28/maio

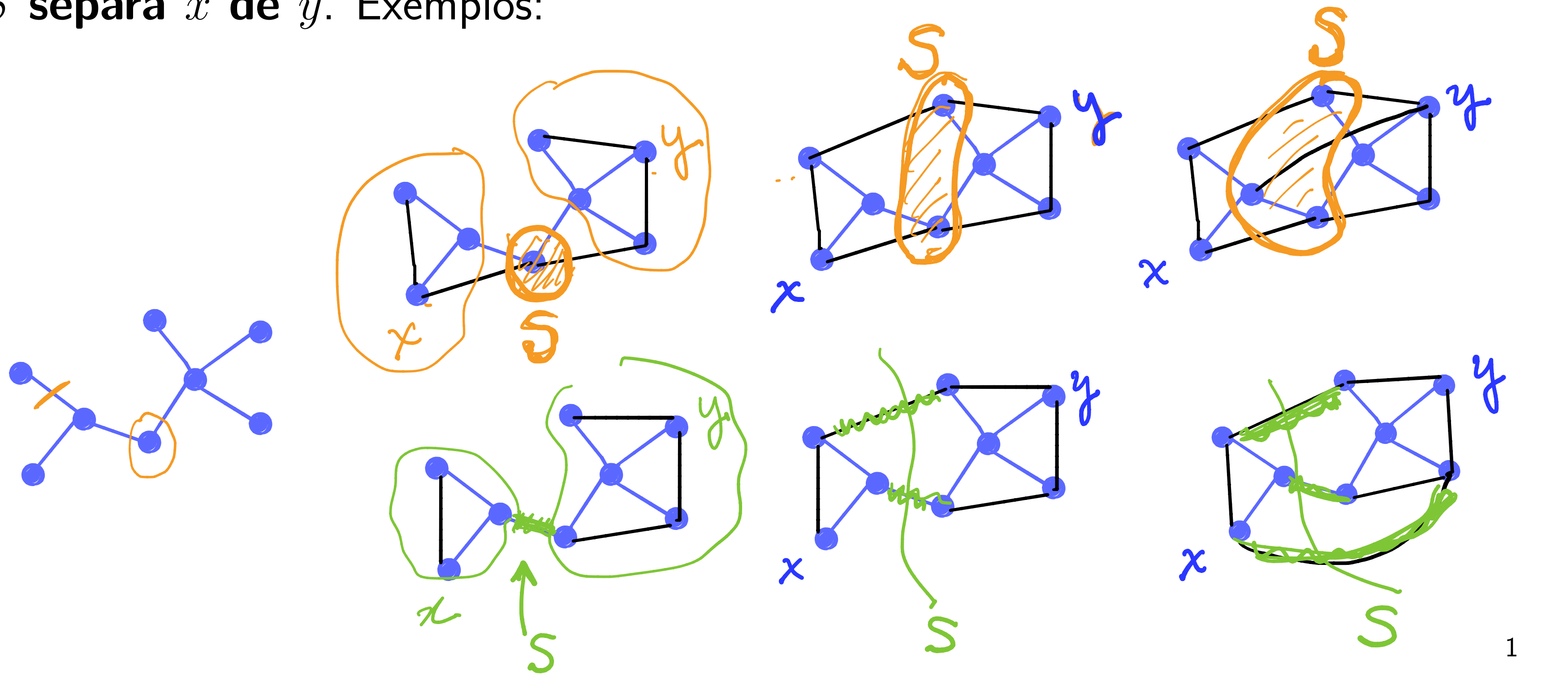
# Capítulo 8

# Conexidade - Teorema de Menger

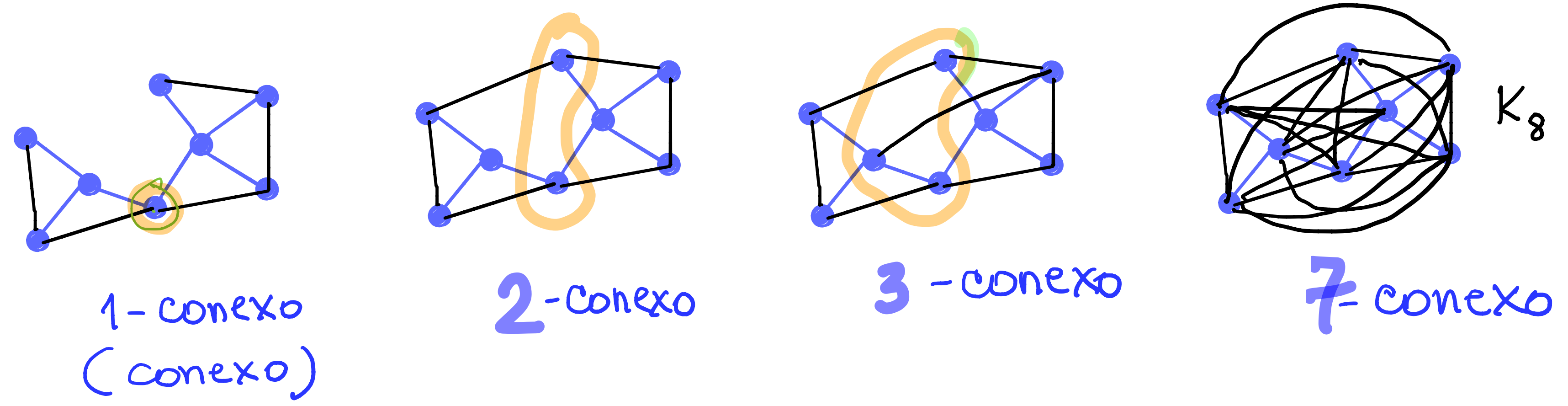
## 1 Introdução

interesse : medida (se forte/fraca ...)

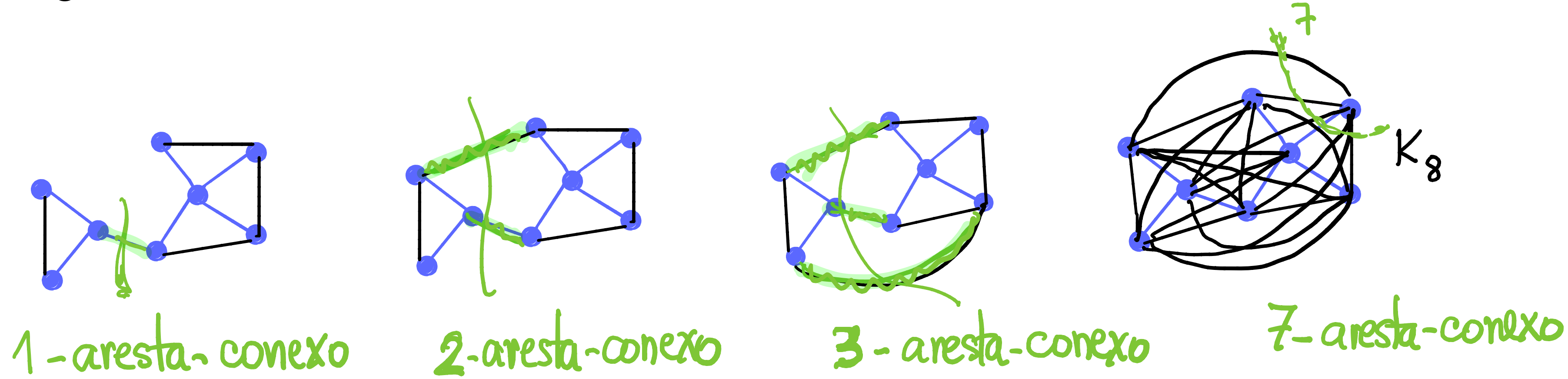
Neste capítulo, os grafos considerados são sem laços. Seja $G = (V, A)$ um grafo conexo, e $S \subset V$ ou $S \subset A$. Se $G - S$ é desconexo, então dizemos que $S$ **separa** $G$. Se em $G - S$ dois vértices $x$ e $y$ pertencem a components distintos, então dizemos que $S$ **separa** $x$ **de** $y$. Exemplos:



- Para $k \geq 2$, dizemos que $G$ é $\boxed{k\textbf{-conexo}}$ se $G \cong K_{k+1}$ ou $G$ tem pelo menos $k+2$ vértices e não existe $S \subset V$, $|S| = k-1$, tal que $S$ separa $G$. [Um grafo $G$ é $1$-**conexo** se e só se $G$ é conexo e não trivial.]




- Para $k \geq 2$, dizemos que $G$ é $\boxed{k\textbf{-aresta-conexo}}$ se $G$ tem pelo menos $2$ vértices e não existe $F \subset A$, $|F| \leq k-1$ tal que $F$ separa $G$. Grafos com aresta-de-corte são grafos $1$-aresta-conexos.



- O maior valor de $k$ para o qual $G$ é $k$-conexo é a **conexidade** de $G$, denotado por

$$\kappa(G).$$

(*)

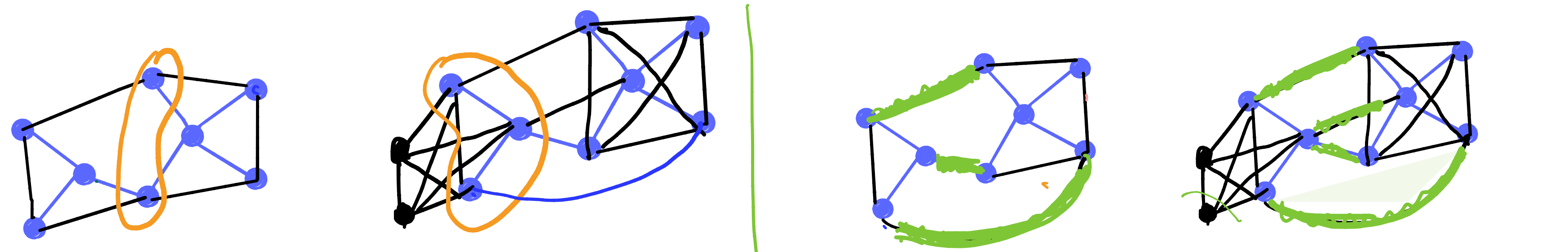
- O maior valor de $k$ para o qual $G$ é $k$-aresta-conexo é a **aresta-conexidade** de $G$, denotado por

$$\kappa'(G).$$

(**)

λ outra notação usada

Ex:



$\kappa(G) = 2$ $\kappa(G) = 3$ $\kappa'(G) = 3$ $\kappa'(G) = 4$

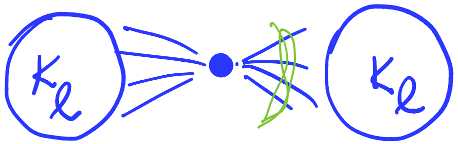
[Se $G$ é $k$-conexo, então $\kappa(G) \geq k$.]
[Se $G$ é $k$-aresta-conexo, então $\kappa'(G) \geq k$.]

- Def: $\kappa(G) = 0$ (resp. $\kappa'(G) = 0$) se $G$ é trivial ou desconexo.

(*) (OBS: em inglês, esses parâmetros são chamados **connectivity** e **edge-connectivity**).

(**)

- $\kappa(G)$ e $\kappa'(G)$ podem ser bem diferentes.



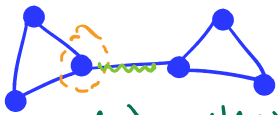

$\kappa(G)=1$

$\kappa'(G)=\ell$

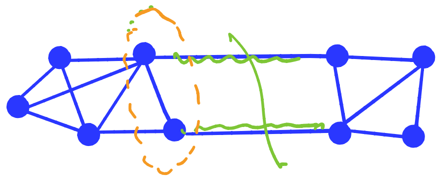
$\kappa(G)\le\kappa'(G)$

- Podemos ter $\kappa(G)=\kappa'(G)$.

Ex



$\kappa(G)=\kappa'(G)=1$



$\kappa(G)=\kappa'(G)=2$

- Será que $\kappa(G)\le\kappa'(G)$ sempre?

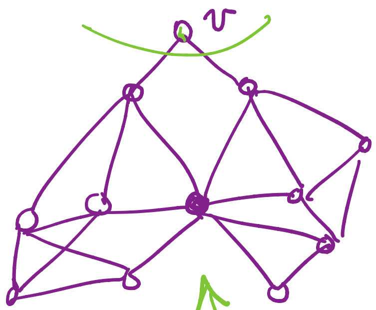
SIM!

Proposição 9.1

- **Exercício 8.1.** Seja $G$ um grafo simples. Prove que $\kappa(G) = \kappa'(G)$ se $G$ é uma árvore ou um circuito ou um grafo completo.
- **Exercício 8.2.** Seja $G = (V, A)$ um grafo sem laços. Prove que

$$\kappa(G) - 1 \leq \kappa(G - v) \leq \kappa(G) \quad \forall v \in V.$$

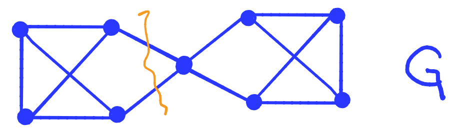
$$\kappa'(G) - 1 \leq \kappa'(G - e) \leq \kappa'(G) \quad \forall e \in A.$$




$\kappa(G) = 2$

$\kappa(G-v) = 1$

- **Exercício 8.3.** Seja $G$ o grafo de Petersen. Determine $\kappa(G)$ e $\kappa'(G)$.



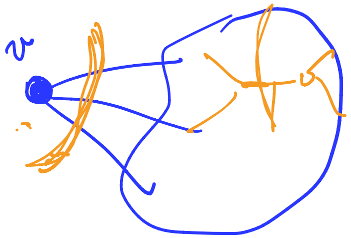

$$\underset{1}{\kappa(G)} \leq \underset{2}{\kappa'(G)} \leq \underset{3}{\delta(G)}$$

Lembramos que $\delta(G)$ denota o *grau mínimo de G*.

**Proposição 9.1** Se $G$ é um grafo não trivial, então

$$\kappa(G) \underset{(b)}{\leq} \kappa'(G) \underset{(a)}{\leq} \delta(G).$$

**Prova.** (a) É fácil ver que $\kappa'(G) \leq \delta(G)$. Basta notar que se $v$ é um vértice de grau mínimo em $G$, então o conjunto das arestas incidentes a $v$ é um conjunto que separa $v$ dos demais vértices de $G$. Portanto, o grau mínimo de $G$ é um limitante para $\kappa'(G)$.




$\kappa'(G) \leq g(v) \quad \forall v$

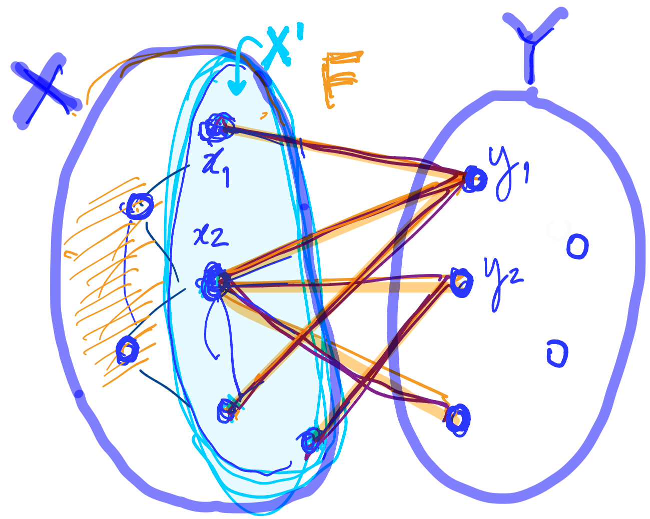
$\kappa'(G) \leq \underbrace{\min\{g(v) : v \in V(G)\}}_{= \delta(G)}$

(b) Vamos provar que $\kappa(G) \leq \kappa'(G)$. Suponhamos que $G$ seja conexo. Seja $k := \kappa'(G)$, e seja $F \subset A(G)$ um conjunto separador com $k$ arestas. Sejam $X$ e $Y$ conjuntos disjuntos de vértices de $V(G)$ tais que $X \cup Y = V(G)$, e as arestas de $F$ são da forma $x_i y_j$, onde $x_i \in X$ e $y_j \in Y$. Seja $X' \subseteq X$ o conjunto dos extremos das arestas em $F$ contidos em $X$. Claramente, $|X'| \leq k$.

Se $G - X'$ é desconexo, então $\kappa(G) \leq k$, e a prova está completa. Caso contrário, temos que $X = X'$. Neste caso, para cada $x_i \in X'$, temos que $g(x_i) \leq k$ (pense por que vale isso). Como pelo item (a), $\delta(G) \geq k$, concluímos que $g(x_i) \geq k$, donde segue que $g(x_i) = k$ para todo $x_i$ em $X'$ (e $\delta(G) = k$).

veja *

Tome $x_1$ em $X'$, e chame de $Z$ o conjunto dos $k$ vizinhos de $x_1$. Se $G - Z$ é desconexo, então $Z$ é um conjunto separador de $G$, e temos que $\kappa(G) \leq k$. Caso contrário, $G - Z$ é um grafo trivial (formado apenas pelo vértice $x_1$). Como $\delta(G) = k$, todos os vértices de $Z$ devem ter grau $k$. Neste caso, $G \cong K_{k+1}$, e portanto $\kappa(G) = k$. □




$|F| = k = \kappa'(G)$

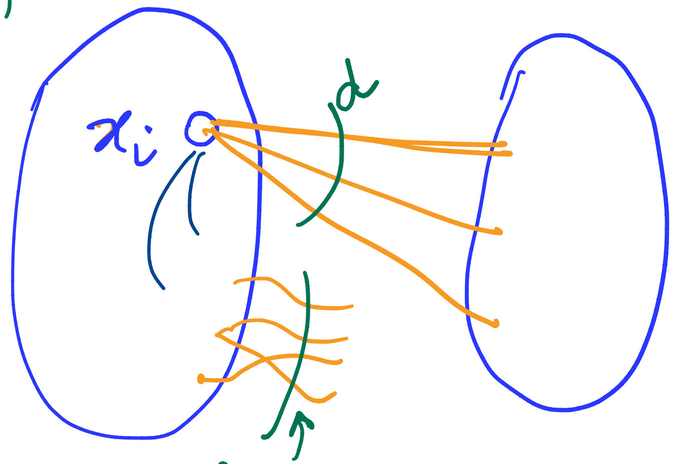
- $G - X'$ desconexo $\Rightarrow \kappa(G) \leq k$ ✓ OK
- $G - X'$ conexo $\Rightarrow X = X'$

(Vamos analisar mais)

$\underline{X = X'} \Longrightarrow |X'| \leq k$ (pois $|F| = k$)

- Então $\underline{g(x_i) \leq k}$ $\forall x_i \in X$.

Justif.



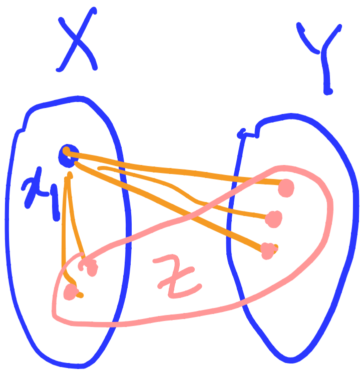

$k-d$ arestas $\Rightarrow |X \setminus x_i| \leq k-d \Rightarrow \underline{g(x_i) \leq d + |X \setminus x_i| \leq k}$

- $$\left.\begin{array}{l} g(x_i) \leq k \;/\!/ \\ \underbrace{\delta(G) \geq k}_{\text{resultado (a)}} \Rightarrow g(x_i) \leq k \;/\!/ \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{g(x_i) = k} \quad \forall x_i \in X$$

## (*) — Outra finalização da prova.

Por simetria, conclui-se que

- todo vértice de $Y$ é extremo de uma aresta em $F$.
- $\boxed{g(y_j) = k \quad \forall y_j \in Y}$




Considere $x_1 \in X$ e $Z = Adj(x_1)$ adjacentes a $x_1$

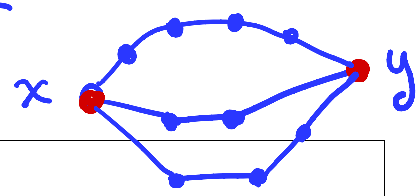
Então $|Z| = k$.

— Se $G - Z$ é desconexo, então $\kappa(G) \leq k$.

— Se $G - Z$ é conexo, então $V(G) \setminus Z = \{x_1\}$

Como $g(v) = k \;\; \forall v \in Z \cup \{x_1\}$, concluímos que $G \cong K_{k+1}$, e portanto, $\kappa(G) = k$.

Se $P$ é um caminho de $x$ para $y$, dizemos que $P$ é um **$xy$-caminho**. Se $P$ e $Q$ são $xy$-caminhos, dizemos que $P$ e $Q$ são **caminhos independentes** se $P$ e $Q$ têm apenas os vértices $x$ e $y$ em comum.



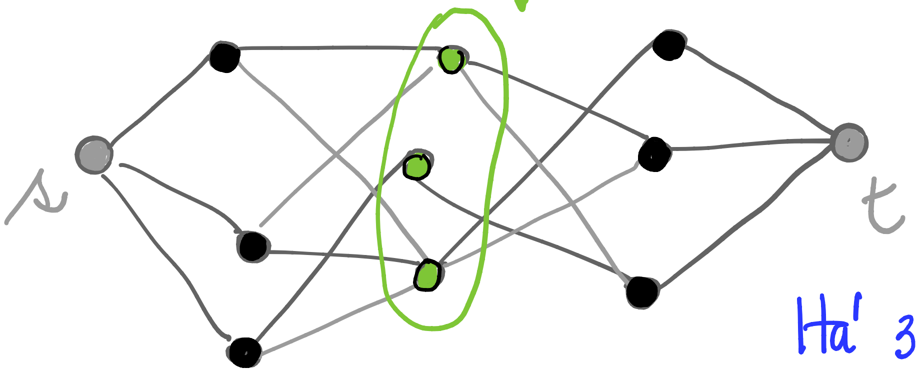

**Teorema 9.2 (Menger, 1927)** (um resultado min-max)
Seja $G$ um grafo conexo, e $s$, $t$ vértices distintos de $G$.

(a) Se $s$ e $t$ não são adjacentes, então o número mínimo de vértices que separam $s$ de $t$ é igual ao número máximo de $st$-caminhos independentes.

(b) O número mínimo de arestas que separam $s$ de $t$ é igual ao número máximo de $st$-caminhos arestas-disjuntos.

Prova. [OBS: Há provas que fazem uso do Teorema max-flow min-cut, e que são feitas primeiramente para o caso de grafos orientados. Desses resultados são deduzidos os resultados para o caso não-orientado - caso da versão aqui considerada. Veremos uma prova sem usar tal teorema.]

W ← separador mínimo
(não é único)




$|W| = 3$

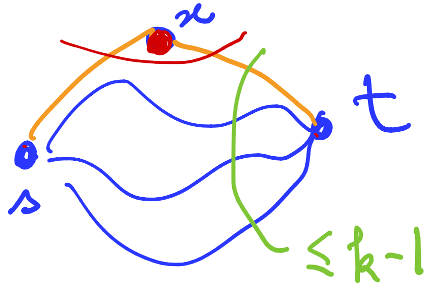
Há 3 st-cam. indep.

Prova da afirmação (a).

Seja $G$ um grafo conexo, e $s$, $t$ dois vértices distintos de $G$, não-adjacentes.

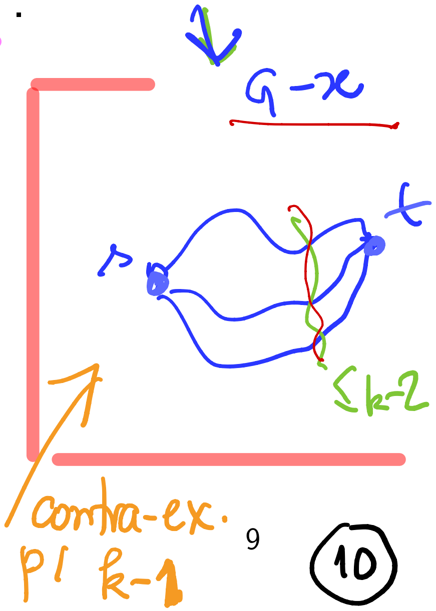
Seja $k$ o *número mínimo de vértices que separam* $s$ *de* $t$.

Se $k = 1$, o resultado é imediato. Suponha que $k \geq 2$. Suponha que a afirmação (a) seja falsa. Tome $k \geq 2$ *mínimo* tal que existe um contra-exemplo para a afirmação (a) para tal $k$. Seja $G$ um contra-exemplo (para esse $k$ mínimo) com o *menor* número possível de arestas. Então em $G$ há no máximo $k-1$ $st$-caminhos independentes. Além disso, *não existe* $x$ *em* $V(G)$ *tal que* $x$ *é adjacente a* $s$ *e a* $t$; pois em caso contrário, $G - x$ seria um contra-exemplo para $k-1$.



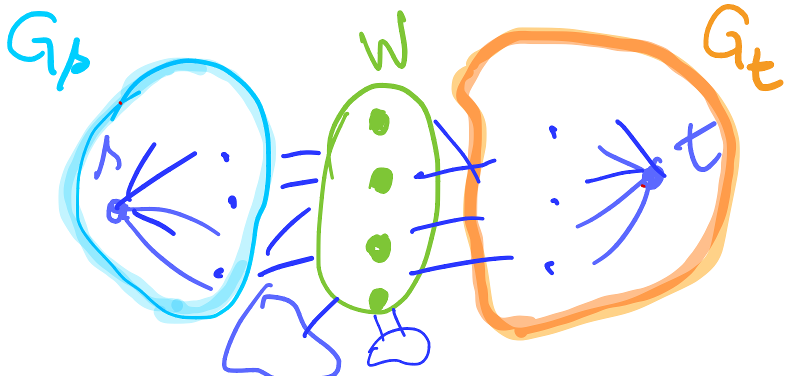

Seja $W \subset V(G)$ um conjunto que separa $s$ de $t$, tal que $|W| = k$.

- Suponha que nem $s$ e nem $t$ sejam adjacentes a todos os vértices de $W$.

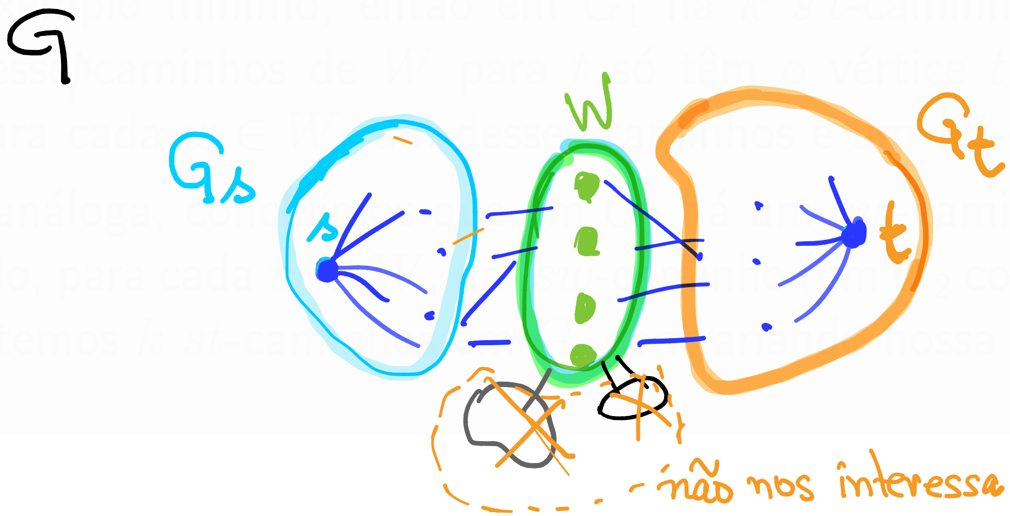


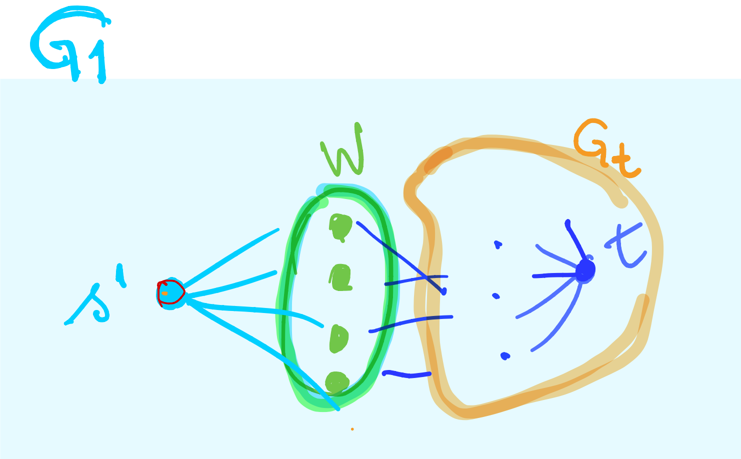

Seja $G_s$ (resp. $G_t$) o componente de $G - W$ que contém $s$ (resp. $t$).

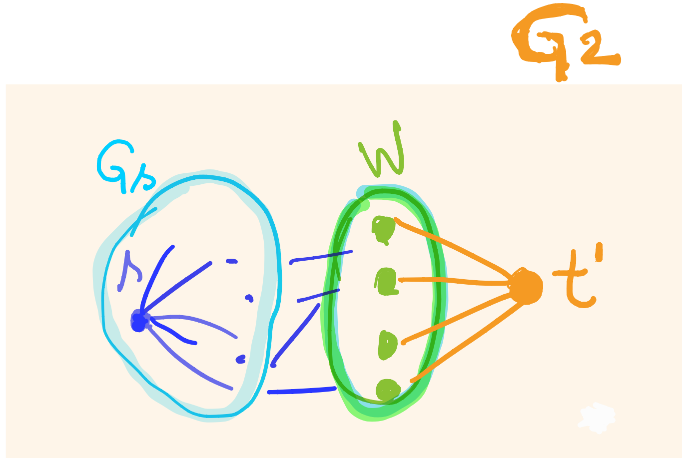
Construa grafos $G_1$ e $G_2$ da seguinte forma:



- $G_1 = (V_1, A_1)$, onde $V_1 = \{s'\} \cup W \cup V(G_t)$, e $A_1 = \{s'w : w \in W\} \cup A(G[W \cup V(G_t)])$;
- $G_2 = (V_2, A_2)$, onde $V_1 = \{t'\} \cup W \cup V(G_s)$, e $A_2 = \{wt : w \in W\} \cup A(G[W \cup V(G_s)])$.



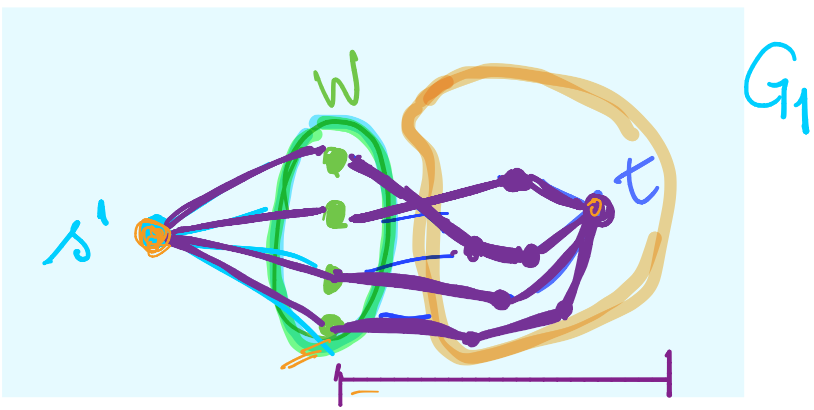



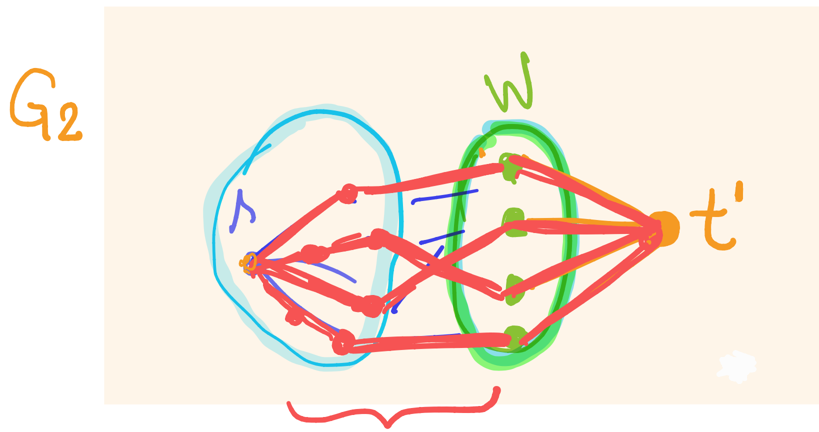




$|V(G_i)| < |V(G)|$ p/ $i = 1, 2$ $\Rightarrow$ $G_1$ e $G_2$ não são contra-ex.

Em $G_1$ o número mínimo de vértices para separar $s'$ de $t$ é $k$. Como $G$ é um contra-exemplo mínimo, então em $G_1$ há $k$ $s't$-caminhos independentes. As seções desses caminhos de $W$ para $t$ só têm o vértice $t$ em comum. Em particular, para cada $w \in W$, um desses caminhos é um $wt$-caminho.

De maneira análoga, concluímos que em $G_2$ há um $sw$-caminho para $w \in W$. Concatenando, para cada $w \in W$, um $sw$-caminho (em $G_2$ com um $wt$-caminho (em $G_1$), obtemos $k$ $st$-caminhos independentes em $G$, contrariando nossa hipótese.




Vamos então analisar a outra possibilidade que resta.

●● Para cada conjunto $W$ com $k$ vértices que separa $s$ de $t$, pelo menos um entre $s$ e $t$ é adjacente a todos os vértices de $W$.

Seja $P = (s, x_1, x_2, \ldots, x_p, t)$ um $st$-caminho *mais curto* em $G$. Então $p \geq 2$, e pela minimalidade de $G$, no grafo $G - x_1x_2$ podemos encontrar um conjunto

Veja (*) → $W_0$ de $k-1$ vértices que separa $s$ de $t$. Note que $W_0$ não separa $s$ de $t$ em $G$ (senão $G$ teria $k-1$ vértices que separam $s$ de $t$).

Se $W_0$ contivesse $x_1$ (resp. $x_2$), então $W_0$ seria um conjunto $st$-separador de $G$ com $k-1$ elementos, uma contradição. Logo, $x_1$, $x_2 \notin W_0$.

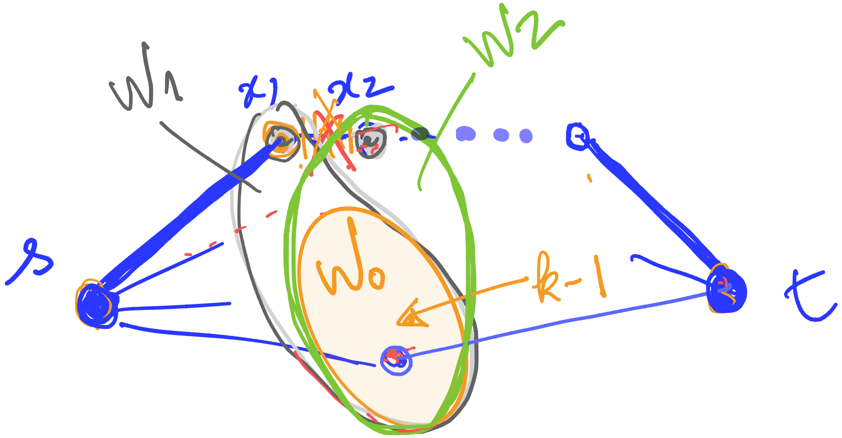
Neste caso,

$$W_1 := W_0 \cup \{x_1\} \quad \text{e}$$
$$W_2 := W_0 \cup \{x_2\}$$

são $k$-conjuntos que separam $s$ de $t$.

(*) $G' = G - \underbrace{x_1x_2}_{\text{aresta}}$ não é um contra-ex.

Se $G'$ tivesse um separador de cardinalidade $k$, então em $G'$ existiriam $k$ $st$-caminhos indep, e portanto, $G$ também teria tais caminhos.



(st-caminho mais curto.)

Pela escolha de $P$, sabemos que $t$ (resp. $s$) não é adjacente a $x_1$ (resp. $x_2$). Pela hipótese deste caso (●●), temos que $s$ (resp. $t$) é adjacente a todos vértices de $W_1$ (resp. $W_2$). Neste caso, tanto $s$ como $t$ *são adjacentes a todos os vértices de* $W_0$. Como $W_0| = k-1 \geq 1$, temos uma contradição (pois um vértice de $W_0$ seria adjacente tanto a $s$ quanto a $t$, situação que já descartamos inicialmente). Completamos assim a prova da afirmação (a).

Prova da afirmação (b). [Explicação em aula: considerar um grafo-aresta (*line-graph*) apropriado que se obtém de $G$ e aplicar a afirmação (a).]

$\square$