28/maio

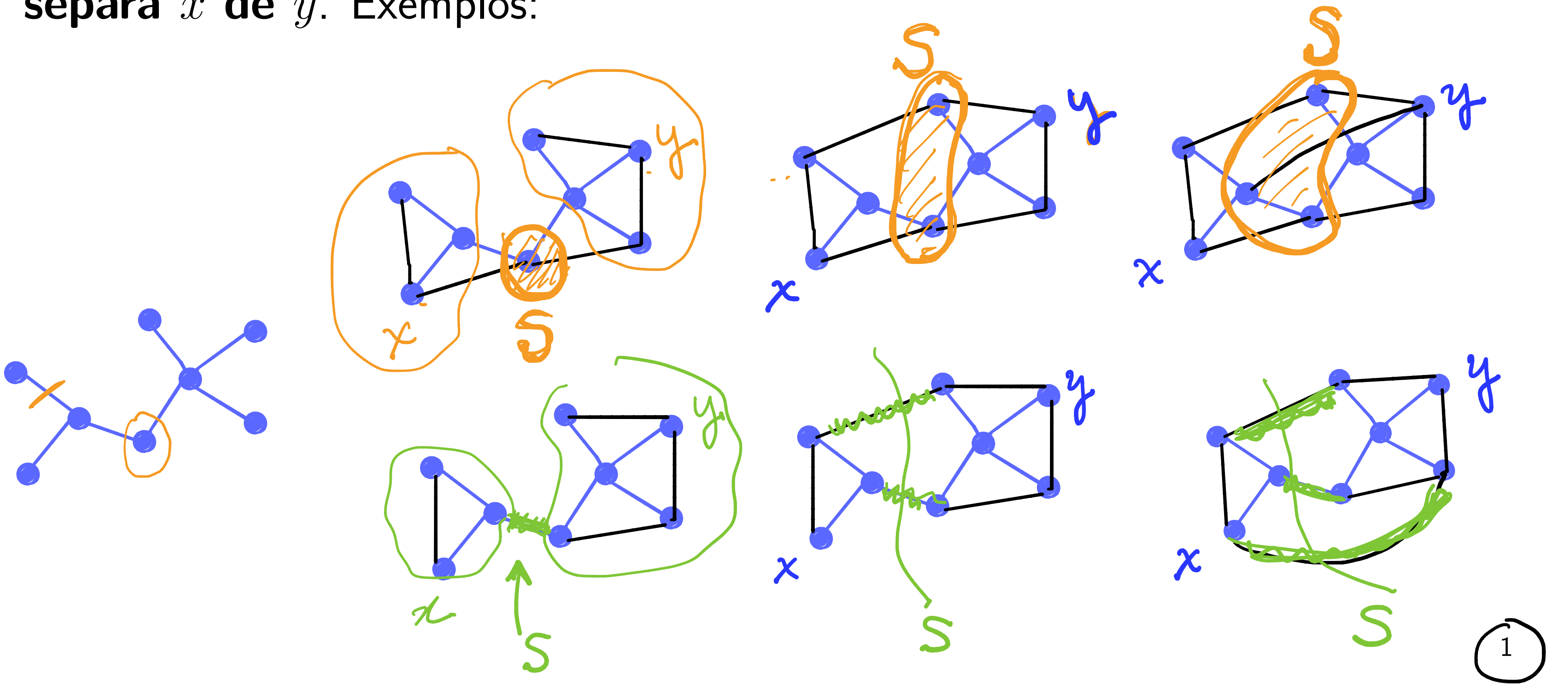
Capítulo 8

Conexidade - Teorema de Menger

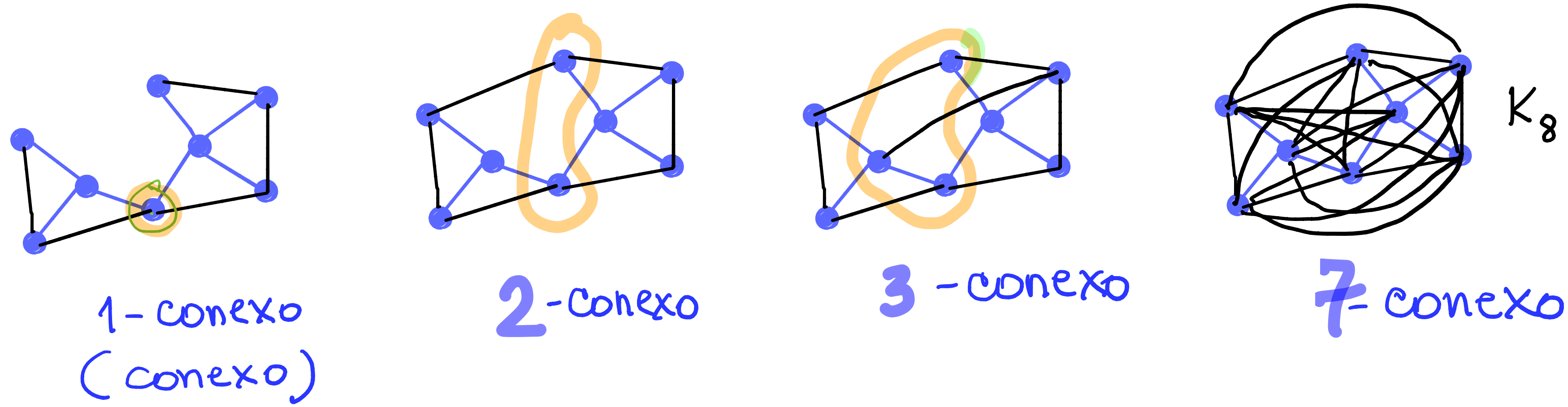
interesse : medida (se forte/fraca ...)

1 Introdução

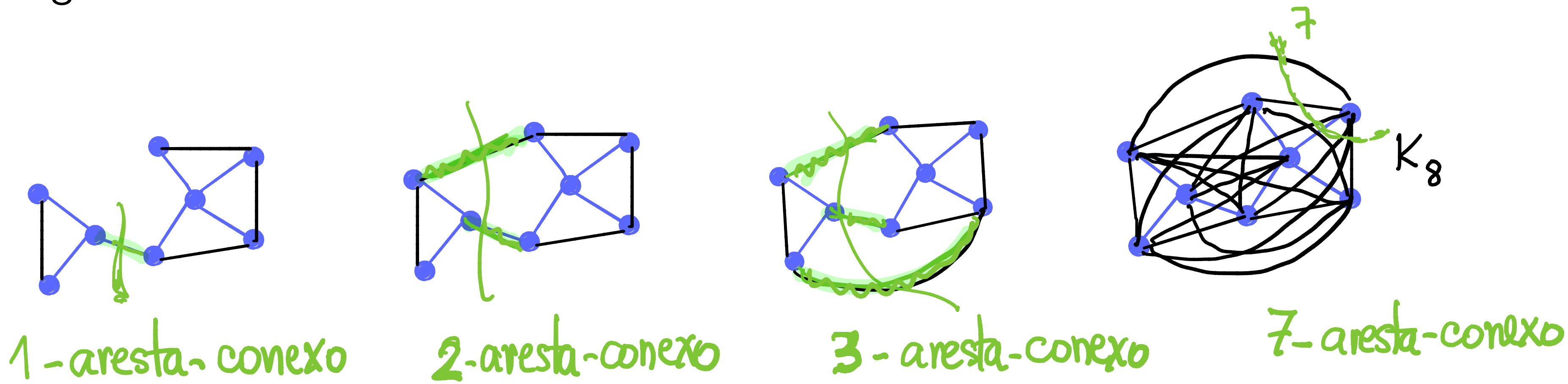
Neste capítulo, os grafos considerados são sem laços. Seja $G = (V, A)$ um grafo conexo, e $S \subset V$ ou $S \subset A$. Se $G - S$ é desconexo, então dizemos que S **separa** G. Se em $G - S$ dois vértices x e y pertencem a components distintos, então dizemos que S **separa** x **de** y. Exemplos:



- Para $k \geq 2$, dizemos que G é k-**conexo** se $G \cong K_{k+1}$ ou G tem pelo menos $k+2$ vértices e não existe $S \subset V$, $|S| = k-1$, tal que S separa G. [Um grafo G é 1-**conexo** se e só se G é conexo e não trivial.]



- Para $k \geq 2$, dizemos que G é k-**aresta-conexo** se G tem pelo menos 2 vértices e não existe $F \subset A$, $|F| \leq k-1$ tal que F separa G. Grafos com aresta-de-corte são grafos 1-aresta-conexos.



- O maior valor de k para o qual G é k-conexo é a **conexidade** de G, denotado por

$$\kappa(G).$$

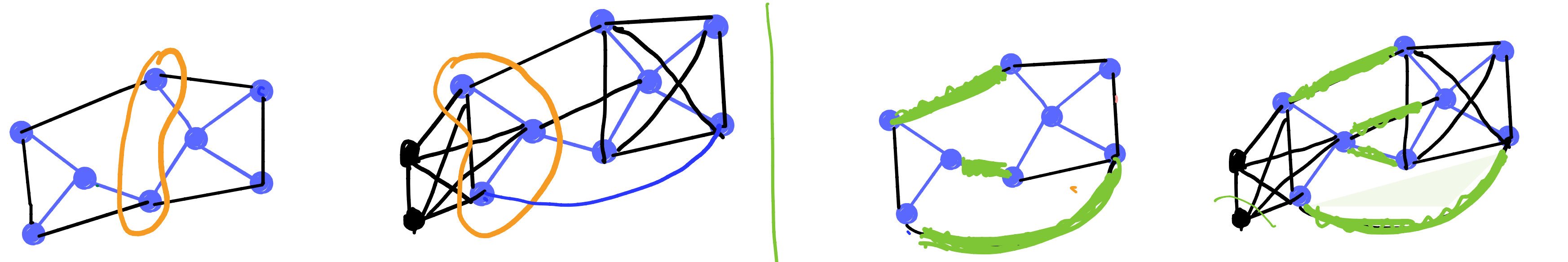
(*)

- O maior valor de k para o qual G é k-aresta-conexo é a **aresta-conexidade** de G, denotado por

$$\kappa'(G).$$

(**) ↗ outra notação usada

Ex:



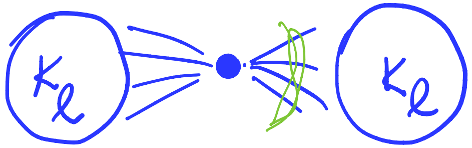
$\kappa(G) = 2$ $\kappa(G) = 3$ $\kappa'(G) = 3$ $\kappa'(G) = 4$

[Se G é k-conexo, então $\kappa(G) \geq k$.]
[Se G é k-aresta-conexo, então $\kappa'(G) \geq k$.]

- Def: $\kappa(G) = 0$ (resp. $\kappa'(G) = 0$) se G é trivial ou desconexo.

(*) (OBS: em inglês, esses parâmetros são chamados **connectivity** e **edge-connectivity**).
(**)

- $\kappa(G)$ e $\kappa'(G)$ podem ser bem diferentes.

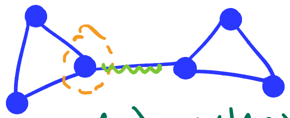


$\kappa(G)=1$
$\kappa'(G)=\ell$

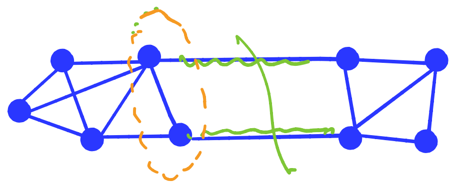
$\kappa(G)\leq\kappa'(G)$

- Podemos ter $\kappa(G)=\kappa'(G)$.

Ex



$\kappa(G)=\kappa'(G)=1$



$\kappa(G)=\kappa'(G)=2$

- Será que $\kappa(G)\leq\kappa'(G)$ sempre?

SIM!

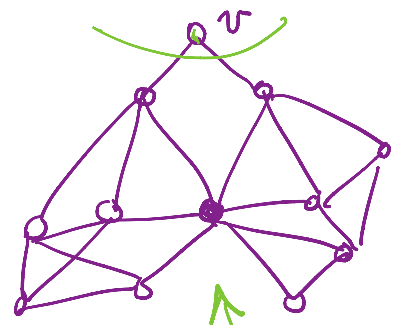
Proposição 8.1

- **Exercício 8.1.** Seja G um grafo simples. Prove que $\kappa(G) = \kappa'(G)$ se G é uma árvore ou um circuito ou um grafo completo.

- **Exercício 8.2.** Seja $G = (V, A)$ um grafo sem laços. Prove que

$$\kappa(G) - 1 \leq \kappa(G - v) \leq \kappa(G) \quad \forall v \in V.$$

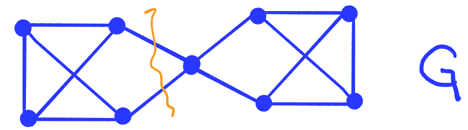
$$\kappa'(G) - 1 \leq \kappa'(G - e) \leq \kappa'(G) \quad \forall e \in A.$$



$\kappa(G) = 2$

$\kappa(G-v) = 1$

- **Exercício 8.3.** Seja G o grafo de Petersen. Determine $\kappa(G)$ e $\kappa'(G)$.



Lembramos que $\delta(G)$ denota o *grau mínimo de G*.

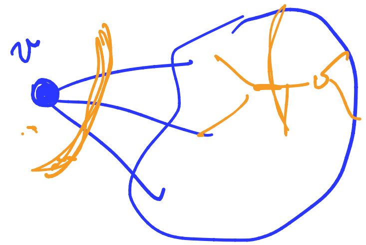
$\kappa(G) \leq \kappa'(G) \leq \delta(G)$

$= 1 \quad = 2 \quad = 3$

Proposição 8.1 Se G é um grafo não trivial, então

$$\kappa(G) \underset{(b)}{\leq} \kappa'(G) \underset{(a)}{\leq} \delta(G).$$

Prova. (a) É fácil ver que $\kappa'(G) \leq \delta(G)$. Basta notar que se v é um vértice de grau mínimo em G, então o conjunto das arestas incidentes a v é um conjunto que separa v dos demais vértices de G. Portanto, o grau mínimo de G é um limitante para $\kappa'(G)$.



$\kappa'(G) \leq g(v) \quad \forall v$

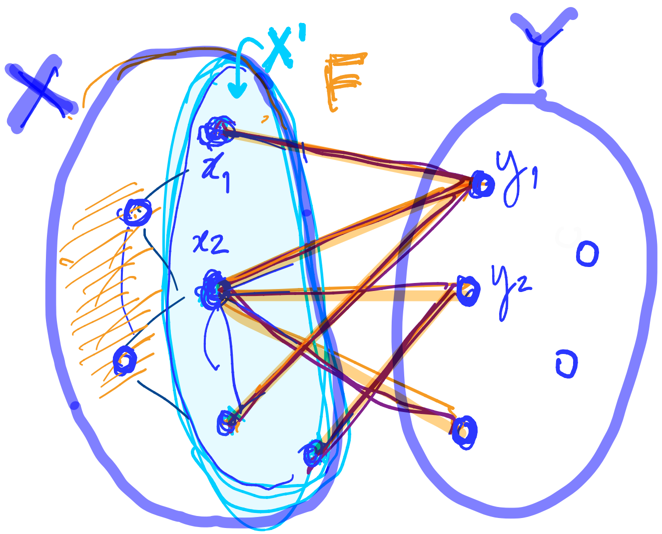
$\kappa'(G) \leq \underbrace{\min\{g(v) : v \in V(G)\}}_{=\,\delta(G)}$

(b) Vamos provar que $\kappa(G) \leq \kappa'(G)$. Suponhamos que G seja conexo. Seja $k := \kappa'(G)$, e seja $F \subset A(G)$ um conjunto separador com k arestas. Sejam X e Y conjuntos disjuntos de vértices de $V(G)$ tais que $X \cup Y = V(G)$, e as arestas de F são da forma $x_i y_j$, onde $x_i \in X$ e $y_j \in Y$. Seja $X' \subseteq X$ o conjunto dos extremos das arestas em F contidos em X. Claramente, $|X'| \leq k$.

Se $G - X'$ é desconexo, então $\kappa(G) \leq k$, e a prova está completa. Caso contrário, temos que $X = X'$. Neste caso, para cada $x_i \in X'$, temos que $g(x_i) \leq k$ (pense por que vale isso). Como pelo item (a), $\delta(G) \geq k$, concluímos que $g(x_i) \geq k$, donde segue que $g(x_i) = k$ para todo x_i em X' (e $\delta(G) = k$).

veja $*$

Tome x_1 em X', e chame de Z o conjunto dos k vizinhos de x_1. Se $G - Z$ é desconexo, então Z é um conjunto separador de G, e temos que $\kappa(G) \leq k$. Caso contrário, $G - Z$ é um grafo trivial (formado apenas pelo vértice x_1). Como $\delta(G) = k$, todos os vértices de Z devem ter grau k. Neste caso, $G \cong K_{k+1}$, e portanto $\kappa(G) = k$. □



$|F| = k = \kappa'(G)$

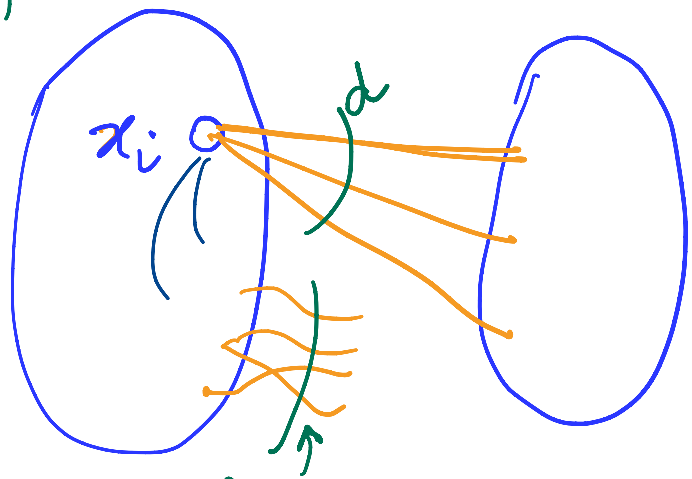
- $G - X'$ desconexo $\Rightarrow \kappa(G) \leq k$ ✓ OK
- $G - X'$ conexo $\Rightarrow X = X'$

(Vamos analisar mais)

$X = X' \Longrightarrow |X'| \leq k$ (pois $|F| = k$)

- Então $g(x_i) \leq k \quad \forall x_i \in X$.

Justif.



$k-d$ arestas $\Rightarrow |X \setminus x_i| \leq k-d \Longrightarrow g(x_i) \leq d + |X \setminus x_i| \leq k$

- $g(x_i) \leq k$

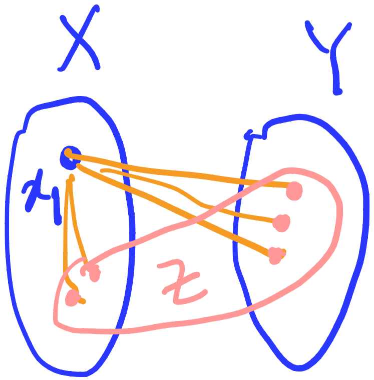
$\underbrace{\delta(G) \geq k}_{\text{resultado (a)}} \Longrightarrow g(x_i) \leq k$

$\Rightarrow \boxed{g(x_i) = k}$ $\forall x_i \in X$

(*) — Outra finalização da prova.

Por simetria, conclui-se que

- todo vértice de Y é extremo de uma aresta em F.
- $\boxed{g(y_j)=k \quad \forall y_j\in Y}$



Considere $x_1 \in X$ e $Z = \mathrm{Adj}(x_1)$ adjacentes a x_1

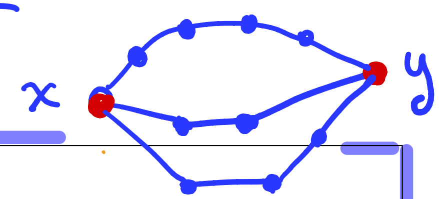
Então $|Z| = k$.

— Se $G-Z$ é desconexo, então $\kappa(G) \leq k$.

— Se $G-Z$ é conexo, então $V(G)\setminus Z = \{x_1\}$

Como $g(v)=k \ \ \forall v \in Z\cup\{x_1\}$, concluímos que $G \cong K_{k+1}$, e portanto, $\kappa(G) = k$. ∎

Se P é um caminho de x para y, dizemos que P é um ***xy*-caminho**. Se P e Q são xy-caminhos, dizemos que P e Q são **caminhos independentes** se P e Q têm apenas os vértices x e y em comum.



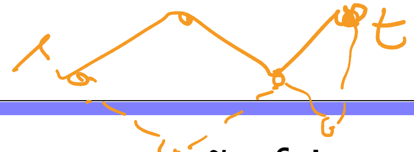
Teorema 8.2 (Menger, 1927) (um resultado min-max)
Seja G um grafo conexo, e s, t vértices distintos de G.

vertice

(a) Se s e t não são adjacentes, então o número mínimo de vértices que separam s de t é igual ao número máximo de st-caminhos independentes.

aresta

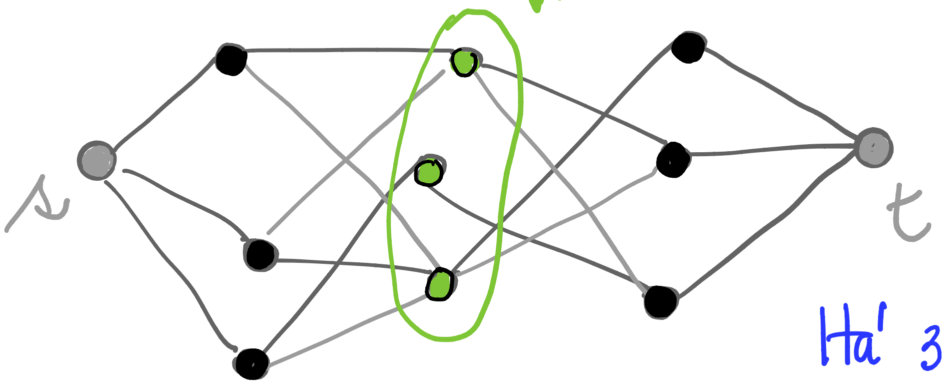
(b) O número mínimo de arestas que separam s de t é igual ao número máximo de st-caminhos arestas-disjuntos.



Prova. [OBS: Há provas que fazem uso do Teorema max-flow min-cut, e que são feitas primeiramente para o caso de grafos orientados. Desses resultados são deduzidos os resultados para o caso não-orientado - caso da versão aqui considerada. Veremos uma prova sem usar tal teorema.]

W ← separador mínimo
(não é único)

$|W| = 3$



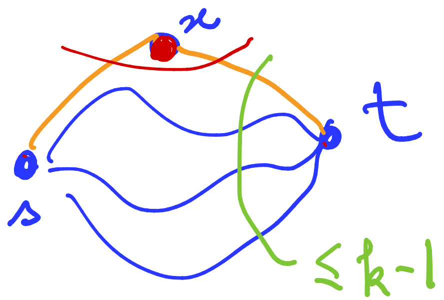
Há 3 st-cam. indep.

Prova da afirmação (a).

Seja G um grafo conexo, e s, t dois vértices distintos de G, não-adjacentes.

Seja k o *número mínimo de vértices que separam* s *de* t.

Se $k = 1$, o resultado é imediato. Suponha que $k \geq 2$. Suponha que a afirmação (a) seja falsa. Tome $k \geq 2$ *mínimo* tal que existe um contra-exemplo para a afirmação (a) para tal k. Seja G um contra-exemplo (para esse k mínimo) com o *menor* número possível de arestas. Então em G há no máximo $k-1$ st-caminhos independentes. Além disso, *não existe* x *em* $V(G)$ *tal que* x *é adjacente a* s *e a* t; pois em caso contrário, $G - x$ seria um contra-exemplo para $k-1$.



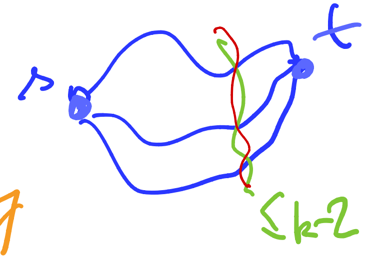
G - x

Seja $W \subset V(G)$ um conjunto que separa s de t, tal que $|W| = k$.

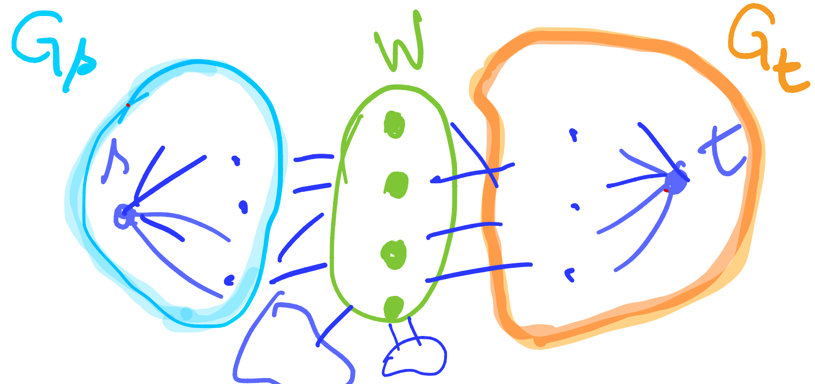
- Suponha que nem s e nem t sejam adjacentes a todos os vértices de W.

  Seja G_s (resp. G_t) o componente de $G - W$ que contém s (resp. t).

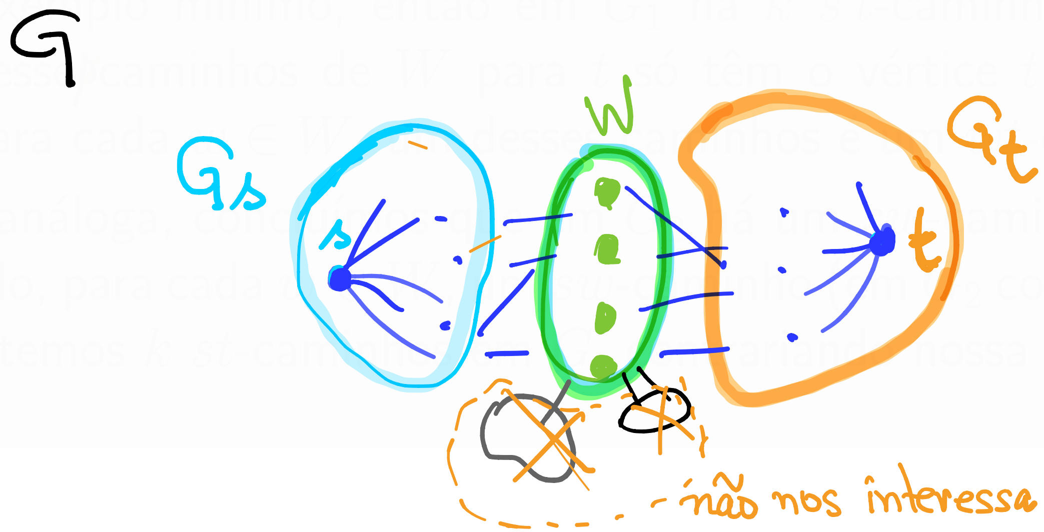
  Construa grafos G_1 e G_2 da seguinte forma:

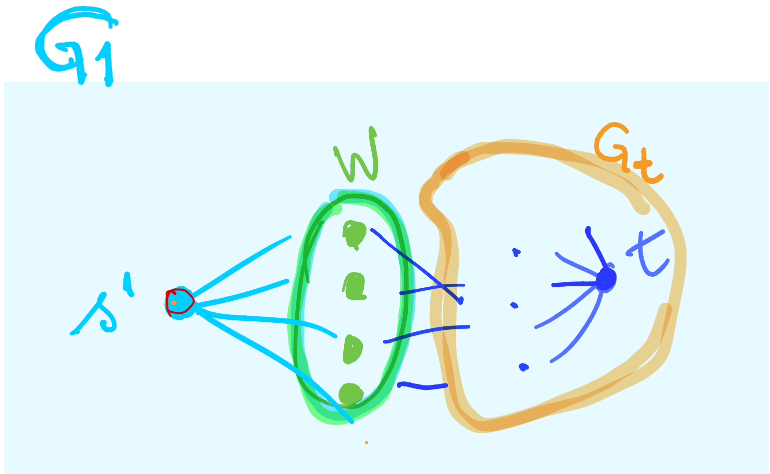


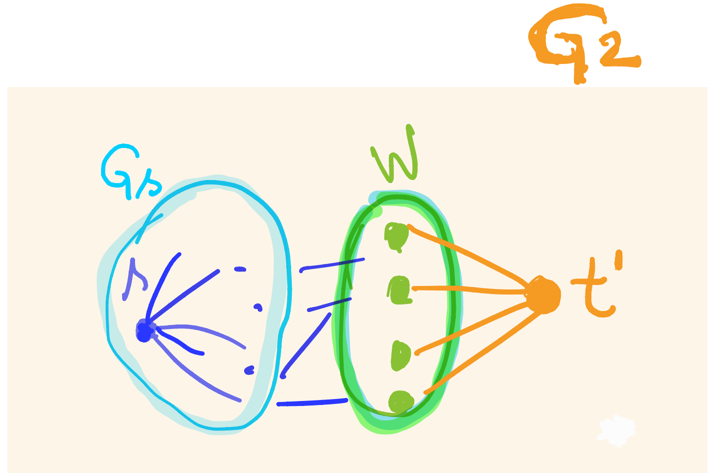
contra-ex. p/ k-1



- $G_1 = (V_1, A_1)$, onde $V_1 = \{s'\} \cup W \cup V(G_t)$, e $A_1 = \{s'w : w \in W\} \cup A(G[W \cup V(G_t)])$;
- $G_2 = (V_2, A_2)$, onde $V_1 = \{t'\} \cup W \cup V(G_s)$, e $A_2 = \{wt : w \in W\} \cup A(G[W \cup V(G_s)])$.



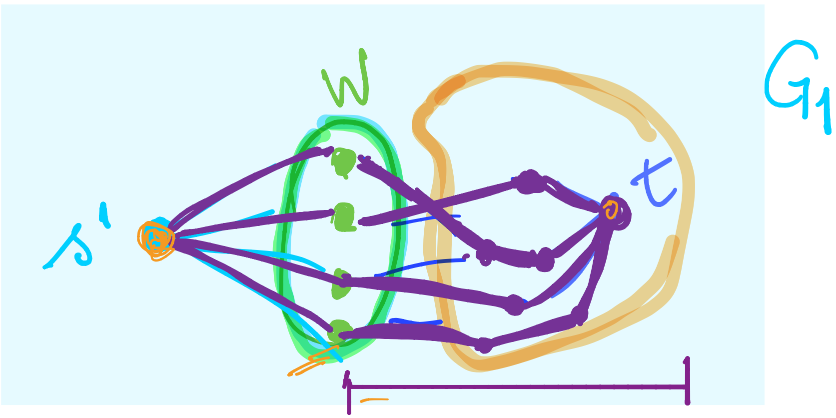


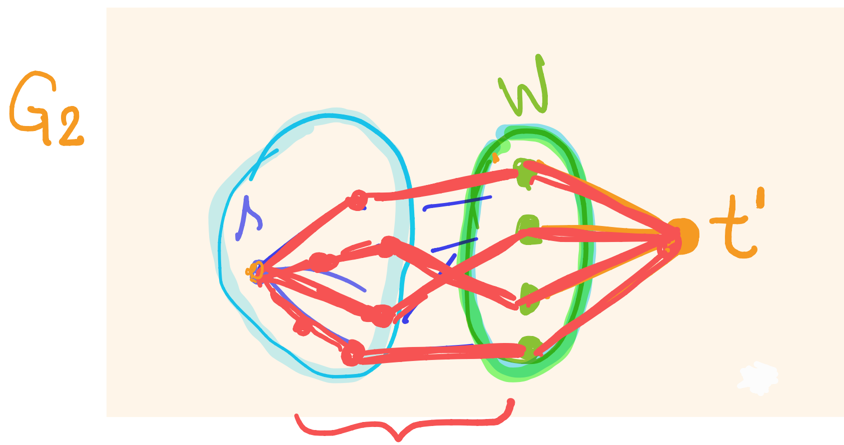


$|V(G_i)| < |V(G)|$ p/ $i=1,2$ $\Rightarrow$ G_1 e G_2 não são contra-ex.

Em G_1 o número mínimo de vértices para separar s' de t é k. Como G é um contra-exemplo mínimo, então em G_1 há k $s't$-caminhos independentes. As seções desses caminhos de W para t só têm o vértice t em comum. Em particular, para cada $w \in W$, um desses caminhos é um wt-caminho.

De maneira análoga, concluímos que em G_2 há um sw-caminho para $w \in W$. Concatenando, para cada $w \in W$, um sw-caminho (em G_2 com um wt-caminho (em G_1), obtemos k st-caminhos independentes em G, contrariando nossa hipótese.





Vamos então analisar a outra possibilidade que resta.

●● Para cada conjunto W com k vértices que separa s de t, pelo menos um entre s e t é adjacente a todos os vértices de W.

Seja $P = (s, x_1, x_2, \ldots, x_p, t)$ um st-caminho *mais curto* em G. Então $p \geq 2$, e pela minimalidade de G, no grafo $G - x_1x_2$ podemos encontrar um conjunto W_0 de $k-1$ vértices que separa s de t. Note que W_0 não separa s de t em G (senão G teria $k-1$ vértices que separam s de t).

Veja (*)

Se W_0 contivesse x_1 (resp. x_2), então W_0 seria um conjunto st-separador de G com $k-1$ elementos, uma contradição. Logo, $x_1, x_2 \notin W_0$.

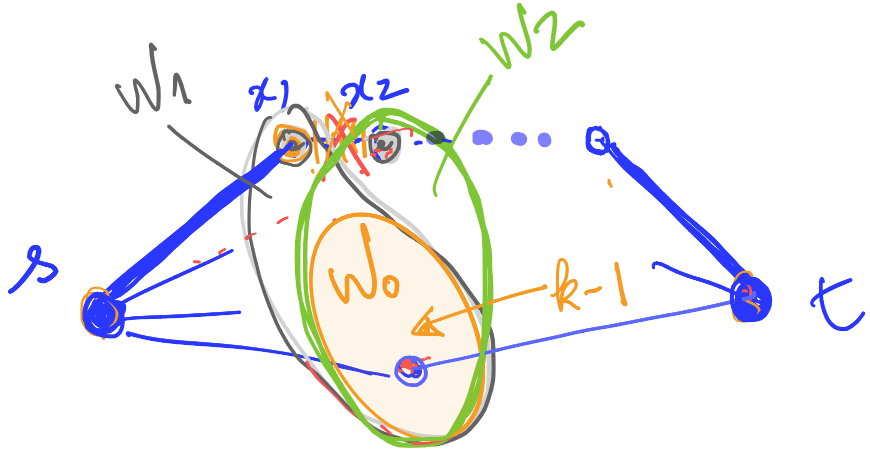
(*) $G' = G - \underbrace{x_1x_2}_{\text{aresta}}$ não é um contra-ex.

Neste caso,

$$W_1 := W_0 \cup \{x_1\} \quad \text{e}$$
$$W_2 := W_0 \cup \{x_2\}$$

são k-conjuntos que separam s de t.

Se G' tivesse um separador de cardinalidade k, então em G' existiriam k st-caminhos indep, e portanto, G também teria tais caminhos.



(st-caminho mais curto.)

Pela escolha de P, sabemos que t (resp. s) não é adjacente a x_1 (resp. x_2). Pela hipótese deste caso (●●), temos que s (resp. t) é adjacente a todos vértices de W_1 (resp. W_2). Neste caso, tanto s como t *são adjacentes a todos os vértices de* W_0. Como $W_0| = k-1 \geq 1$, temos uma contradição (pois um vértice de W_0 seria adjacente tanto a s quanto a t, situação que já descartamos inicialmente). Completamos assim a prova da afirmação (a).

Prova da afirmação (b). [Explicação em aula: considerar um grafo-aresta (*line-graph*) apropriado que se obtém de G e aplicar a afirmação (a).]

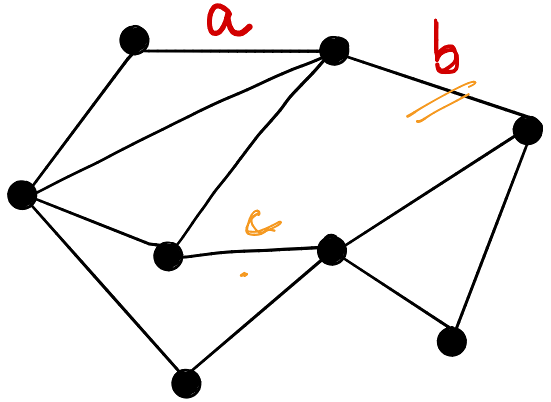
□

Próxima aula

2/junho

Grafo-aresta (ou grafo-linha / line graph) de um grafo

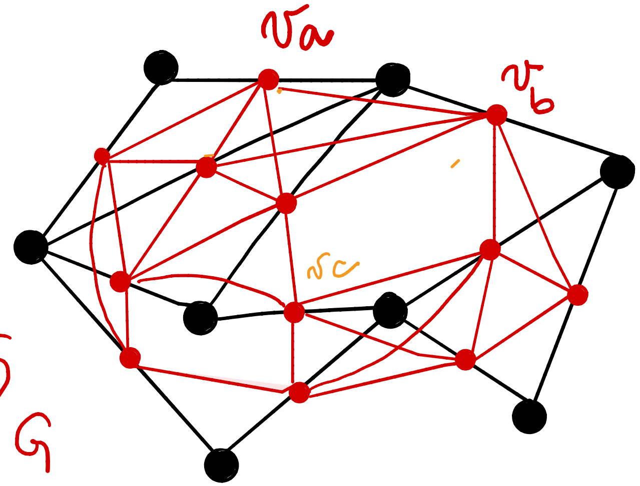
G



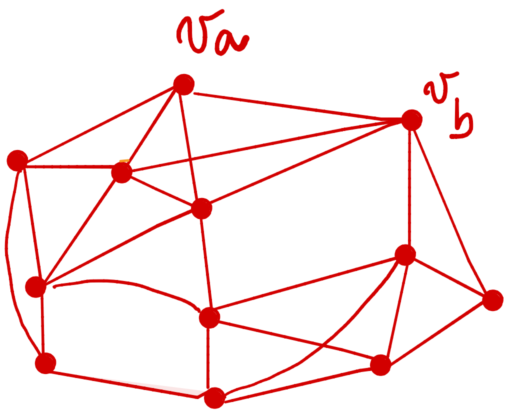
$G' = L(G)$

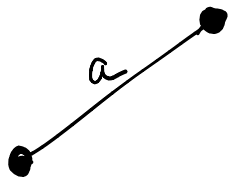
'Line graph' de G

Grafo-aresta de G



L(G)

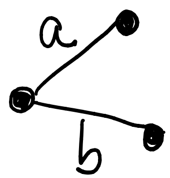


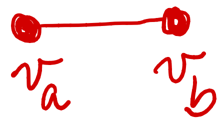


$\rightsquigarrow \; \bullet\, v_a \in V(G')$

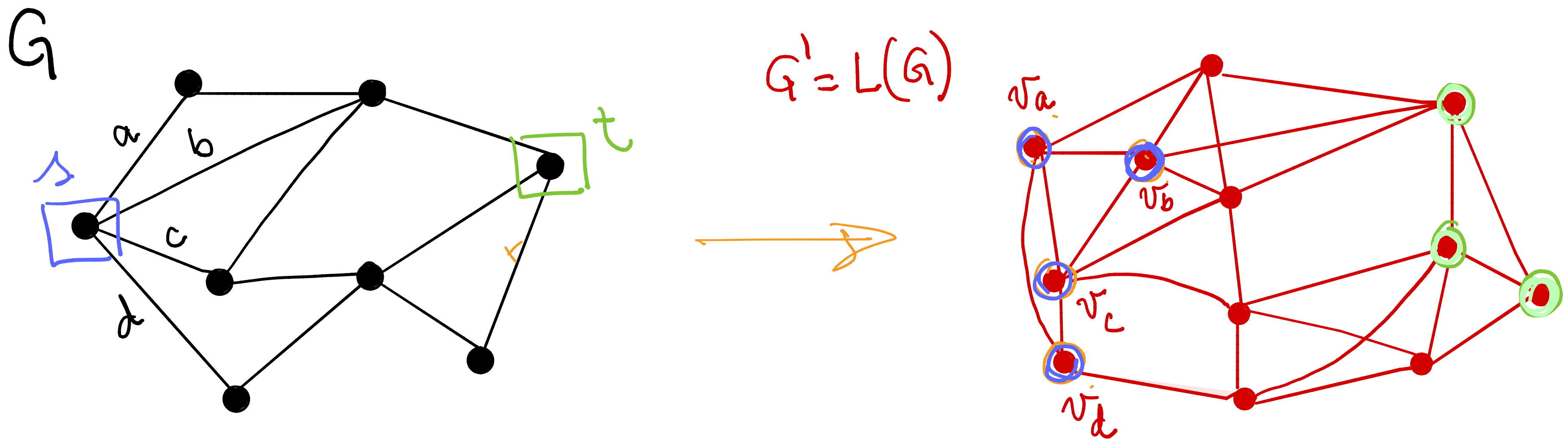
$a \in A(G) \iff v_a \in V(G')$

a e b arestas adjac. em G $\iff$ $v_a v_b \in A(G')$

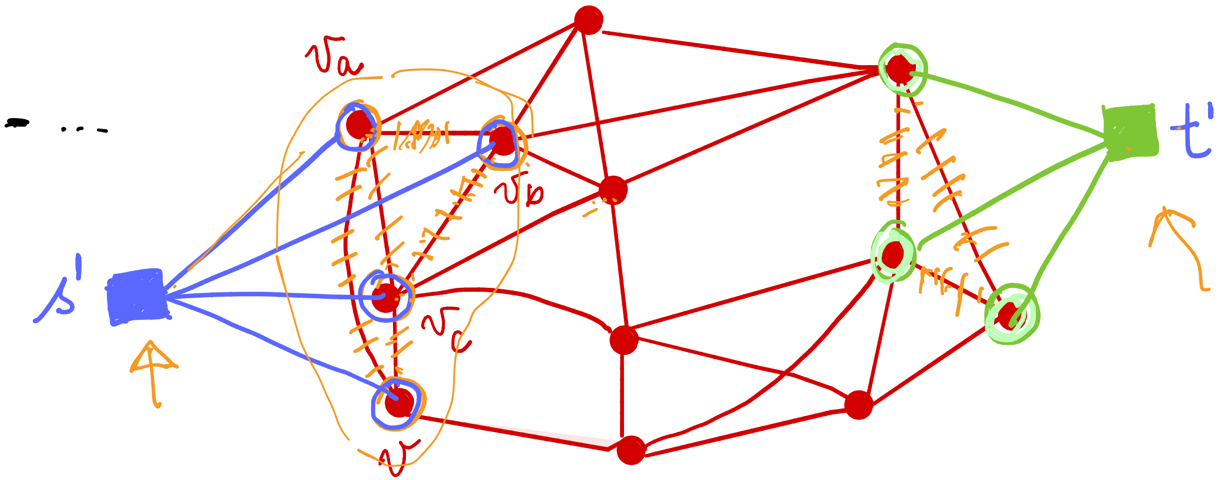




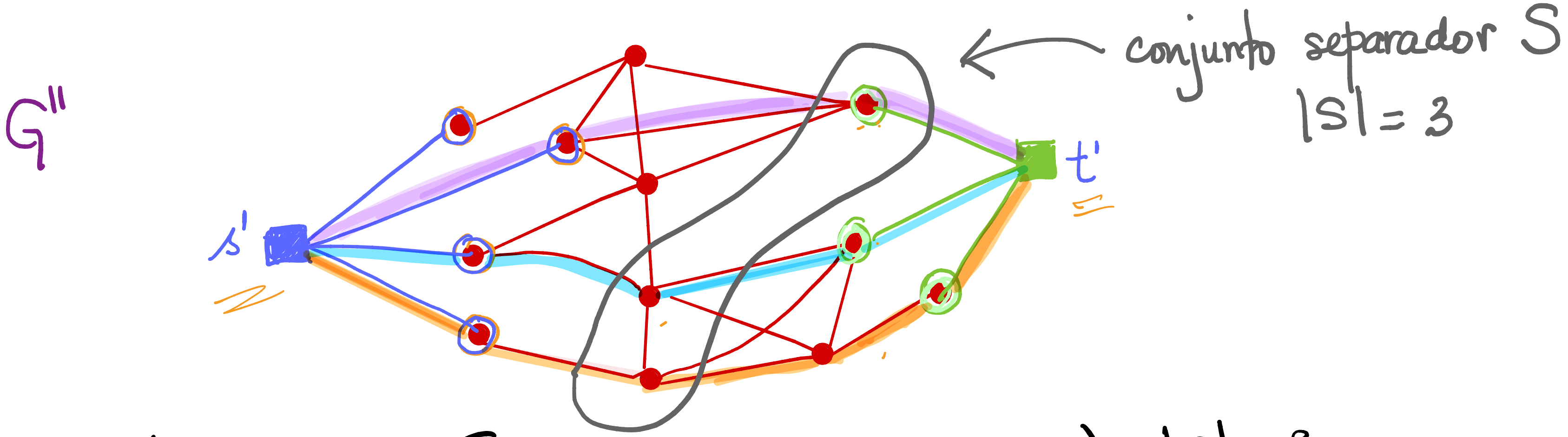
Ideia: transformar o probl. de achar st-cam. arestas-disj. em G ao probl. de achar st-cam. indep. num grafo G'' que vem de G'.



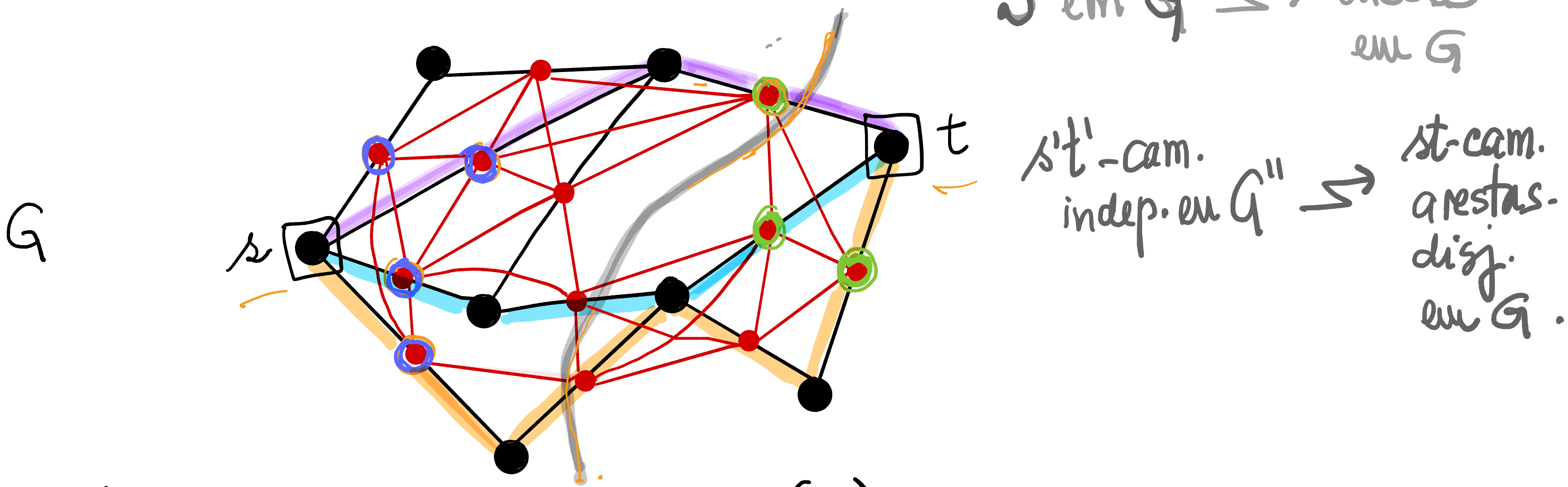
$G'' = G' + \dots - \dots$



— Aplicamos o Teorema 8.2(a) ao grafo G'', s', t'.



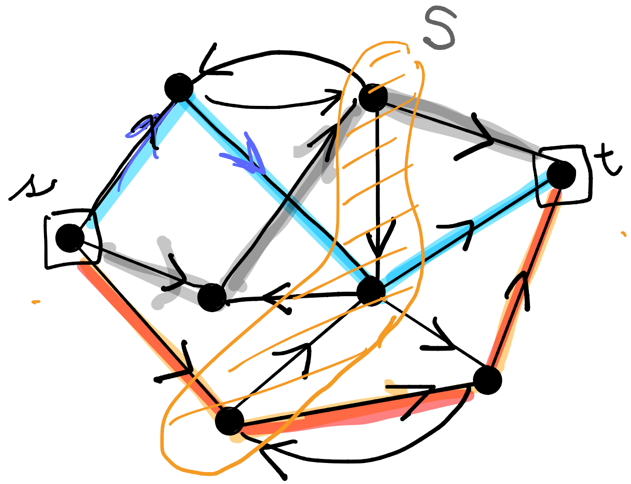
— Obtemos um cjto separ. mínimo $S \subseteq V(G'')$, $|S| = k$ e k $s't'$-caminhos indep. em G''.



— Obtemos o resultado min-max (b).

OBS: Existem 4 versões do Teorema de Menger: para grafos (não-orientados) e para grafos orientados (ou digrafos), e em cada caso temos a versão para caminhos disjuntos nos vértices e para caminhos disjuntos nas arestas. [Veremos isso na aula.]

Versões p/ grafos orientados (análogas)



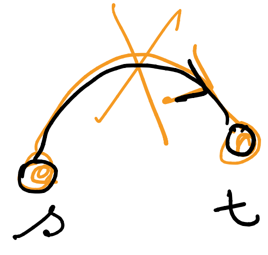
versão p/ vértices / versão p/ arestas

st-caminhos orient. indep. / st-caminhos orient. arestas-disj.

Teorema 8.2' (Menger, 1927) — VERSÃO p/ grafos orientados (digrafos)

Seja D um digrafo conexo, e s,t vértices distintos de D.

(a') Suponha que $st \notin A(D)$. O número mínimo de vértices cuja remoção destrói todos os st-caminhos orientados é igual ao número máximo de st-caminhos orientados independentes em D.



(b') O número mínimo de arestas cuja remoção destrói todos os st-caminhos orientados é igual ao número máximo de st-caminhos orientados aresta-disjuntos em D.

Corolário 8.3 [Caracterização de grafos k-conexos e k-aresta-conexos.]
(a) Para $k \geq 2$, um grafo G é k-conexo se e só se G tem pelo menos 3 vértices e para quaisquer dois vértices s e t de G existem k st-caminhos independentes.
(b) Para $k \geq 2$, um grafo G é k-aresta-conexo se e só se G tem pelo menos 3 vértices e para quaisquer dois vértices s e t de G existem k st-caminhos disjuntos nas arestas.

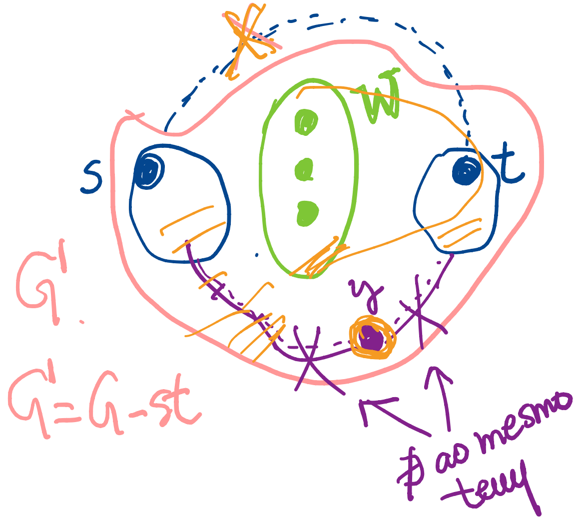
Prova. (a)

($\Leftarrow$) Se G contém k cam. indep. entre quaisquer dois vértices, então $|V(G)| > k$ e G não pode ser separado por menos do que k vértices. Logo, G é k-conexo.

($\Rightarrow$) Suponha que G seja k-conexo e que G tenha vértices s,t que não são conectados por k caminhos indep. Pelo Teorema 8.2(a), s e t são adjacentes. Seja $G' = G - st$. Então G' contém no máx $k-2$ st-cam. indep. Pelo Teorema 8.2(a), podemos separar

[Em G há no máx. $k-1$ st-cam. indep. $\Rightarrow$ Em G' há no max. $k-2$ st-cam. indep.]

s e t em G' por um cjto $W \subseteq V(G')$ com $|W| \leq k-2$. Como $|V(G)| > k$, existe pelo menos um vértice $y \notin W \cup \{s,t\}$ em G.



Em $G-W$ os vértices s e t pertencem a compon. $\neq$s.
Então em $G-W$ o vértice y está separado de s ou t. Suponhamos, spg, que y esteja separado de s. Neste caso, $W \cup \{t\}$ é um conjunto separador de G (pois separa y de s). Mas isto é uma contradição, pois $|W \cup \{t\}| \leq k-1$ e G é k-conexo.

Logo, em G, quaisquer pares de vértices s e t são conectados por k caminhos independentes.

(b) Segue imediatamente do Teorema 8.2(b).

OBS

Teo de Menger — provado em 1927

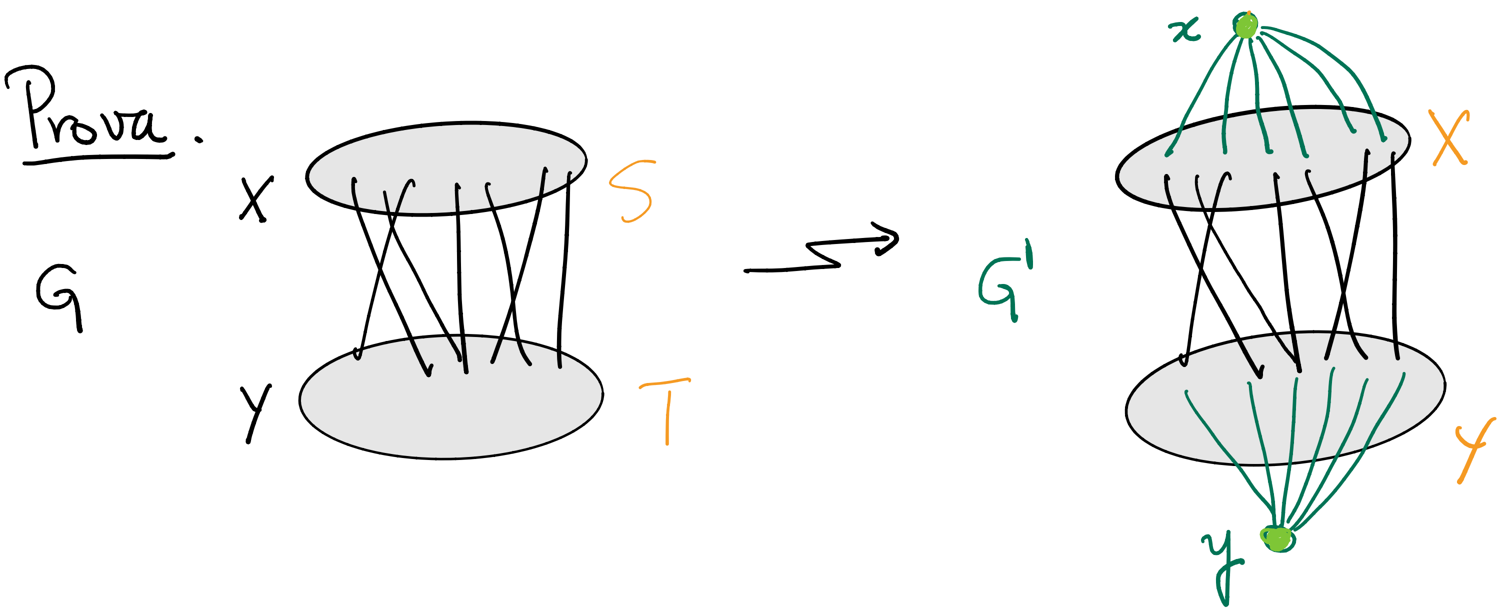
Teo. min-max de König — provado em 1931

G bip., $\mathrm{Emp}(G) = \mathrm{cob}(G)$ (segue como corol. do Teo. Menger)

Teo min-max de König: Se G é um grafo bipartido, então

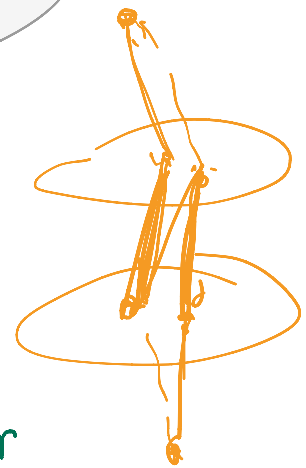
$$\mathrm{Emp}(G) = \mathrm{cob}(G)$$

Prova.



Aplicar **Teo. Menger** (a)

em (G', x, y)



Teo. Menger: Em G', $|\mathcal{P}| = |S|$, onde

$\mathcal{P}$ = cjto de cardinalid. máx. de xy-cam. indep. em G'.

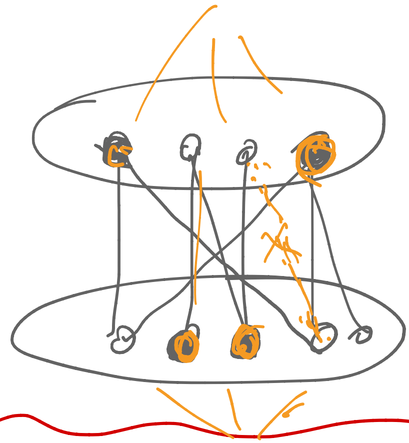
S = cjto mín. de vértices que separam x e y.

É fácil ver que (pensar nos detalhes da prova)

$|\mathcal{P}| = \text{Emp}(G)$ e

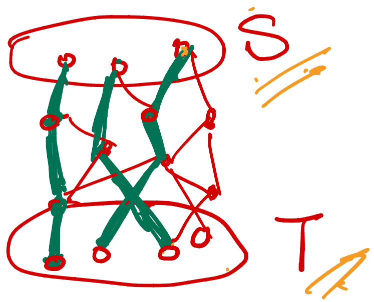
$|S| = \text{cob}(G)$.

Os xy-cam. em $\mathcal{P}$ são de compri/o 3.



Logo, $\text{Emp}(G) = \text{cob}(G)$ ■

OBS: Teo. Menger – versão p/ conjuntos S e T não necess. unitários



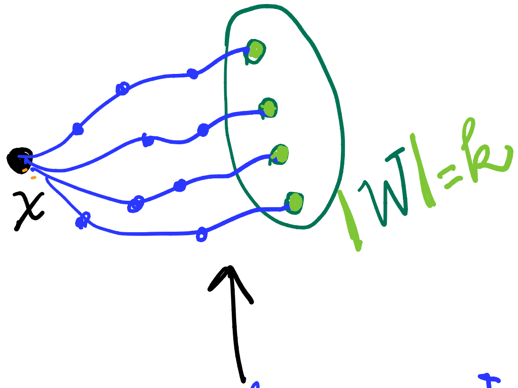
$S \cap T = \emptyset$

EXERCÍCIO. (Proposição)

Seja G um grafo conexo. Dado $W \subset V(G)$ e $x \in V(G) \setminus W$, dizemos que um leque x-W (*) é um conjunto de $|W|$ caminhos de x a W que dois a dois têm apenas o vértice x em comum.

Prove que um grafo G é **k-conexo** sse $|V(G)| \geq k+1$ e para qualquer cjto $W \subset V(G)$, $|W| = k$, e $x \in V(G) \setminus W$, existe um leque x-W em G.

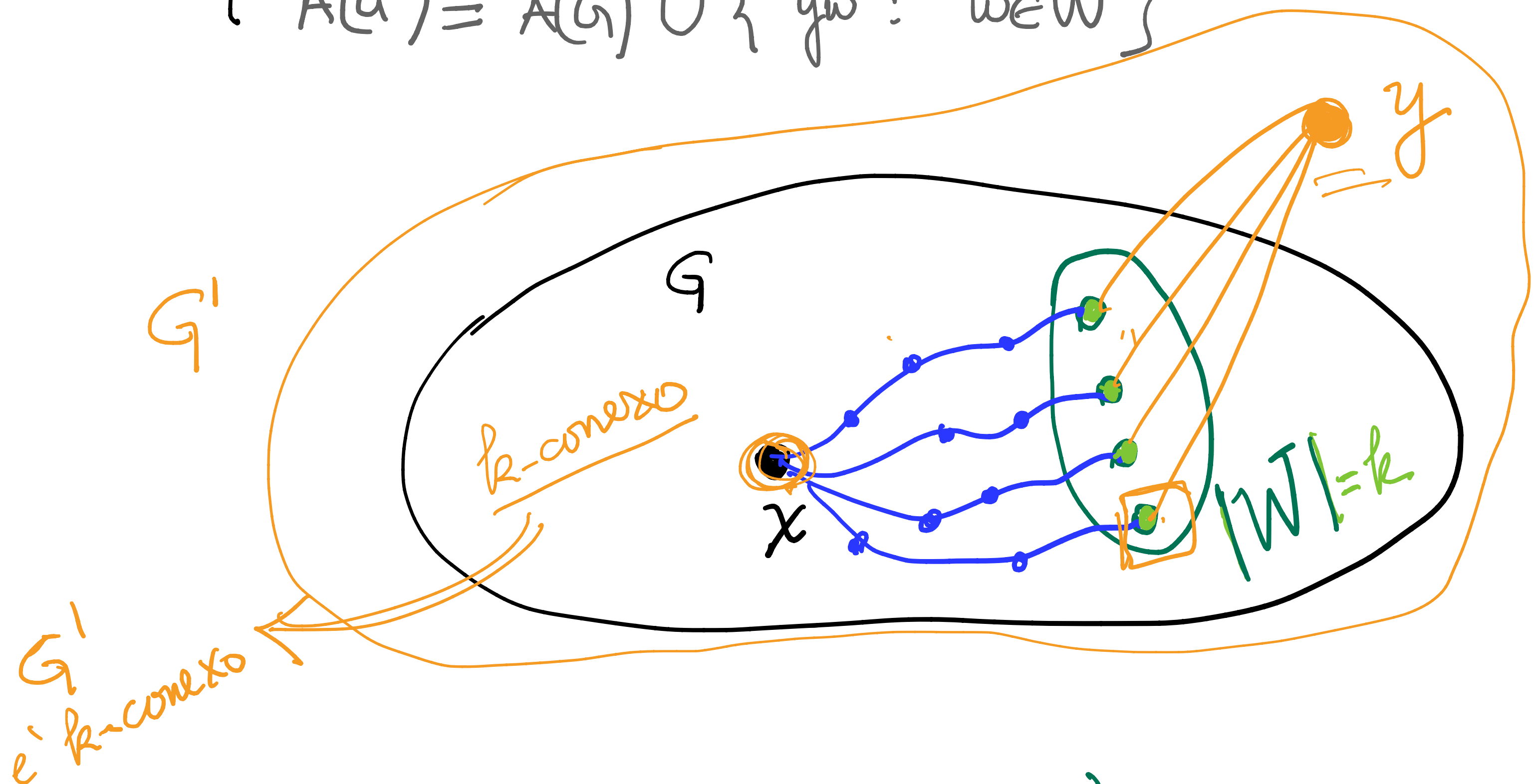
(*) x-W fan



leque x-W

<u>Sol</u>. (a)($\Rightarrow$) Seja $W \subset V(G)$ com $|W| = k$ e $x \in V(G) \setminus W$. Seja G' o grafo assim definido.

$$G' : \begin{cases} V(G') = V(G) \cup \{y\} & (y \notin V(G)) \\ A(G') = A(G) \cup \{yw : w \in W\} \end{cases}$$



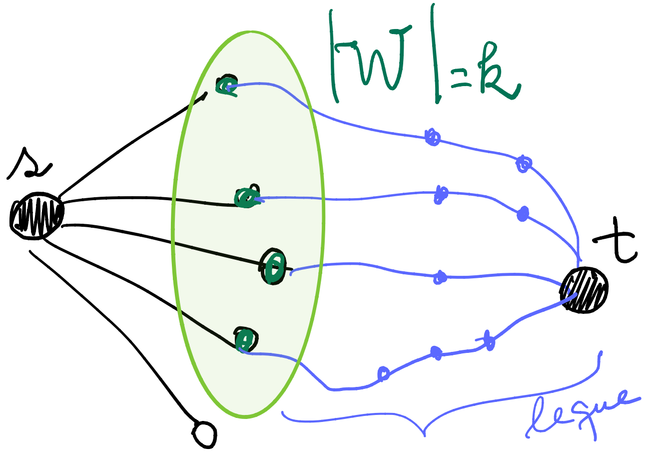
G é k-conexo $\Longrightarrow$ G' é k-conexo (pensar nos detalhes da prova)

Aplicando-se o Teorema de Menger 8.2(a) a G', x, y, concluímos que existem k xy-cam. indep. em G'. Logo, existe em G um leque x-W.

(b) ($\Leftarrow$) Pelas hipóteses sobre G segue imediatamente que $\underline{g(v) \geq k \ \forall v \in V(G)}$

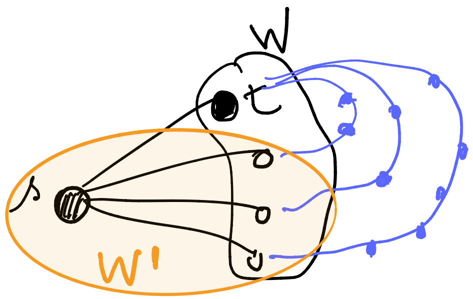
- Sejam $s, t \in V(G)$.

Note que $|Adj(s)| \geq k$.



(a) Se existir, seja $W \subseteq Adj(s)$ tal que $|W| = k$ e $t \notin W$.
Neste caso, como G tem um leque t-W, então em G há k st-cam. indep.

(b) Seja $W \subseteq Adj(s)$ tal que $|W| = k$ e $t \in W$.



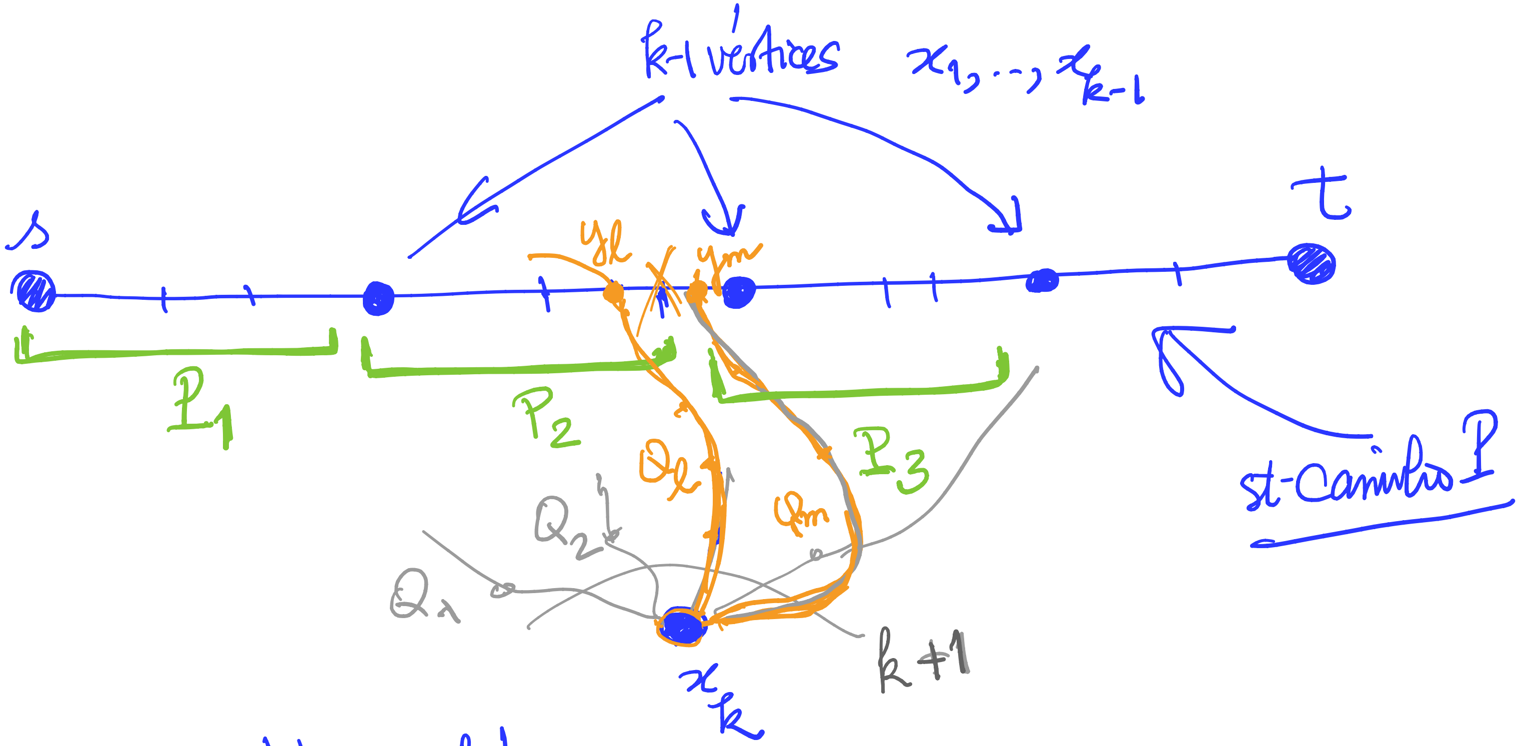
Considere $W' = (W \setminus \{t\}) \cup \{s\}$. Por hipótese, G tem um leque t-W'.
Logo, em G há k st-cam. indep. Pelo Corol. 8.3(a), G é k-conexo. ∎

EXERCÍCIO. Sejam $s, t, x_1, x_2, \dots, x_k$ vértices distintos de um grafo G que é $(k+1)$-conexo. Prove que existe um st-caminho que contém $x_1, x_2, \dots, x_k$

Sugestão: indução em k.

Passo da indução:

Por hipót de indução, existe um st-caminho, digamos P, que contém $x_1, \dots, x_{k-1}$



- Se P contém x_k, a prova está completa.

- Suponhamos que P não contém x_k. (Claramente, $\|P\| \geq k+1$.)

Os vértices $x_1, \ldots, x_{k-1}$ que ocorrem em P particionam P em <u>k seções</u>, digamos $P_1, P_2, \ldots, P_k$ (veja a figura acima). Como G é $(k+1)$-conexo, então G tem um leque x_k-W, onde $W = \{s, t, x_1, \ldots, x_{k-1}\}$. Sejam $Q_1, Q_2, \ldots, Q_{k+1}$ os $k+1$ caminhos que vão de <u>x_k a W</u> e que estão no leque x_k-W. Para cada caminho Q_i $(1 \leq i \leq k+1)$, chame de y_i o primeiro vértice em Q_i que pertence a $V(P)$. Como há $k+1$ caminhos no leque x_k-W, e há k seções $P_1, \ldots, P_k$, então há 2 vértices, digamos y_ℓ, y_m, que pertencem a uma mesma seção (digamos P_j). Suponha que y_ℓ ocorra à antes de y_m em P. Neste caso, se removermos de P as arestas que pertencem à seção de y_ℓ a y_m e substituirmos por $Q_\ell^{-1} \cdot Q_m$, obtemos um st-caminho que contém $x_1, \ldots, x_k$. ▨

EXERCÍCIO

Seja G um grafo conexo com grau mínimo $\delta(G) = k \geq 1$.

Prove que G contém um caminho $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ tal que

$G - \{x_1, x_2, \ldots x_k\}$ é conexo.

[Dica. Seja $(x_1, x_2, \ldots, x_q)$ um caminho mais longo em G.

Note que $q \geq k+1$. Suponha que $G - \{x_1, \ldots, x_k\}$ é desconexo, e seja $(y_0, y_1, \ldots, y_m)$ um caminho mais longo em um componente C que não contém x_{k+1}. Então

$g_C(y_0) \leq m$, mas y_0 não pode ser ligado a $k-m$ dos vértices $x_1, \ldots, x_k$.]

Prova.

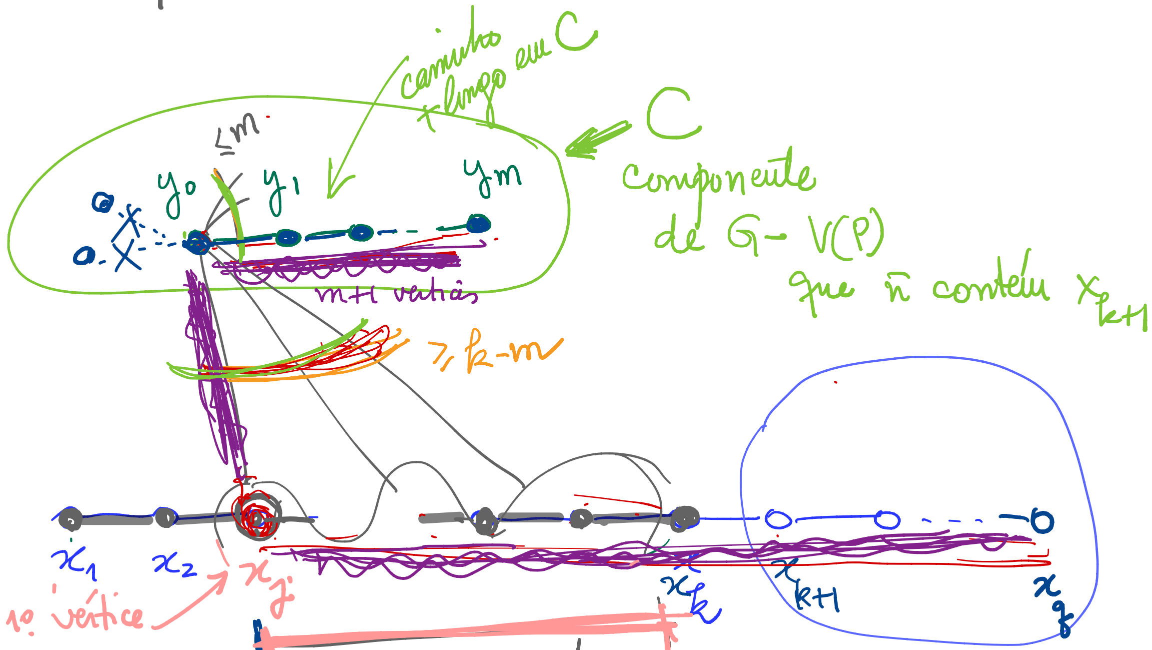
Seja $Q = (x_1, x_2, \dots, x_k, \dots, x_q)$ um cam. + longo em G.

e seja $P = (x_1, \dots, x_k)$. Então $q \geq k+1$, pois $\delta(G) \geq k$.

Vamos mostrar que $G - \{x_1, \dots, x_k\}$ é conexo.

- Suponha que isso não ocorra.

$\delta(G) \geq k$



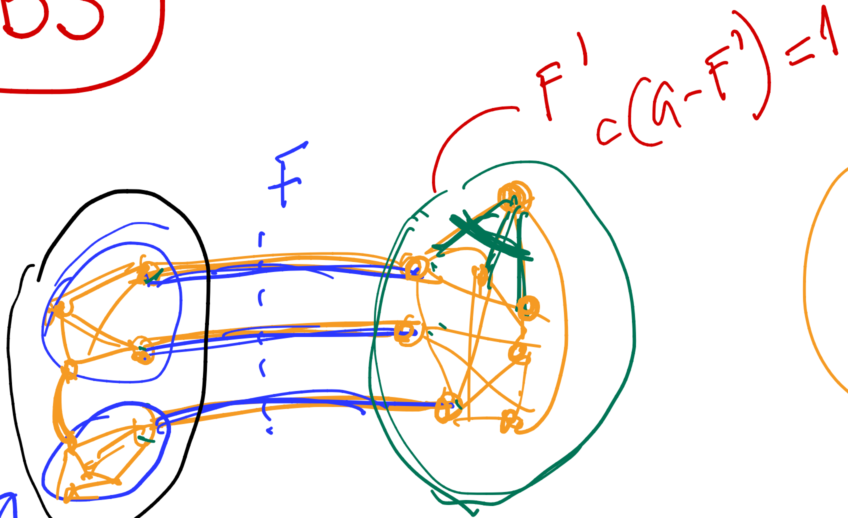
Seja x_j o 1º vértice em P que é adj. a y_0

há $\geq k-m$ vértices (pois y_0 tem pelo menos $k-m$ vizinhos em P)

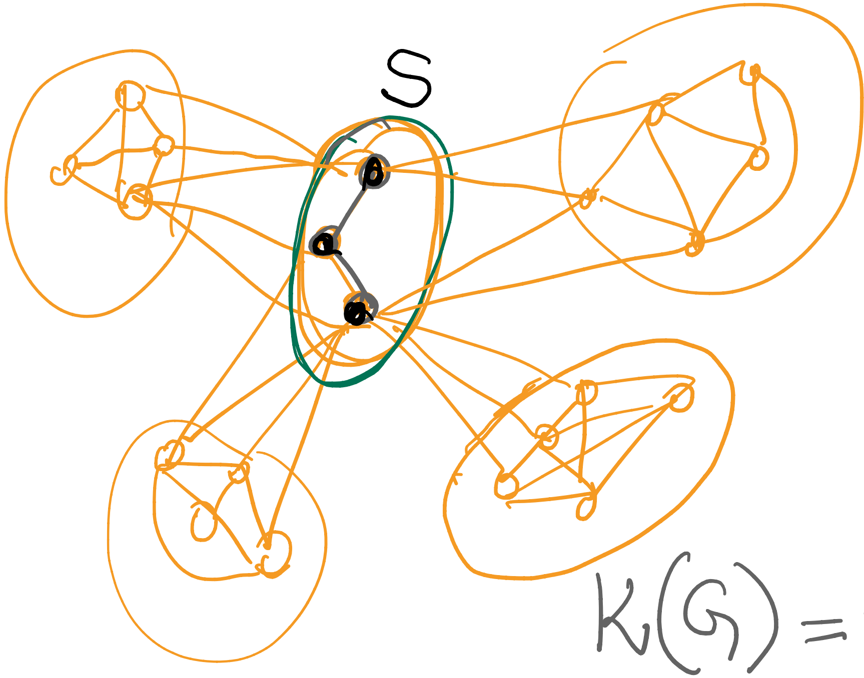
Neste caso, o caminho (violeta) $R = (y_m, y_{m-1}, \dots, y_0, x_j, x_{j+1}, \dots, x_q)$

Tem comprimento maior que o de Q. Absurdo!

OBS



se aparecessem ≥ 2 componentes, então $K'(G) < k$



$K'(G) = k$

$\Downarrow$

$\exists F \subseteq A(G)$

tal que $G - F$ é desconexo

Então $c(G-F) \leq 2$

$K(G) = k$ $(G \neq K_{k+1})$

$\Downarrow$

$\exists S \subset V(G)$, $|S| = k$,

$G - S$ é desconexo

$c(G-S)$ pode ser > 2