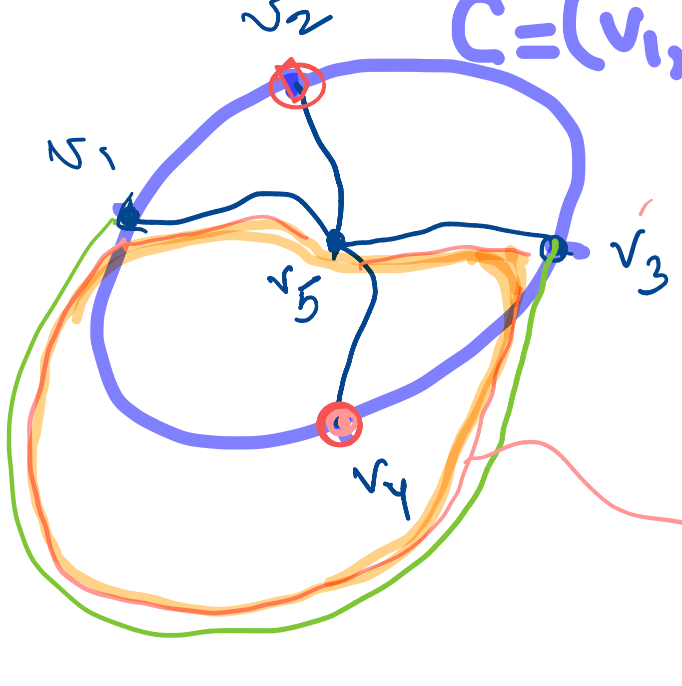


Então $v_5 \in \text{int}(C)$ ou $v_5 \in \text{ext}(C)$. Suponha que $v_5 \in \text{int}(C)$ (o outro caso é análogo). Neste caso, as arestas v_1v_5, v_2v_5, v_3v_5 e v_4v_5 devem ser desenhadas em $\text{int}(C)$; e a aresta v_1v_3 deve ser desenhada em $\text{ext}(C)$. Agora, o circuito $C_1 = (v_1, v_5, v_3)$ — como uma curva de Jordan — tem exatamente um entre v_4 e v_4 em seu interior. Mas então a aresta v_2v_4 não pode ser desenhada sem violar a planaridade. Concluímos então que K_5 não é planar. $\square$

Teorema J.2. O grafo $K_{3,3}$ não é planar.

Prova. Exercício para casa (fazer uma prova similar à acima).



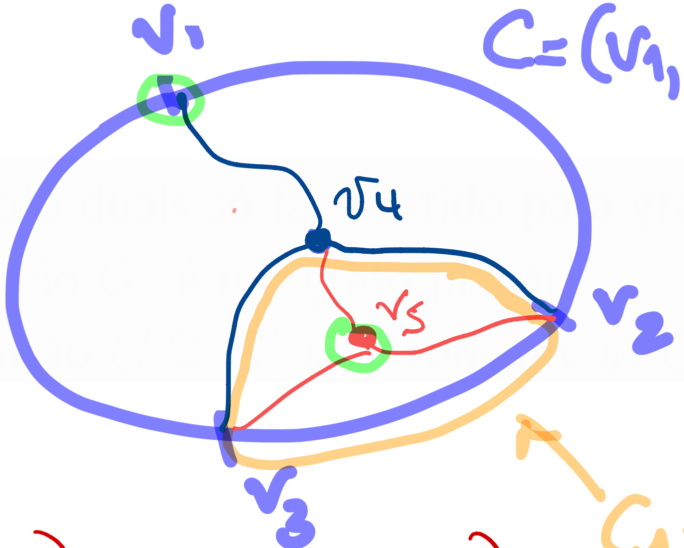


$C=(v_1, v_2, v_3, v_4)$

$v_5 \in int(C)$ ou $v_5 \in ext(C)$ (análogo)

$C_1 = (v_1, v_5, v_3)$

Outra prova (análoga)



$C=(v_1, v_2, v_3)$

$v_4 \in int(C)$ ou $v_4 \in ext(C)$

$C_1 = (v_4, v_2, v_3)$

$v_5 \in int(C_1)$ e $v_1 \in ext(C_1)$

7.a

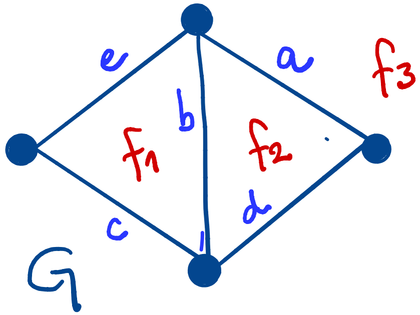
Grafo Dual (de um grafo plano)

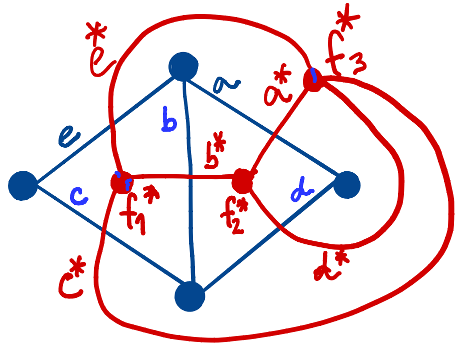
Seja G um grafo plano. O **dual de G**, denotado por $\mathbf{G}^*$, é o grafo definido da seguinte maneira:

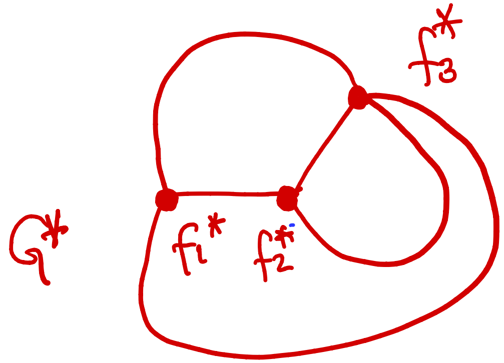
(a) a cada face f de G fazemos corresponder um vértice f^* em G^*;

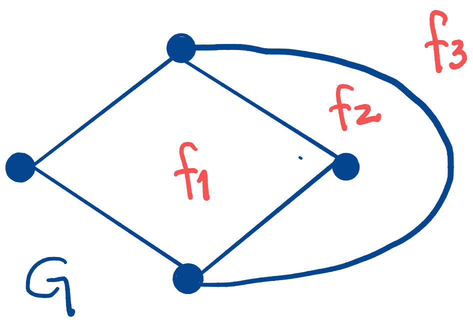
(b) a cada aresta e de G fazemos corresponder uma aresta e^* em G^*, tal que e^* liga dois vértices f^* e h^* se e só se as faces f e h em G são separadas por e.

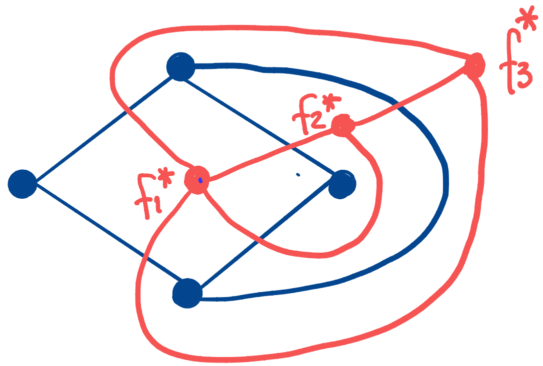
Notação: Vamos denotar por $\boldsymbol{F(G)}$ o conjunto das faces de G.
Temos que $|V(G^*)| = |F(G)|$ e $|A(G^*)| = |A(G)|$.

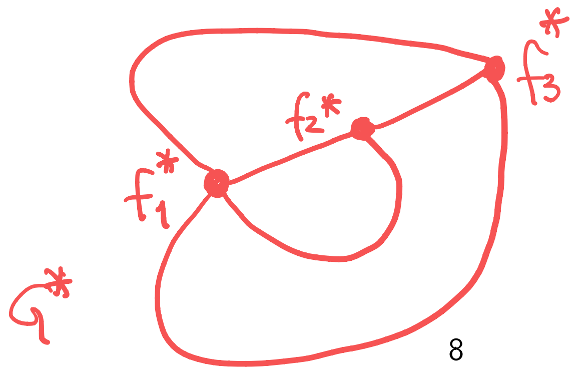




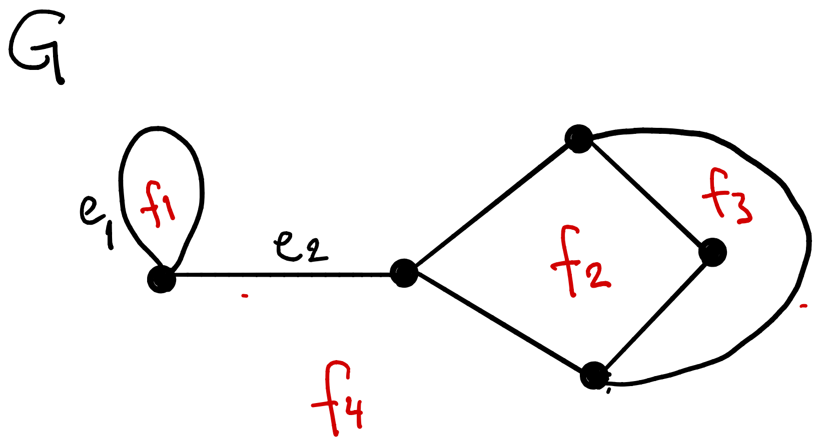


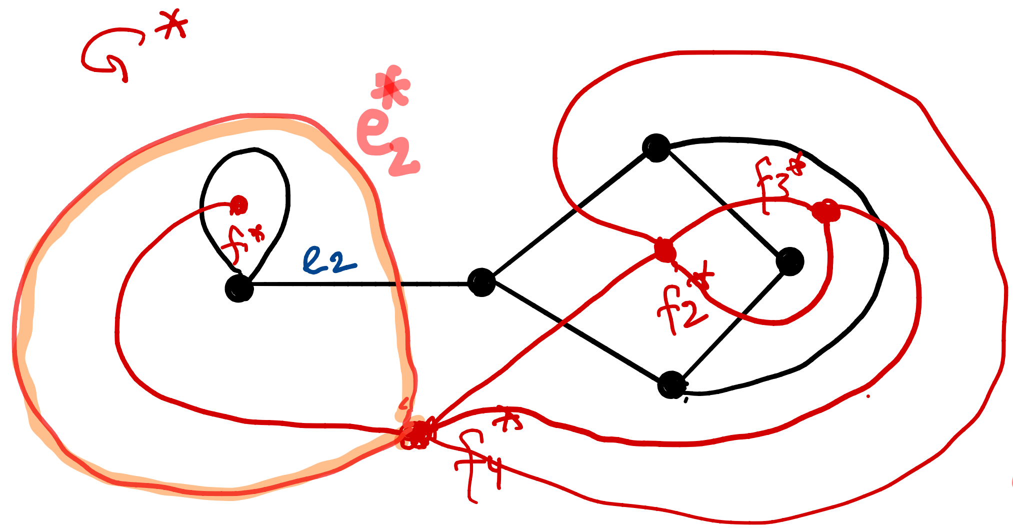






Construção do dual quando há arestas-de-corte e laços em G





e aresta-de-corte em G $\Longrightarrow$ e^* laço em G^* (que cruza e apenas uma vez)

Veja o laço e_2^*

e laço em G $\Longrightarrow$ e^* aresta-de-corte em G^*

IMPORTANTE: O conceito de grafo dual só faz sentido para grafo plano.

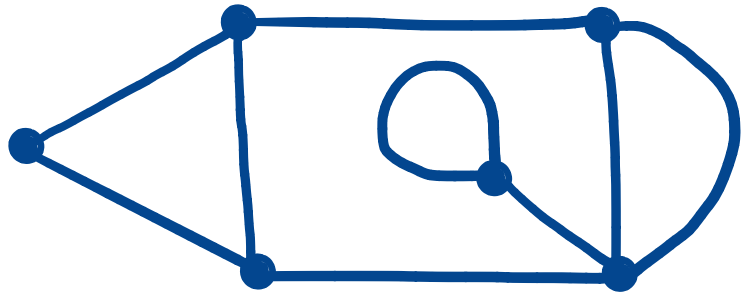
FATO: Se G é um grafo plano, então G^* é um grafo planar.

FATO: Seja G um grafo plano. Então $G \cong G^{**}$ se e somente se G é conexo.

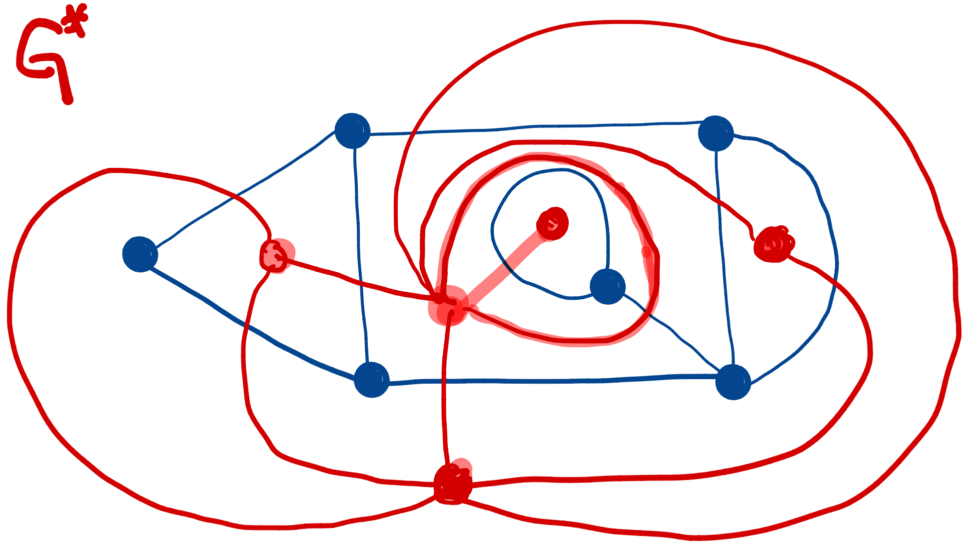
$$(G^*)^* = G^{**}$$

$$\boxed{G \cong G^{**} \iff G \text{ conexo}}$$

G

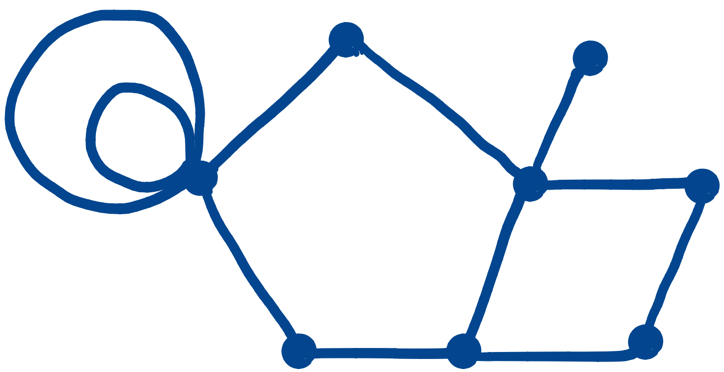


G^*

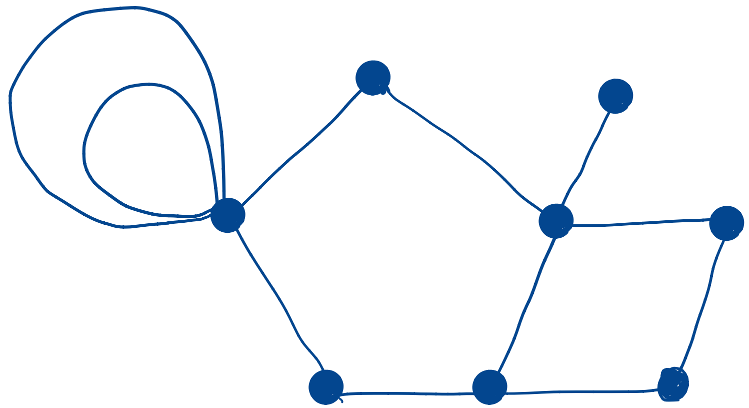


EXERCÍCIO: Desenhe G^*

G

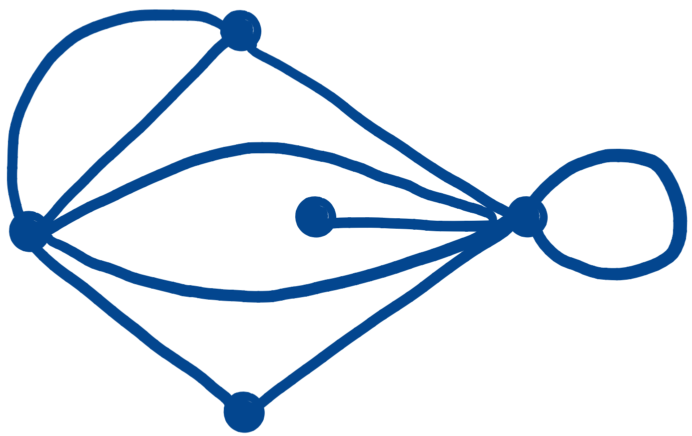


G^*

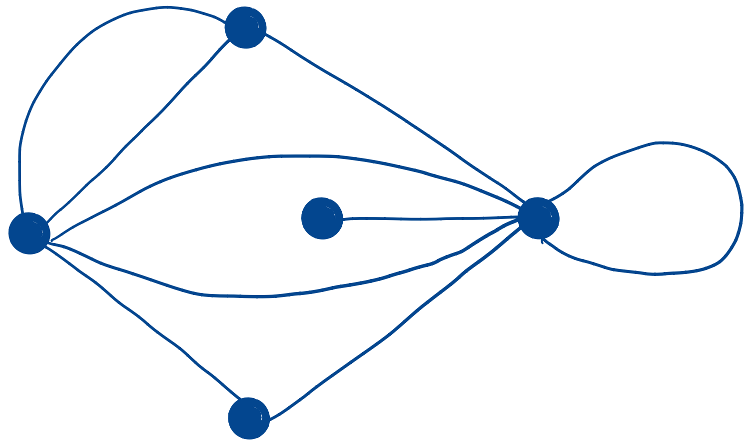


• Para cada um dos grafos G^* observe que $G^{**} \cong G$.

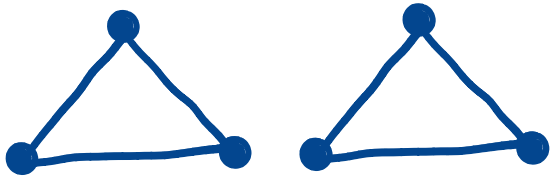
G



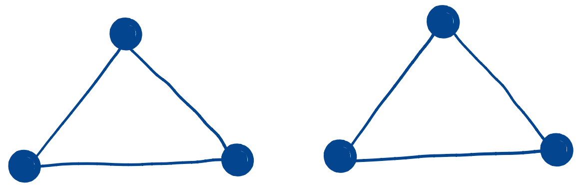
G^*



G



G^*



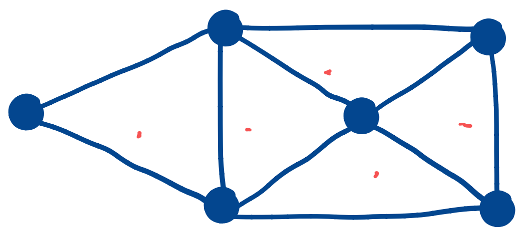
IMPORTANTE: O conceito de grafo dual só faz sentido para grafo plano.

FATO: Se G é um grafo plano, então G^* é um grafo planar.

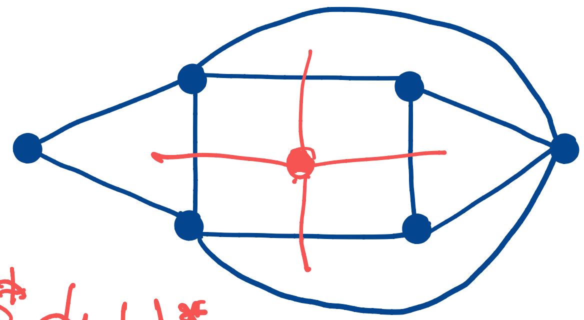
FATO: Seja G um grafo plano. Então $G^{**} = G$ se e somente se G é conexo.

OBS: Um grafo planar pode ter representações planas distintas cujos duais não são isomorfos. Vejam como ficam os duais das seguintes representações planas de um mesmo grafo G.

G



H



$G \cong H$ e $G^* \not\cong H^*$

OBS: Pode ocorrer $H^* \cong G^*$ e $H \not\cong G$

Veja Exerc.

Da definição de G^*, temos que $|V(G^*)| = |F(G)|$, $|A(G^*)| = |A(G)|$, e além disso,

$$g(f^*) = gr(f) \ \text{ para toda face } f \in F(G).$$

gr(face)

g(vértice)

Com isso, segue imediatamente o seguinte resultado.

Teorema 9.1. Se G é um grafo plano, então $\displaystyle\sum_{f \in F(G)} gr(f) = 2\,|A(G)|$.

Prova. $\displaystyle\sum_{f \in F(G)} gr(f) = \sum_{f^* \in V(G^*)} g(f^*) = 2\,|A(G^*)| = 2\,|A(G)|.$

Cap 1

2 A Fórmula de Euler e suas consequências

Teorema 9.2. (Fórmula de Euler) Euler, 1750
Se G é um grafo plano conexo, então

$$|V(G)| - |A(G)| + |F(G)| = 2.$$

Prova. Por indução em $|F(G)|$.

- Se $|F(G)| = 1$ então toda aresta de G é uma aresta-de-corte. Neste caso, G é uma árvore. Logo, $|V(G)| - |A(G)| = 1$. Portanto, $|V(G)| - |A(G)| + |F(G)| = 2$.
- Seja G um grafo plano conexo tal que $|F(G)| \geq 2$. Seja α uma aresta de G que não é uma aresta-de-corte. Então ao remover α de G obtemos um grafo plano conexo $G' = G - \alpha$. Claramente, $|F(G')| = |F(G)| - 1$ pois as duas faces separadas por α dão origem a uma única face em G' (*). Pela HI, $|V(G')| - |A(G')| + |F(G')| = 2$. Como $|V(G')| = |V(G)|$ e $|A(G')| = |A(G)| - 1$, segue que $|V(G)| - |A(G)| + |F(G)| = 2$. ∎

(*) e as demais se mantêm.

Corolário 9.3. Todas as representações planas de um grafo planar conexo têm o mesmo número de faces.

Prova. Pela Fórmula de Euler, o nº de faces de uma repr. plana G só depende de $|V(G)|$ e $|A(G)|$.

Corolário 9.4. Se G é um grafo planar simples com $n \geq 3$ vértices e m arestas, então $m \leq 3n - 6$.

Prova. É suficiente provarmos para grafos conexos.

Seja G um grafo plano conexo simples. Então cada face de G tem grau pelo menos 3, ie $gr(f) \geq 3$ pr toda face $f \in F(G)$.

Logo, $\sum_{f \in F(G)} gr(f) \geq 3|F(G)|$.

Pelo Teorema 9.1, $\sum_{f \in F(G)} gr(f) = 2m$.

Então $2m \geq 3|F(G)|$, ou seja, $|F(G)| \leq \frac{2m}{3}$. (1)

Pela Fórmula de Euler, $n + m + |F(G)| = 2$. (2)

Combinando (1) e (2), temos que

$$m \underset{(2)}{=} n + \underbrace{|F(G)|} - 2 \underset{(1)}{\leq} n + \frac{2m}{3} - 2, \text{ ou seja, } m \leq 3n - 6.$$

Corolário 9.5. Se G é um grafo planar simples, então $\delta(G) \leq 5$.

Prova. Seja $n = |V(G)|$ e $m = |A(G)|$ e $\delta = \delta(G)$.
Suponha que $n \geq 7$, caso contrário o resultado é imediato.
Como G é planar, $m \leq 3n-6$.
$$\delta n \leq \sum_{v \in V(G)} g(v) = 2m \leq 2(3n-6) = 6n-12.$$
Logo, $(\delta - 6)n \leq 12$. Portanto, $\delta - 6 < 0$, ou seja, $\delta \leq 5$. ■

Corolário 9.6. Se G é um grafo bipartido planar simples com $n \geq 3$ vértices e m arestas, então $m \leq 2n - 4$.

Prova. (Exercício p/ casa)
Dica: Fazer como na prova do Corol. 9.4 usando a hipótese de que G é bipartido ($\not\exists$ tem circ ímpares).

Corolário 9.7. O grafo K_5 não é planar.

Prova. No K_5 temos que $n = |V(K_5)| = 5$ e $m = |A(K_5)| = 10$.
Neste caso, $3n-6 = 9$. Logo, $m \nleq 3n-6$.
Portanto, pelo Corolário 9.4, K_5 não é planar. ∎

Corolário 9.8. O grafo $K_{3,3}$ não é planar.

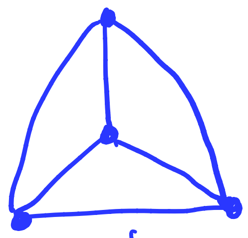
Prova. (exercício)

OBS: O grafo completo K_5 é um grafo não planar com o menor número possível de vértices, e $K_{3,3}$ é um grafo não planar com o menor número possível de arestas. (Todo grafo não planar tem pelo menos 5 vértices e 9 arestas.

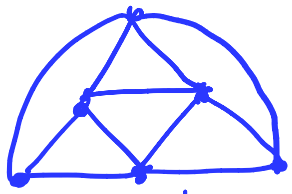
Segue do Corol. 9.4 que um grafo planar maximal com n vértices tem precisamente $3n-6$ arestas. (Todas faces têm grau 3)

Definição: Uma **triangulação plana** é um grafo plano no qual a fronteira de cada face tem exatamente 3 arestas (cada face é limitada por um triângulo).

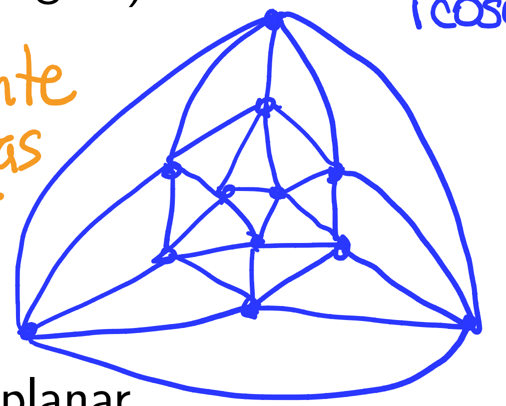
tem exatamente $3n-6$ arestas



tetraedro



octaedro



icosaedro

EXERCÍCIOS

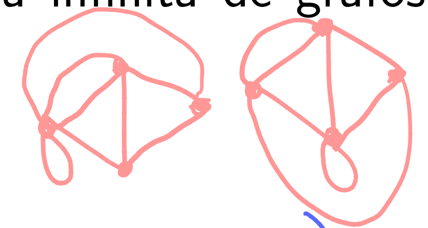
E9.1. Mostre que todo grafo com no máximo 3 circuitos é planar.

E9.2. Encontre um grafo simples G com sequência de graus $(4,4,3,3,3,3)$ tal que (a) G é planar; (b) G não é planar.

E9.3. Mostre que o complemento de um Seja G um grafo planar simples com 11 vértices. Mostre que o complemento de G não é planar.

E9.4. Generalize a Fórmula de Euler para grafos planos não conexos.

E9.5. Dizemos que um grafo plano G é auto-dual se $G \cong G^*$. Prove que: (a) Todas as rodas W_n $(n \geq 3)$ são auto-duais. (b) Se G é auto-dual com n vértices e m arestas, então $2n = m + 2$. (c) Construa outra família infinita de grafos auto-duais.



E9.6. Pode ocorrer $H^* \cong G^*$ e $H \not\cong G$?

E9.7. Prove o Teorema J.2 (imitando a prova do Teorema J.1).