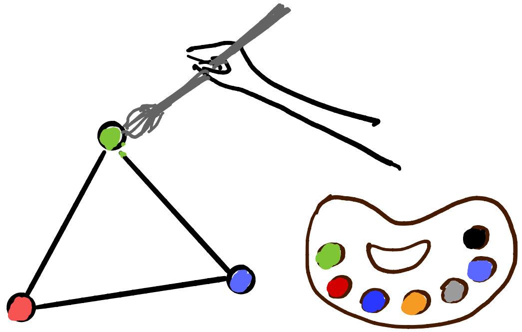
19/05/20

Capítulo 7

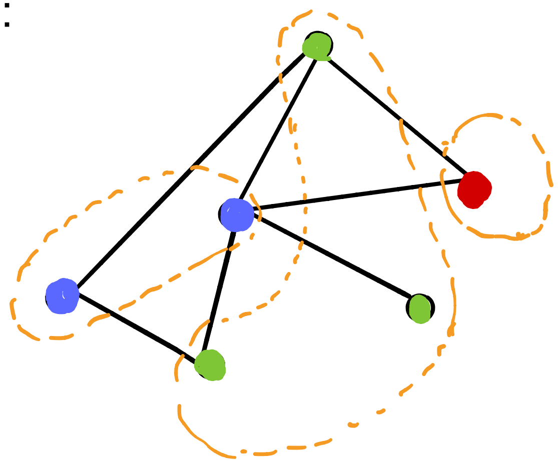
Coloração de vértices

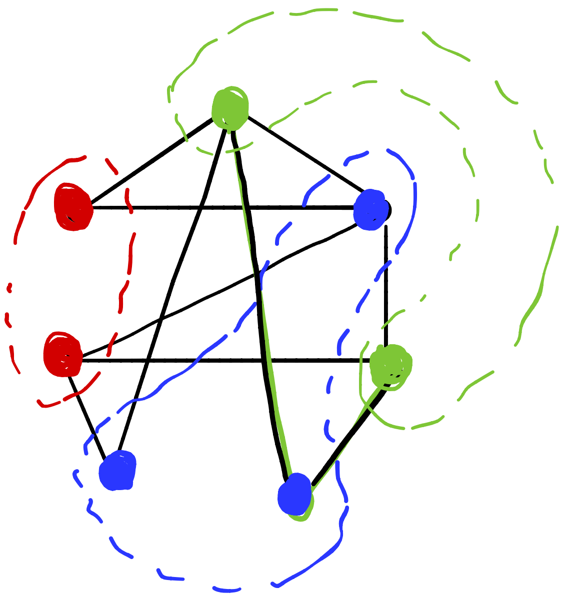


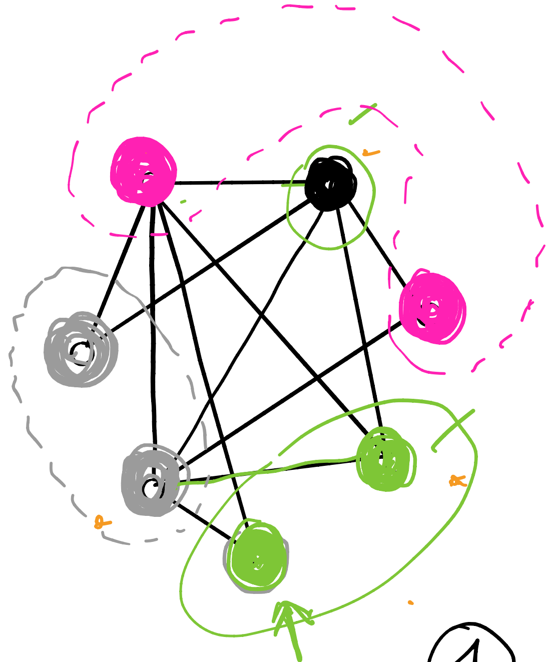
1 Introdução

Neste capítulo só trataremos de grafos simples. Uma **coloração dos vértices** (ou simplesmente, uma **coloração de vértices**) de um grafo é uma atribuição de cores a todos os seus vértices tal que vértices adjacentes recebem cores diferentes. Mais formalmente, uma **coloração de vértices** de um grafo G é uma partição de $V(G)$ em conjuntos independentes ou estáveis (alguns eventualmente vazios).

Ex:

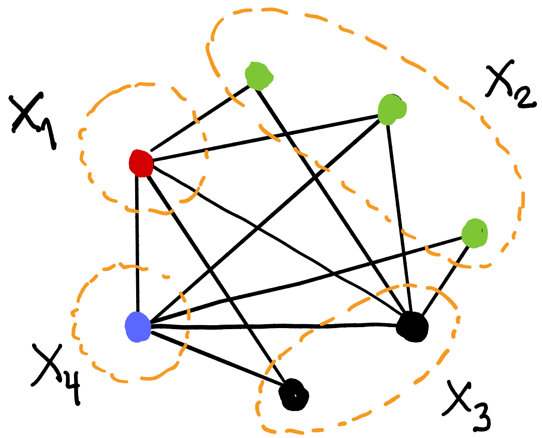


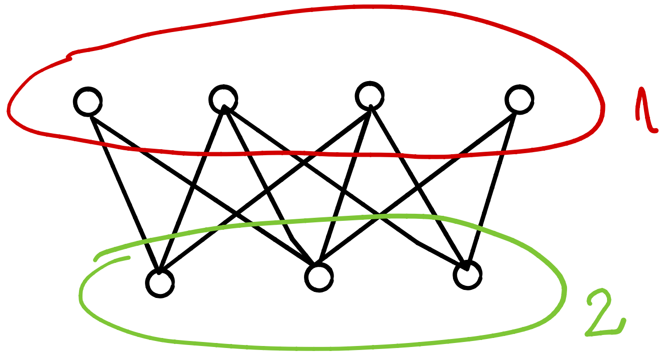




classe de (color class)

Se $\{X_1, \ldots, X_k\}$ é uma partição de $V(G)$ em conjuntos independentes, dizemos que cada conjunto X_i é uma **cor** e k é o **número de cores**. Neste caso, dizemos também que G tem (ou admite) uma ***k*-coloração**. Quando dizemos que G admite uma k-coloração, então isto significa que é possível colorir os vértices de G com *no máximo* k cores.

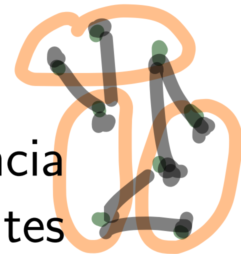




Quando G admite uma k-coloração, também dizemos que G é ***k*-colorível**. [Note que se G é k-colorível, então G é p-colorível para todo $p > k$.]

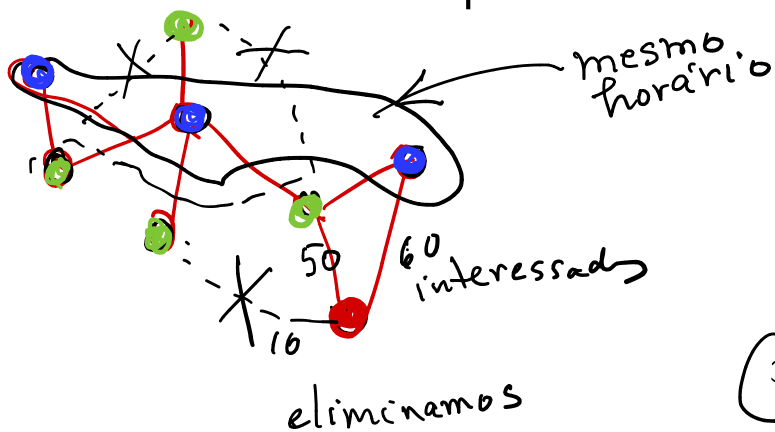
Note que no caso de coloração de vértices, o termo "vértice" fica subentendido em algumas definições (diferentemente do caso de coloração de arestas em que dizemos k-aresta-coloração ou k-aresta-colorível).

PROBLEMA 1: Suponha que uma indústia precisa armazenar várias substâncias químicas. Algumas delas, se estiverem próximas, podem reagir entre si, causando algum estrago. Essa indústria gostaria de armazenar essas substâncias químicas num menor número de armazéns distintos, de modo a evitar estragos. Como resolver esse problema?



SOLUÇÃO: Construir um grafo G, onde cada vértice corresponde a uma substância química. Dois vértices de G são adjacentes se e só se as substâncias correspondentes reagem entre si. Uma coloração dos vértices de G que usa o menor número possível de cores resolve o problema.

PROBLEMA 2: Num evento serão oferecidos n cursos (todos com 1 hora de duração). Cada um dos participantes seleciona um subconjunto de menos do que n cursos que gostaria de frequentar. O organizador precisa decidir em quais horários alocar os n cursos de modo que os participantes consigam fazer os cursos desejados, e os cursos sejam alocados num menor número de horas. Discutir estratégias possíveis, caso a solução encontrada requeira n horas, e o organizador decida atender apenas um bom número de participantes (não todos).



2 Colorações mínimas

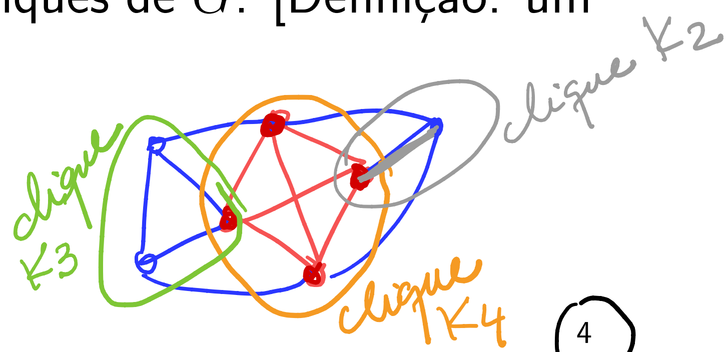
É fácil encontrar uma coloração dos vértices de um grafo (basta colorir cada vértice com uma cor diferente). Temos interesse em usar poucas cores. Uma coloração de vértices é **mínima** se o número de cores usadas por essa coloração é o menor possível.

PROBLEMA DE INTERESSE: Dado um grafo, obter uma coloração de vértices que seja mínima.

O problema acima é difícil! (É NP-difícil.)

O **número cromático** de um grafo G, denotado por $\boldsymbol{\chi(G)}$, é o **menor k tal que G é k-colorível**. Se $\underbrace{\chi(G) = k}$, então dizemos que G é **k-cromático**.

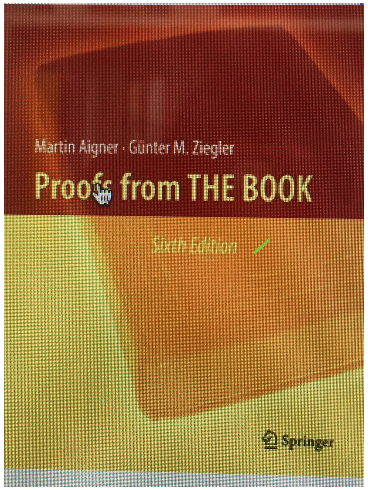
Este capítulo estuda a relação entre o número cromático e outros parâmetros do grafo. Ele comprova, por exemplo, a intuição de que $\chi(G)$ é tanto menor quanto menor o grau máximo de G, e tanto maior quanto maiores são as cliques de G. [Definição: um subgrafo completo de um grafo G é chamado uma clique.]

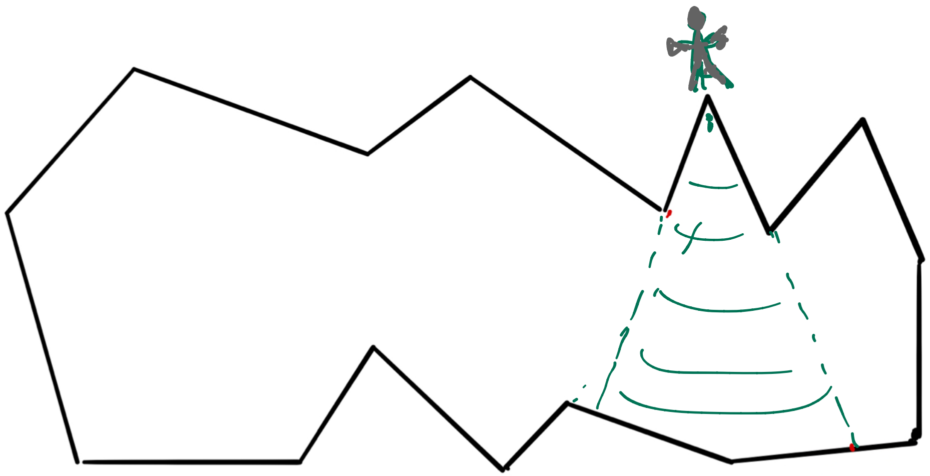


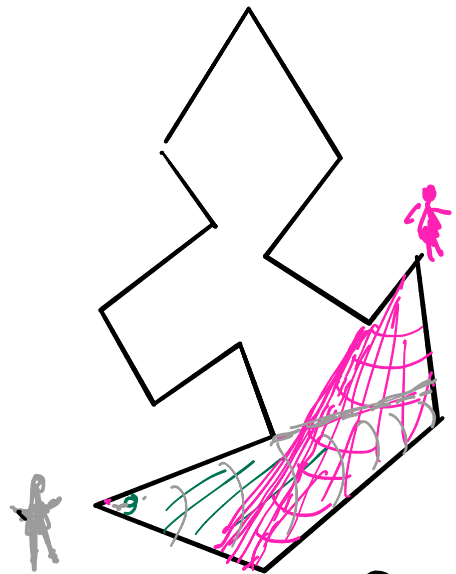
Exercício E7.1. Exiba um grafo com duas colorações mínimas diferentes.

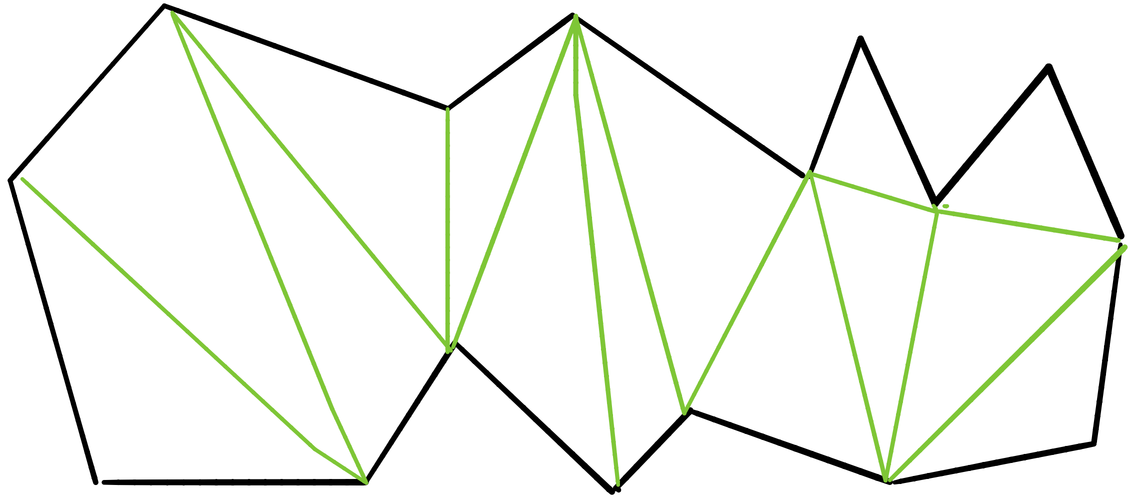
Exercício E7.2. Qual é o número cromático do grafo de Petersen?

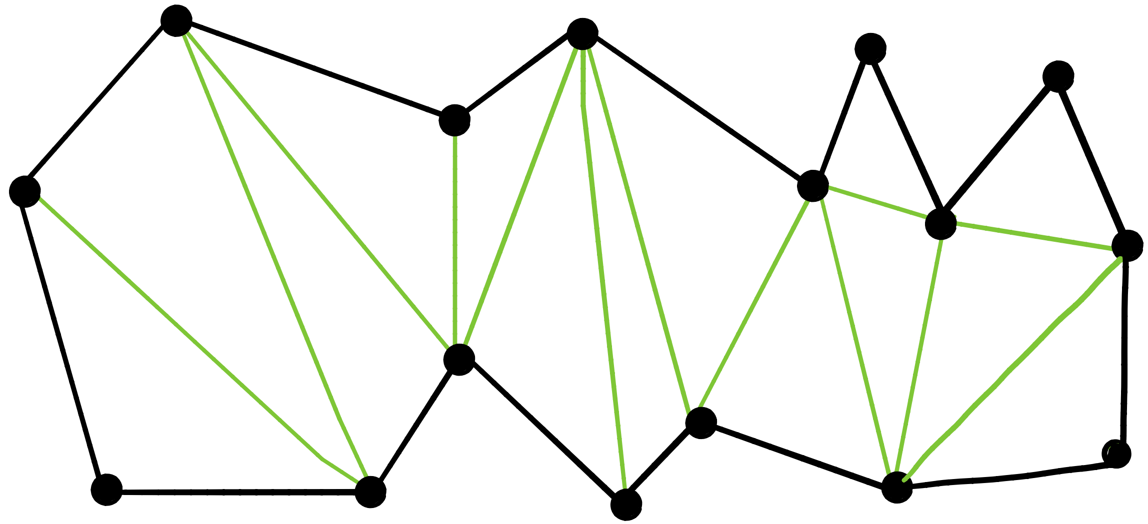
Exercício E7.2. ["Como proteger um museu"] (difícil) Um museu de arte tem uma grande sala cujo contorno é um polígono fechado, não necessariamente convexo, com n lados. Queremos postar guardas em alguns dos vértices do polígono de modo que cada ponto da sala possa ser visto por pelo menos um dos guardas (o ângulo de visão de cada guarda só é limitado pelas paredes da sala). Mostre que $\lfloor n/3 \rfloor$ guardas são suficientes. Mostre que há salas que precisam de $\lfloor n/3 \rfloor$.(Veja o livro "Proofs from the BOOK", de Aigner & Ziegler, Springer 1991).

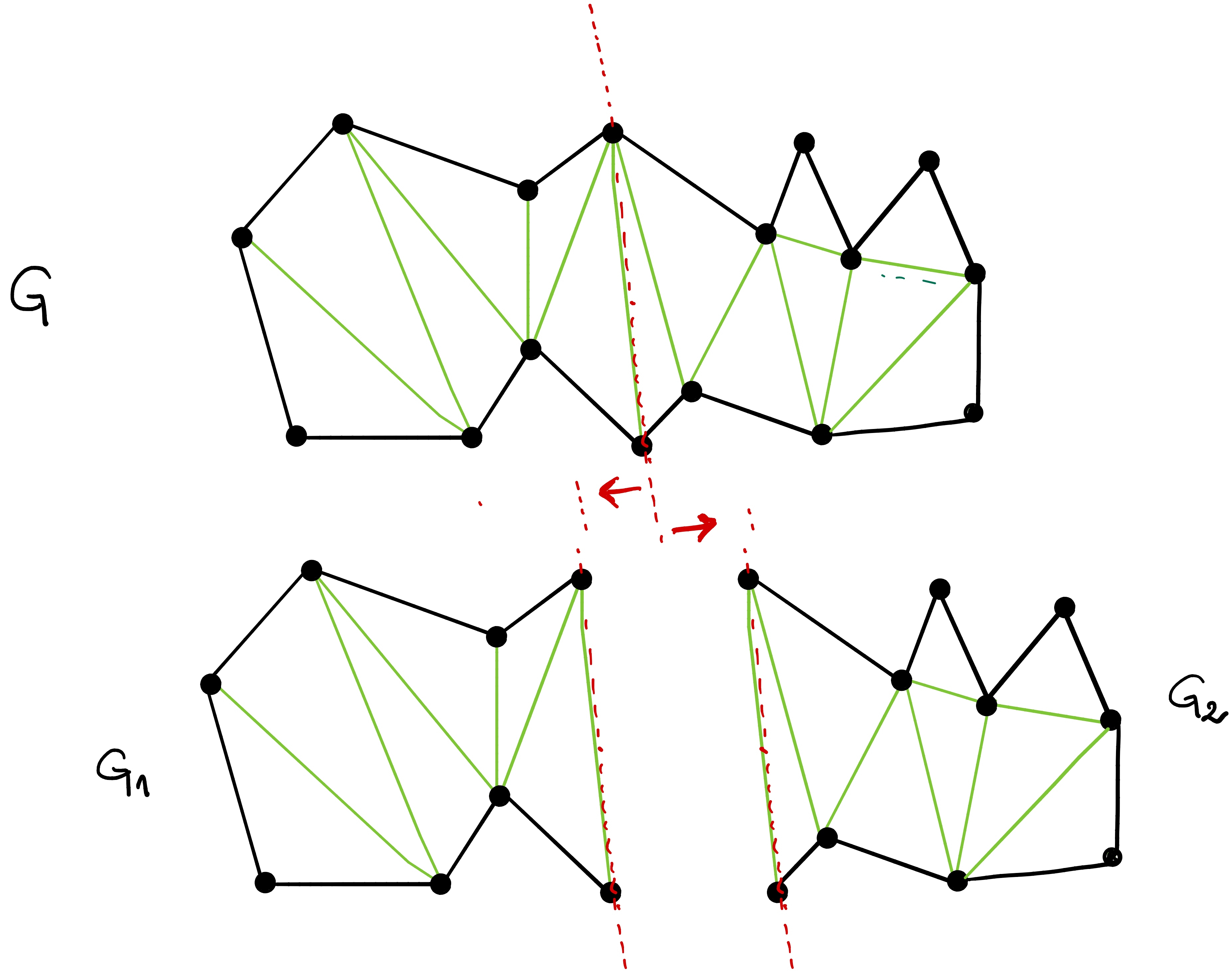


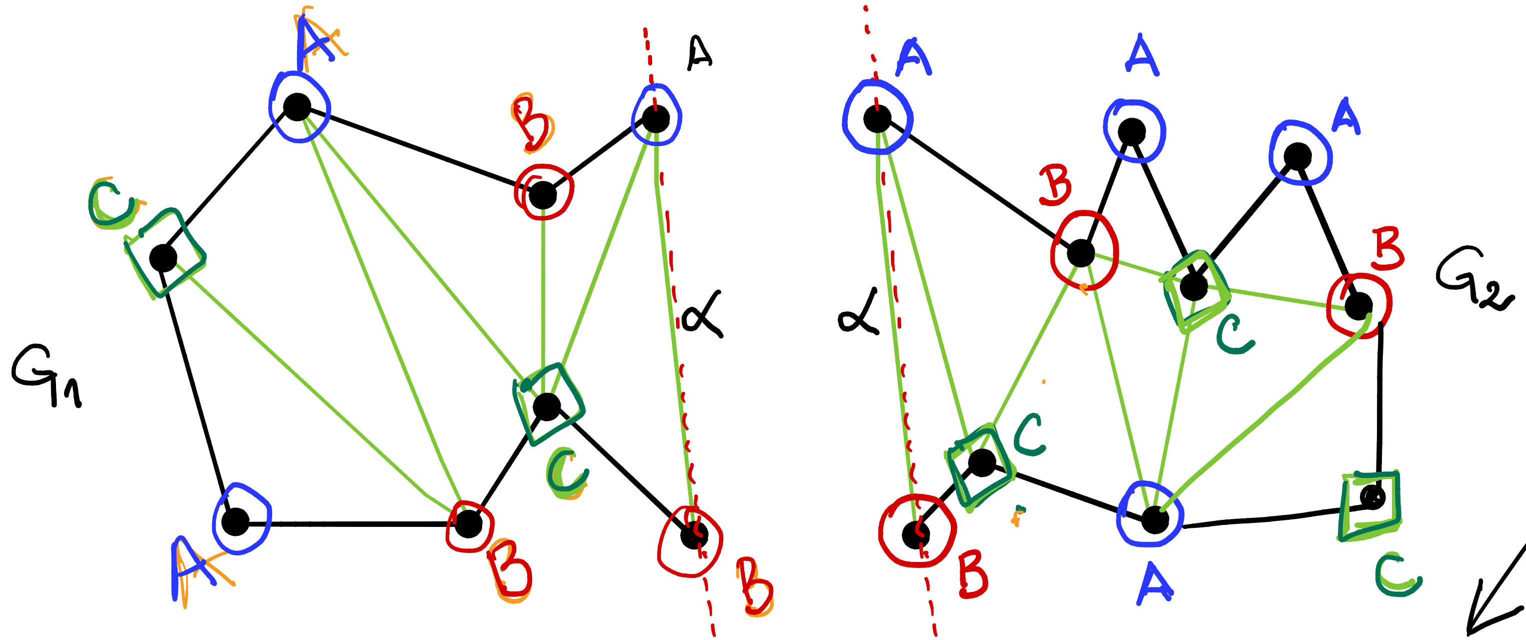








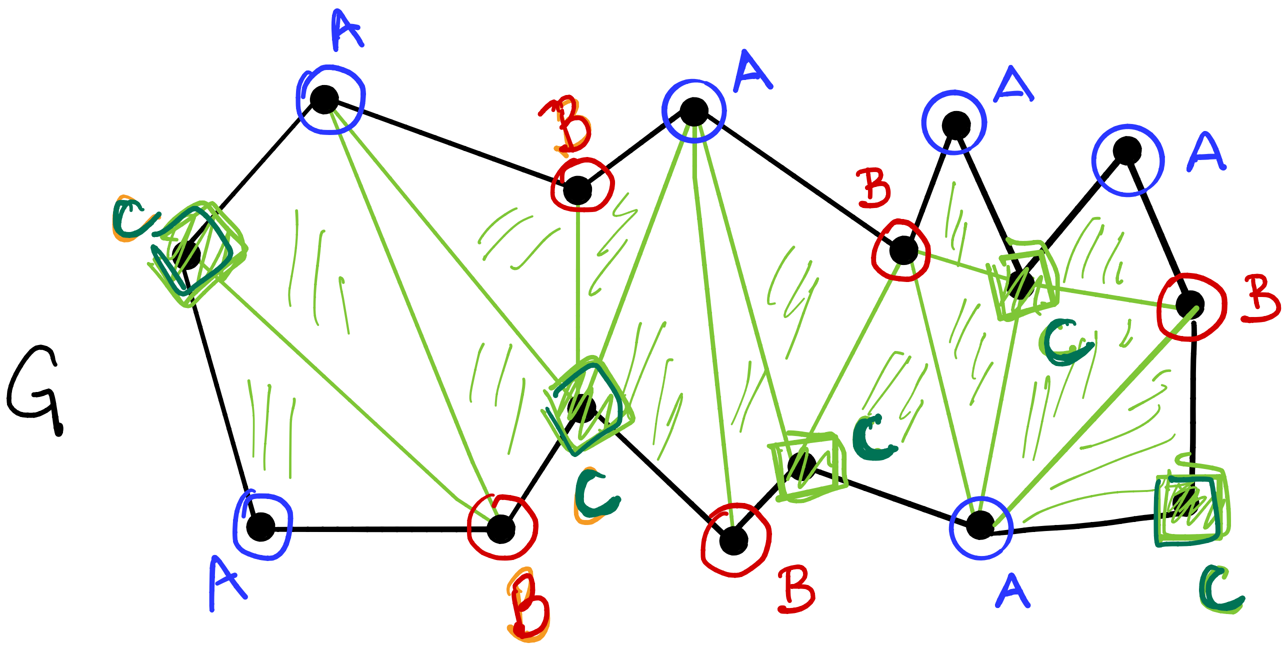

G
G_1
G_2



prova por indução
vértices

$$\boxed{\chi(G) = 3}$$

$n = 16$



$$\underbrace{\{X_A, X_B, X_C\}}$$

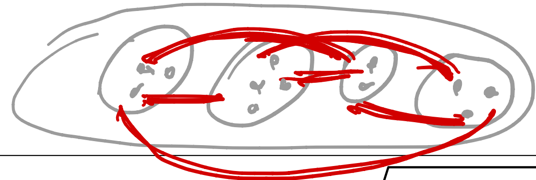
↑

alguma dessas classes tem tamanho $\leq \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$

← Neste ex. $|X_B| = |X_C| = 5$ $\quad 5''$

3 Algumas delimitações superiores

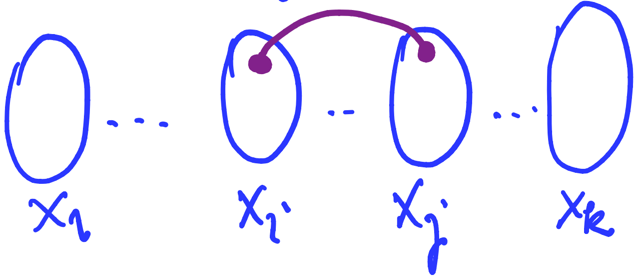
Para obter uma delimitação superior, digamos $f(G)$, do número cromático de um grafo G, basta mostrar a existência de uma coloração com $f(G)$ cores. Eis uma delimitação superior muito simples, que reflete a intuição de que um grafo com poucas arestas tem número cromático pequeno:



Teorema 7.1. Para todo grafo $G = (V, A)$ temos que $\chi(G) \leq \frac{1}{2} + \sqrt{2\,|A| + \frac{1}{4}}$.

Prova. (na aula)

Seja $\{X_1, \dots, X_k\}$ uma coloração mínima de G. Então, para todo i, j tq $1 \leq i < j \leq k$ existe uma aresta com um extremo em X_i e outro em X_j (senão, poderíamos ter uma coloração com menos cores, atribuindo a mesma cor aos vértices de $X_i \cup X_j$).



Logo, $|A| \geq \binom{k}{2} = \frac{k^2 - k}{2}$. $[k = \chi(G)]$

$2|A| \geq k^2 - k \Rightarrow k^2 - k - 2|A| \leq 0 \Rightarrow$ raízes: $\frac{1 \pm \sqrt{1 + 8|A|}}{2} \Rightarrow k \leq \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + 2|A|}$

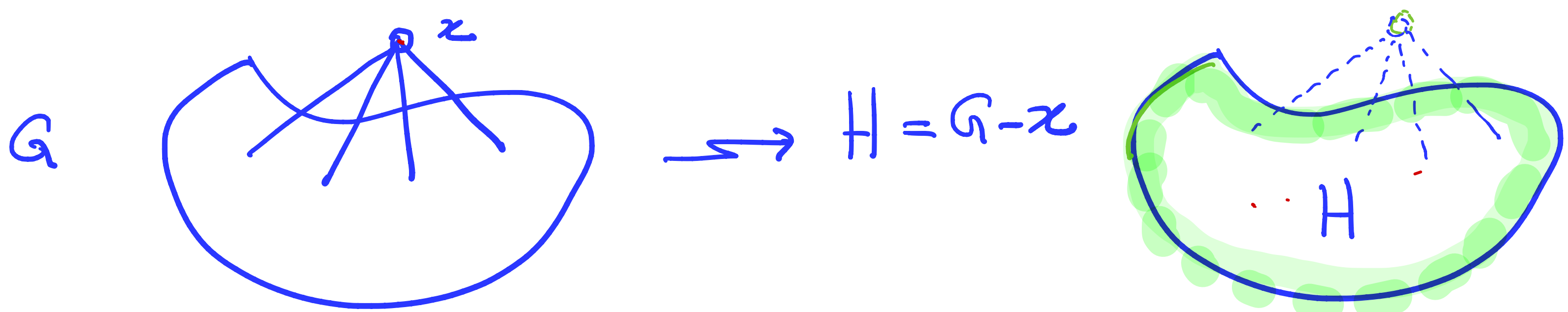
Considere agora uma delimitação mais sofisticada. Ela confirma a intuição de que $\chi(G)$ é tanto menor quanto menor for o grau máximo de G.

Teorema 7.2. Para todo grafo G, temos que $\chi(G) \le \Delta(G) + 1$.

Prova 1. Por indução no número de vértices de G.

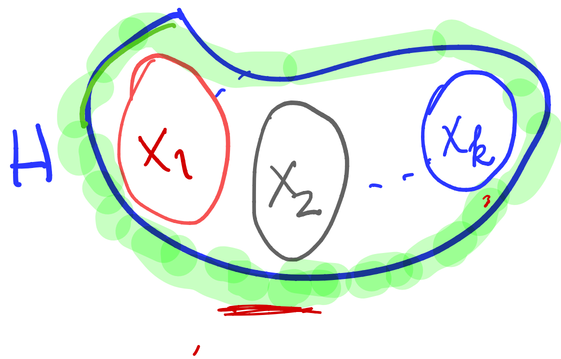
(**Prova 2.** Heurística gulosa.)

Se $|V(G)|=1$, o resultado é imediato. Suponha que $|V(G)|>1$. Tome um vértice qualquer x de G e considere o grafo $H = G - x$.



Por hipótese de indução,

$$\chi(H) \le \Delta(H) + 1.$$

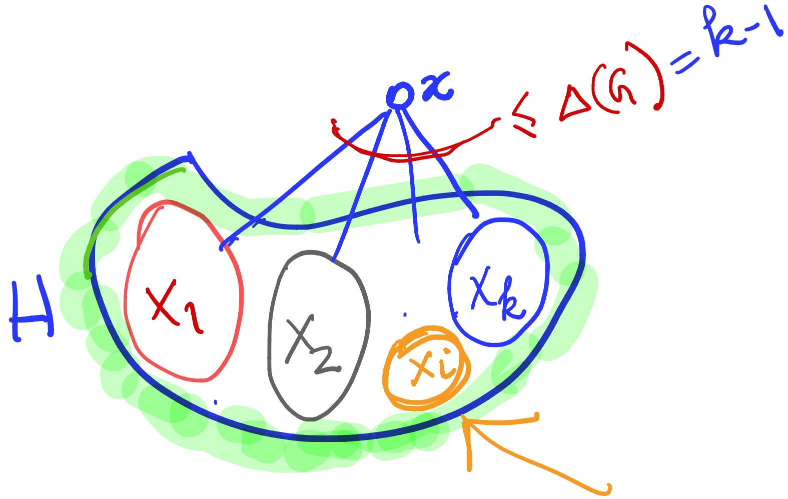


Seja $\{X_1, \ldots, X_k\}$ uma coloração mínima de H.

Como $\Delta(H) \leq \Delta(G)$, temos que $k \leq \Delta(G)+1$.

(a) Se $k < \Delta(G)+1$, então podemos atribuir a x uma cor distinta das k cores usadas em H, obtendo a coloração $\{ \underbrace{\{x\}}_{\text{nova classe}}, \underbrace{X_1, X_2, \ldots, X_k}_{H} \}$ que usa no máx $\Delta(G)+1$ cores.

(b) Se $k = \Delta(G)+1$, então $\Delta(G) = k-1$. Como $g_G(x) \leq \Delta(G)$, existe uma classe X_i tal que x não é adjac. a nenhum vértice de X_i. $\left(Adj(x) \cap X_i = \emptyset \right)$



Neste caso, adicionamos x à classe X_i, obtendo a k-coloração

$\{X_1, X_2, \ldots, X_i \cup \{x\}, \ldots, X_k\}$ de G.

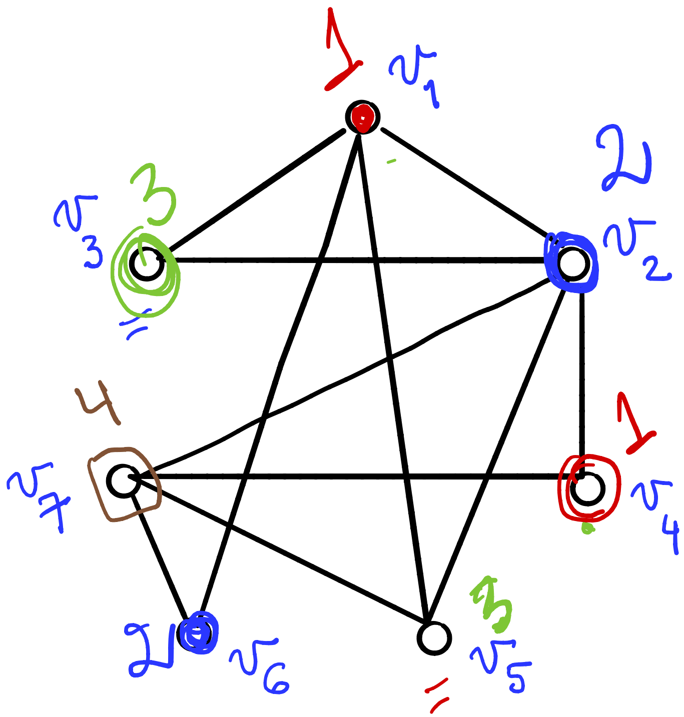
Prova 2 (Heurística gulosa)

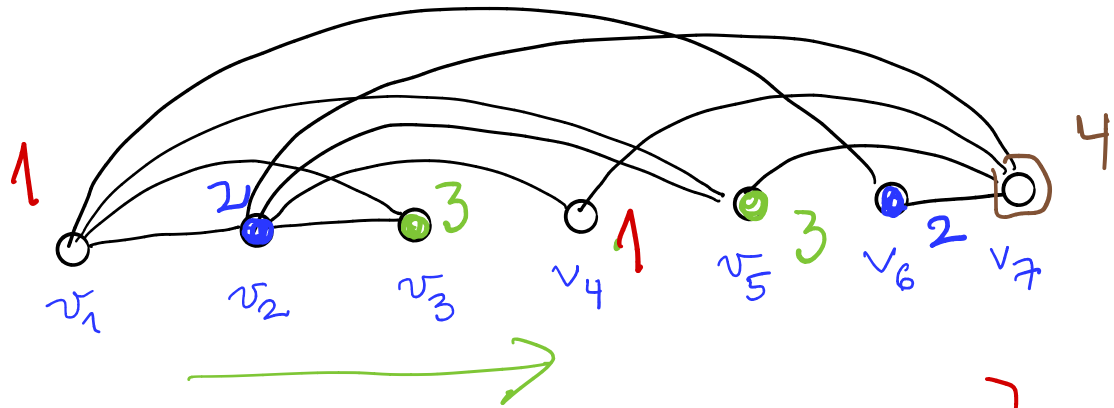
'greedy colouring'

Seja $\Delta = \Delta(G)$ e $n = |V(G)|$.

Vamos colorir cada vértice com uma das cores $1, 2, \ldots, \Delta+1$.

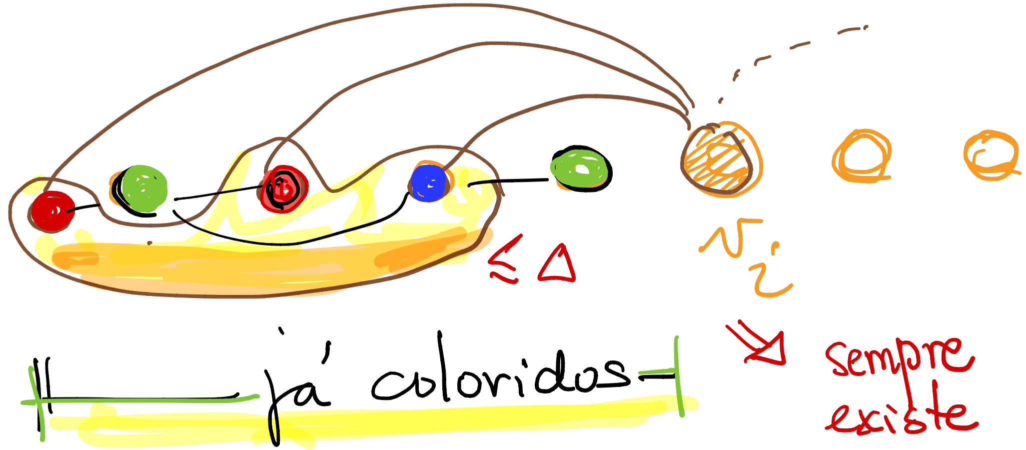
- Considere uma enumeração qquer $v_1, v_2, \ldots, v_n$ dos vértices de G. A partir dessa enumeração, considere sequencialmente cada vértice por vez, e atribua a v_i a menor cor disponível (ie, o menor inteiro não usado para colorir os vizinhos de v_i que estão entre os vértices $v_1, \ldots, v_{i-1}$).





$\Delta(G) = 5$ $\qquad$ $\mathcal{C} = \{1, 2, \ldots, \underbrace{6}_{\Delta+1}\}$

Mais precisamente,



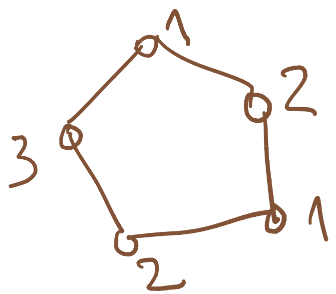
sempre existe uma cor em $\{1,\dots,\Delta+1\}$ p/ atribuir a v_i

- atribua a cor 1 ao vértice v_1
- $i=2$
- enquanto $i \leq n$
    - Seja c o menor inteiro ñ usado p/ colorir os vértices em $Adj(v_i) \cap \{v_1,\dots,v_{i-1}\}$.
    - atribua a cor c a v_i
    - $i=i+1$

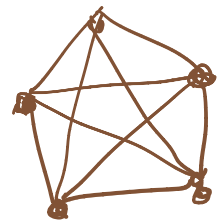
Claramente, não mais do que $\Delta+1$ cores são usadas por este procedimento.

A delimitação dada no teorema anterior é a melhor possível já que existem grafos G para os quais $\chi(G) = \Delta(G) + 1$. Exiba grafos com essa característica.

duas famílias



C_n, n ímpar



K_5

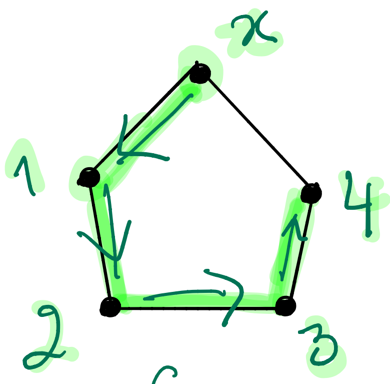
K_n

grafos completos

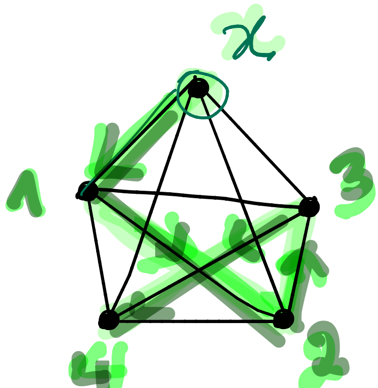
O interessante é que, se excluirmos tais grafos, podemos provar uma delimitação melhor. É o que garante o Teorema de Brooks, que veremos a seguir.

Uma das provas que veremos é relativamente simples. Ela é baseada em *árvore-BP* (árvore de busca em profundidade – *DFS-tree*). Mas para isso, precisamos do seguinte resultado (cuja prova não faremos aqui).

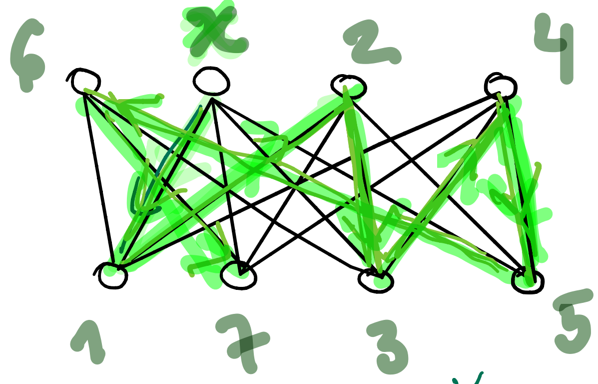
LEMA BP. *Os únicos grafos para os quais toda árvore-BP é um caminho hamiltoniano são os circuitos, os grafos completos e os grafos completos bipartidos regulares ($K_{n,n}$).*



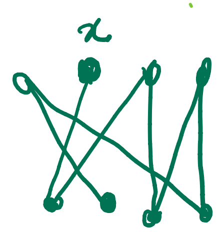
C_5



K_5



K_{44}



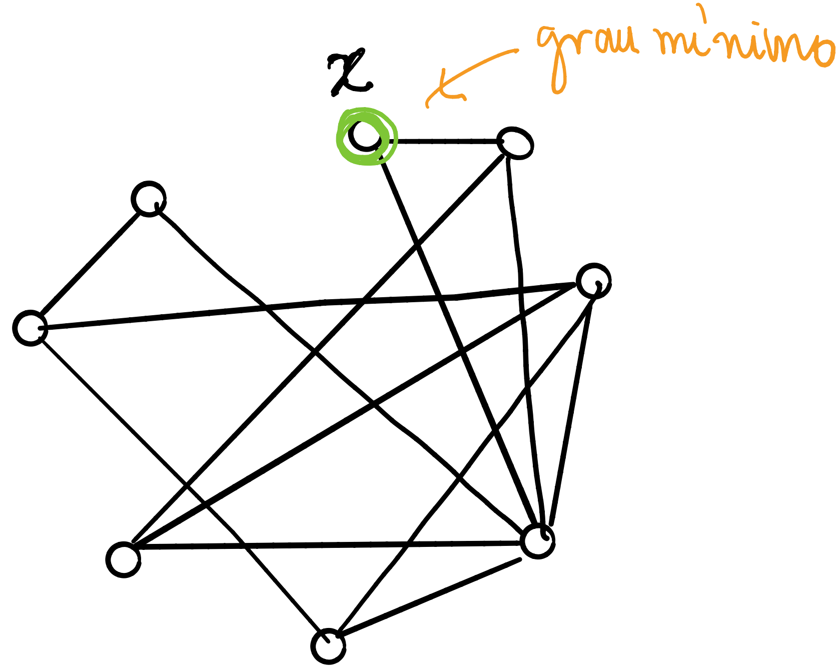
Teorema 7.3. (Teorema de Brooks, 1941)
Se G é um grafo conexo que não é completo e nem é um circuito ímpar, então $\chi(G) \leq \Delta(G)$.

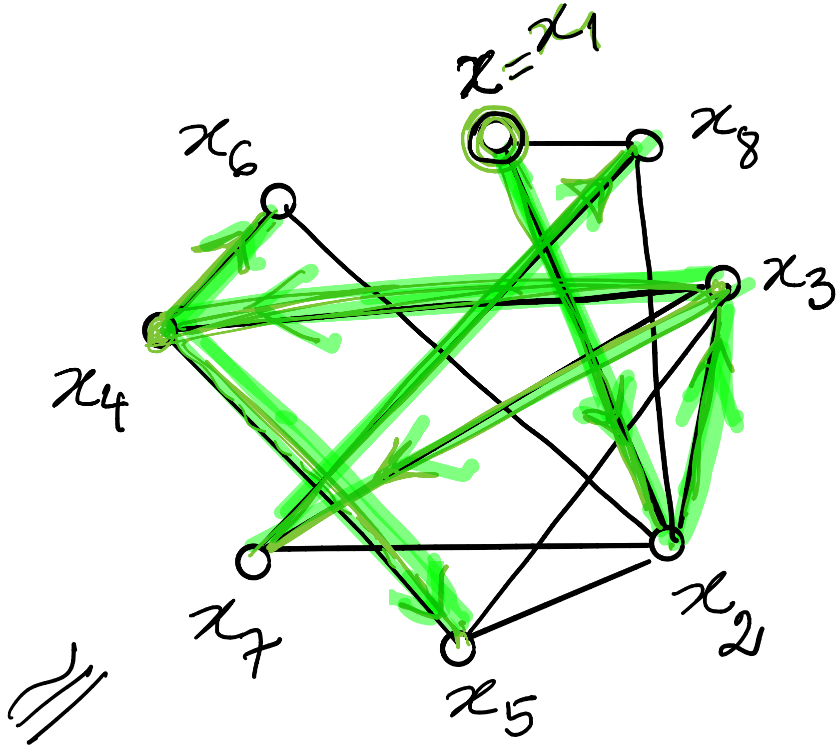
Prova 1 (usando árvore-BP)

Seja $\mathcal{C} := \{1, 2, \ldots, \Delta\}$, onde $\Delta := \Delta(G)$.

Caso 1. G não é um grafo regular.

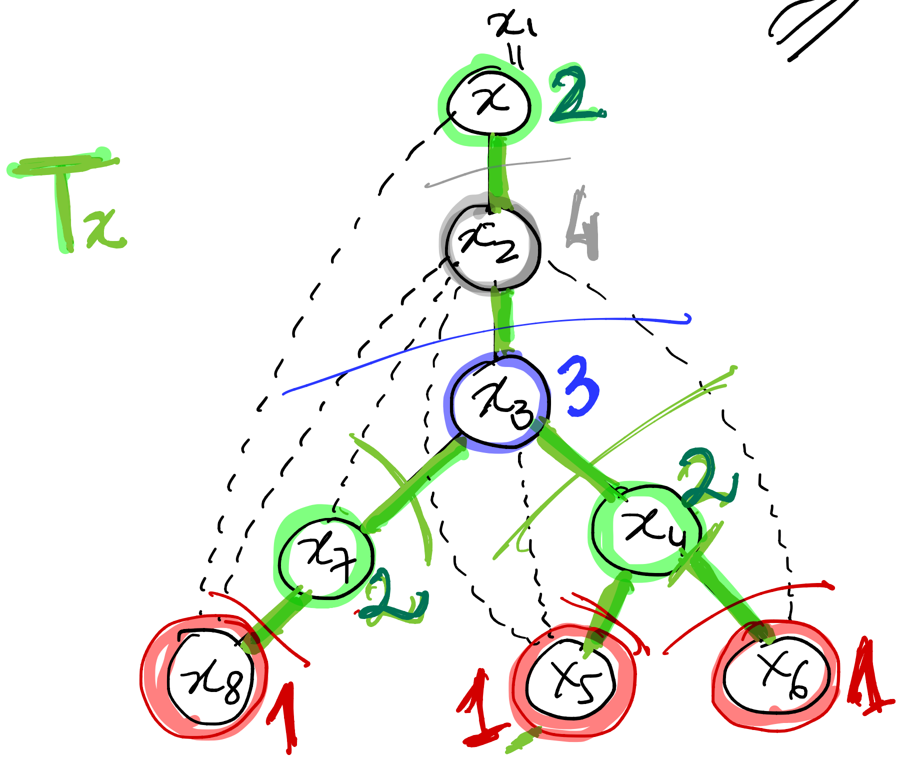
Seja x um vértice de grau mínimo, e seja T_x uma árvore-BP de G com raiz x. Faça uma coloração de G usando a heurística gulosa (vista na prova do Teorema 7.2) com as cores em $\mathcal{C}$, selecionando a cada iteração uma folha da subárvore de T_x induzida pelos vértices ainda não-coloridos. Note que, no momento de colorir uma folha f, tal folha é adjacente em T_x a pelo menos um vértice ainda não-colorido; e portanto, f é adjacente em G a no máximo $g(f) - 1 \leq \Delta - 1$ vértices coloridos. Portanto, uma das cores em $\mathcal{C}$ pode ser atribuída a f. Finalmente, no momento de colorir a raiz x, como $g(x) < \Delta$, existe uma cor disponível que podemos atribuir a x.

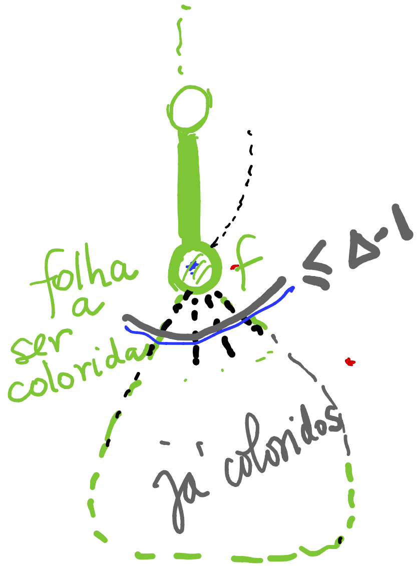


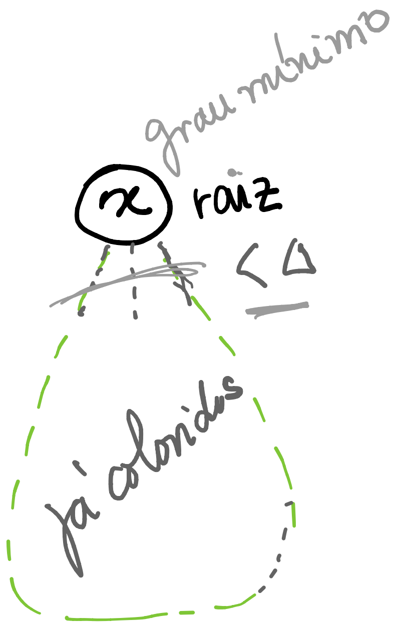


Construção da árvore BP com raiz x

Tx





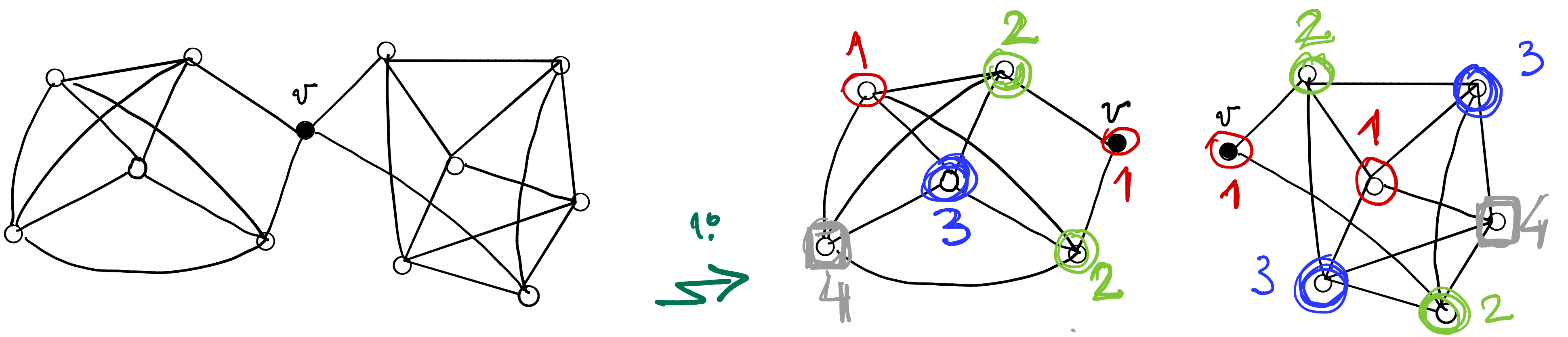


Caso 2. G é um grafo regular.

Se G é um circuito par ou um grafo bipartido completo regular, então claramente $\chi(G) = 2 \leq \Delta$. Suponhamos então que G seja distinto desses grafos.

Caso 2.1. G tem um vértice-de-corte.

Seja v um vértice-de-corte. Então $G = G_1 \cup G_2$, onde G_1 e G_2 são conexos e $V(G_1) \cup V(G_2) = \{v\}$. Como G é regular, então G_1 e G_2 não são regulares. Pela prova do Caso 1 (acima), temos que $\chi(G_1) \leq \Delta(G_i)$, $i = 1, 2$, e não é difícil verificar que $\chi(G) = \max\{\chi(G_1), \chi(G_2)\} \leq \Delta$.



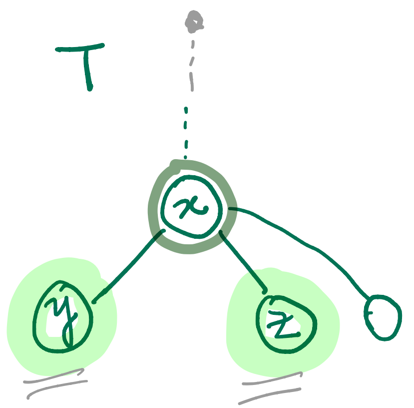
G $\Delta(G) = 4$ G_1 ñ reg. G_2 ñ reg.

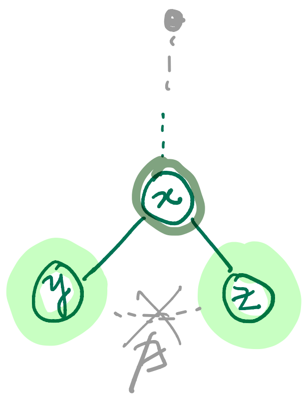
2º Colorimos G usando coloraç. de G_1 e G_2

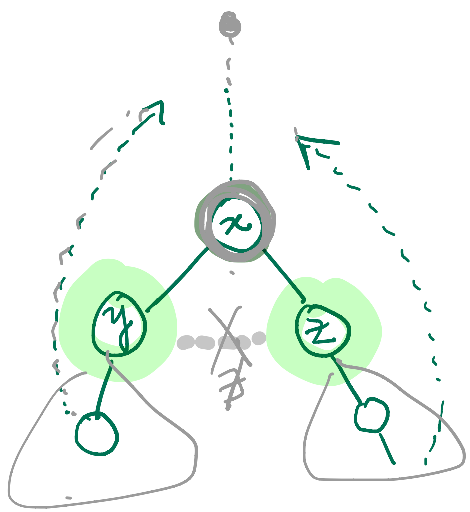
Caso 2.2. G não tem vértices-de-corte (ou seja, G é 2-conexo).

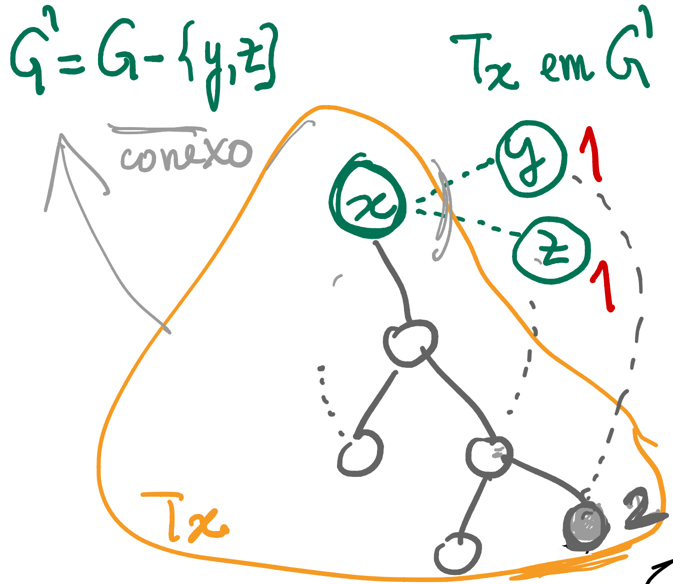
Seja T uma árvore-BP de G que não é um caminho (tal T existe pelo Lema BP). Seja x um vértice de T com pelo menos 2 filhos, digamos y e z. Como G é 2-conexo, então $G - y$ e $G - z$ são conexos. Então y (resp. z) é uma folha de T ou tem descendentes próprios que são adjacentes a ancestrais de x. Então $G' = G - \{y, z\}$ é conexo.

Seja T' uma árvore-BP em G' com raiz x. Atribua primeiramente a cor 1 aos vértices y e z (note que eles não são adjacentes). Faça em seguida uma coloração de T' com a heurística gulosa definida no Caso 1 (não deixando de levar em conta as arestas adjacentes a y ou z). Note que, no momento de colorir a raiz x, como atribuímos a cor 1 aos vértices y e z (vizinhos de x), existe uma cor disponível para atribuirmos a x. □









Prova 2 (usando ideia das cadeias de Kempe) (em aula)

(continua)

$\downarrow$

aula 2