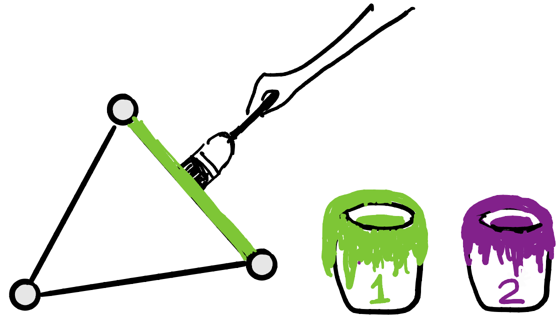
Capítulo 6

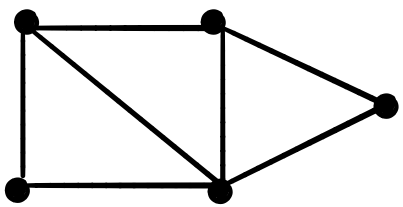
Coloração de arestas



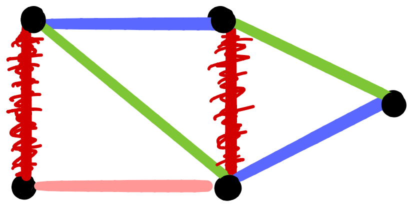
1 Introdução

Neste capítulo só trataremos de grafos sem laços. Uma **coloração das arestas** de um grafo é uma **atribuição de cores às suas arestas tal que arestas adjacentes recebem cores diferentes**. Equivalentemente, podemos dizer que uma coloração das arestas de um grafo G é uma *partição de $A(G)$ em emparelhamentos*.

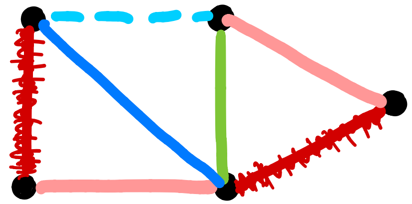
Ex:



G



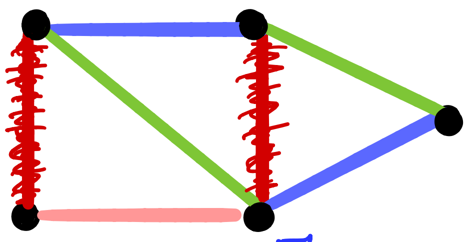
4 cores



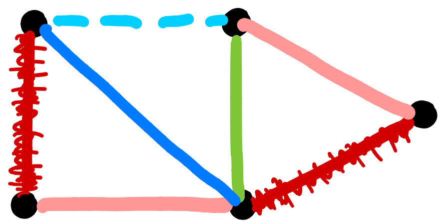
5 cores

Se $E_1, \ldots, E_k$ são emparelhamentos que definem uma partição de $A(G)$, dizemos que cada emparelhamento E_i $(1 \leq i \leq n)$ é uma **cor**, e k é o **número de cores**. Neste caso, dizemos que G tem (ou admite) uma **k-aresta-coloração** $\mathcal{C} = \{E_1, \ldots, E_k\}$. ou G é **k-aresta-colorível**. Possivelmente algum emparelhamento E_i pode ser vazio; assim, quando dizemos que G tem uma **k-aresta-coloração**, isto quer dizer que podemos colorir as arestas de G com no máximo k cores.

Ex:



4-aresta-coloração



5-aresta-coloração

(6-aresta-coloração)

(7-aresta-coloração) ...

OBS: Quando um grafo G admite uma k-aresta-coloração, também dizemos que G é **k-aresta-colorível**.

2 Colorações mínimas e índice cromático

Encontrar uma coloração das arestas de um grafo é muito fácil (basta colorir cada aresta com uma cor diferente). Temos interesse em usar poucas cores. Uma coloração de arestas de um grafo é **mínima** (ou ótima) se o número de cores usadas por essa coloração é o menor possível.

PROBLEMA DE INTERESSE: Obter uma aresta-coloração mínima de um grafo.

O problema acima é difícil! (É NP-difícil.)

Fácil, se G é bipartido!

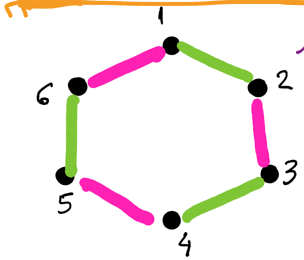
O **índice cromático** de G, denotado por $\chi'(G)$, é o **menor k tal que G é k-aresta-colorível**. Se $\chi'(G) = k$, então dizemos que G é **k-aresta-cromático**.

▶ **Índice cromático dos circuitos**

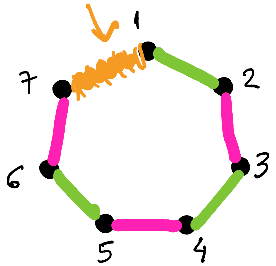
$$\chi'(C_n) = \begin{cases} 2 & \text{se } n \text{ é par,} \\ 3 & \text{se } n \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

∈ classe 1

∈ classe 2



C_6

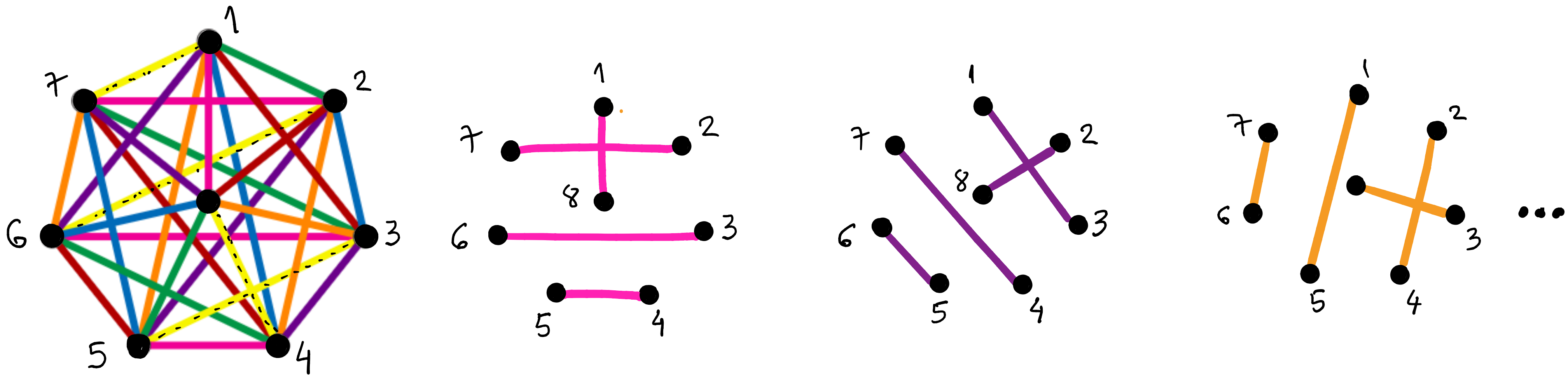


C_7

▶ Índice cromático dos grafos completos

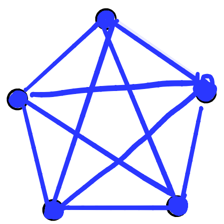
$$\chi'(K_n) = \begin{cases} n-1 & \text{se } n \text{ é par,} \quad \in \text{classe } 1 \\ n & \text{se } n \text{ é ímpar.} \quad \in \text{classe } 2 \end{cases}$$

(a) K_n, n par. (Exemplo de uma 7-aresta-coloração do K_8.)



(b) K_n, n ímpar

Vamos analisar o K_5.



$|A(K_5)| = 10$

E empar. $\Rightarrow$ $|E| \leq 2$ $\Big\} \Rightarrow$ Precisamos mais do que 4 empar. p/ colorir $A(K_5)$

$$\chi'(K_5) \geq 5$$

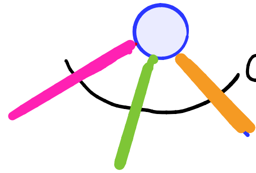
Veremos adiante que $\chi'(G) \leq \Delta(G)+1$.

Com isso, teremos $\chi'(K_n) = n$

- A ideia feita p/ K_5 pode ser feita p/ K_n, n ímpar $\Rightarrow$ $\chi'(K_n) \geq n$ se n ímpar

3 Delimitação inferior

Uma delimitação inferior imediata do índice cromático é a seguinte.



cores distintas

Delimitação 6.1. Em todo grafo G tem-se que $\chi'(G) \geq \Delta(G)$.

A desigualdade acima é imediata, pois em cada vértice v de G, as arestas que incidem em v têm que receber cores distintas. Logo, $\chi'(G) \geq \Delta(G)$. Assim, se uma coloração das arestas de G usa $\Delta(G)$ cores, então ela é mínima.

Veremos a seguir que todo grafo bipartido G admite uma $\Delta(G)$-aresta-coloração. (E que qualquer grafo G admite uma $(\Delta(G)+1)$-aresta coloração.)

PERGUNTA:

arbitrário

Como convencer alguém de que um certo grafo G requer mais do que $\Delta(G)$ cores? Existe algum certificado (objeto/estrutura do grafo com alguma propriedade) fácil de ser testado?

(Pode existir argumentos simples para grafos específico.

Resposta: Não.

Veremos isso
no caso do grafo de Petersen.

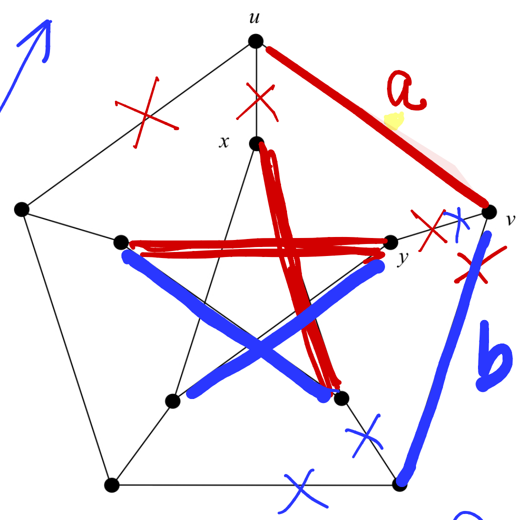
$G \equiv$ Petersen graph

Prova de que $\chi'(G) = 4$

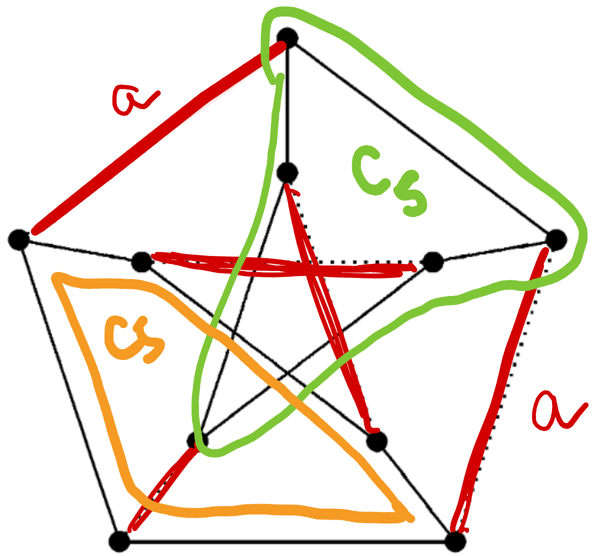
$A(G) = C_e \cup C_i \cup R$

arestas do circuito externo

arestas do circuito interno



Argumento 1. Se $\chi'(G) = 3$, cada uma das 3 cores tem que ocorrer 2 vezes no circuito interno. (Ao atribuir a cor $\underline{a}$ a uma aresta do circ. externo, essa cor é forçada a aparecer 2 vezes no circ. interno) Contradição, pois o circ. interno tem comprimento 5.

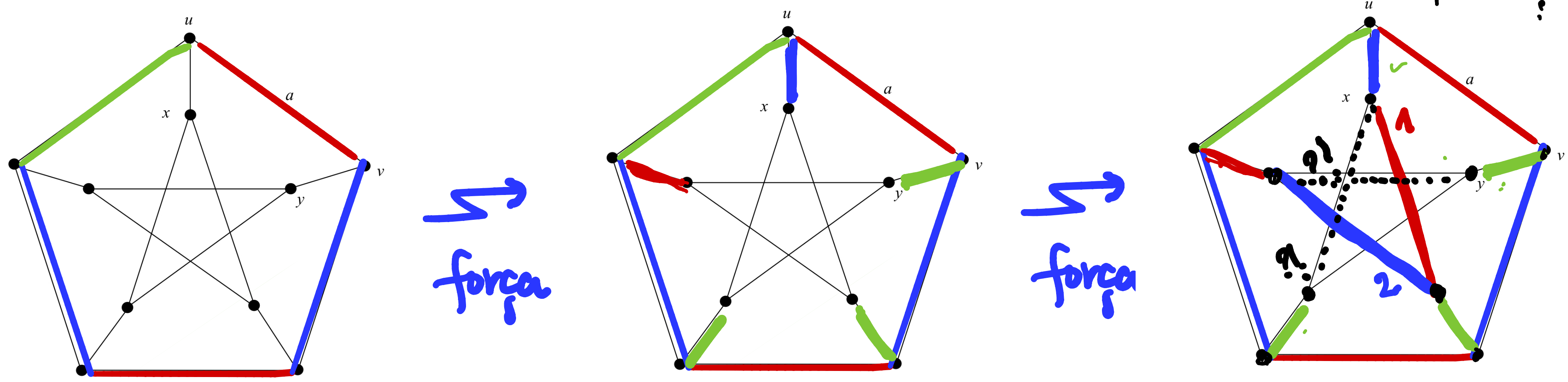


Argumento 2. $|A(G)| = 15$. Se $\chi'(G) = 3$, então G tem que ter 3 empar. perf. disj. Se E_1 é um emp. perf., E_1 tem que ter 2 arestas do circ. externo. Então 2 arestas do circ. interno e uma de R (raio) pertencem a E_1 (veja figura). Neste caso, $G - E_1$ é um 2-fator que consiste de dois C_5's, que claramente não contém 2 emp. perf.

Argumento 3. $A(G) = C_e \cup C_i \cup R$ (disjuntos)

Se $\chi'(G) = 3$, C_e requer 3 cores:
uma delas ocorre 1 vez,
duas " ocorrem 2 vezes

Não dá p/ completar!



Argumento 4. Se $\chi'(G) = 3$ então G tem 3 emp. perf.

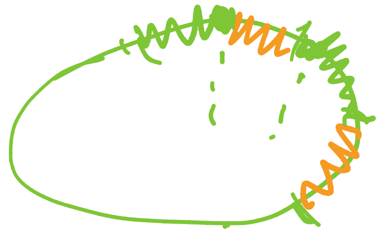
Seja E_1 um emp. perf. Então $G - E_1$ é um 2-fator F

Como G ñ é hamilt., $G \not\supseteq C_3$ e $G \not\supseteq C_4$, então $G \cong C_5 \dot{\cup} C_5$. Neste caso, F ñ tem 2 emp. perf. disj.

OBS: $G \cong$ grafo de Petersen

G grafo de Petersen

$$\chi'(G) = 4 \iff G \text{ não é hamiltoniano}$$

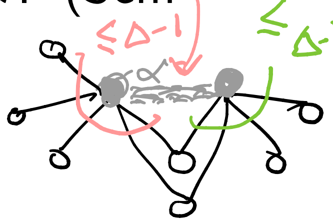


($\Rightarrow$) Suponha que G tenha um circuito hamiltoniano C.
Neste caso, as arestas de C podem ser coloridas com duas cores, digamos $\mathcal{E}_1$ e $\mathcal{E}_2$. Neste caso, $G - A(C)$ é um empar. perf. que pode receber uma cor $\mathcal{E}_3$.
Mas então $\chi'(G) = 3$.

($\Leftarrow$) (Veja o Argumento 4)

Exercício E6.1. Mostre que $\chi'(G) \leq 2\Delta(G) - 1$ para todo grafo G. (Sem usar o Teorema 6.2.)

Tem cor $\neq$ p/ atribuir a α



Exercício E6.2. Exiba um grafo com duas colorações mínimas distintas.

Exercício E6.3. Mostre que os emparelhamentos que compõem uma coloração mínima não são necessariamente máximos. Mais precisamente, exiba uma coloração mínima $\{E_1, \ldots, E_k\}$ em que nenhum dos emparelhamentos E_i é máximo.

Exercício E6.4. Mostre que se G é o grafo de Petersen, então $\chi'(G) = 4$.

(Faça apenas se tiver uma prova diferente e tão simples q/ as que vimos.)

Exercício E6.5. Mostre que todo grafo bipartido k-regular admite uma k-aresta-coloração.

Exercício E6.6. Exiba uma família de grafos G para os quais $\chi'(G) > \Delta(G)$.

Exercício E6.7. Mostre que se G é um grafo k-regular com número ímpar de vértices, então $\chi'(G) > \Delta(G)$.

Exercício E6.9. Prove que se G é um grafo 3-regular tal que $\chi'(G) = 4$, então G não é hamiltoniano.

OBS: G 3-regular $\Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} |A(G)| = \dfrac{3|V(G)|}{2} \\ |A(G)| \in \mathbb{Z} \end{array}\right\} \Rightarrow |V(G)| \text{ é par}$$

4 Grafos bipartidos

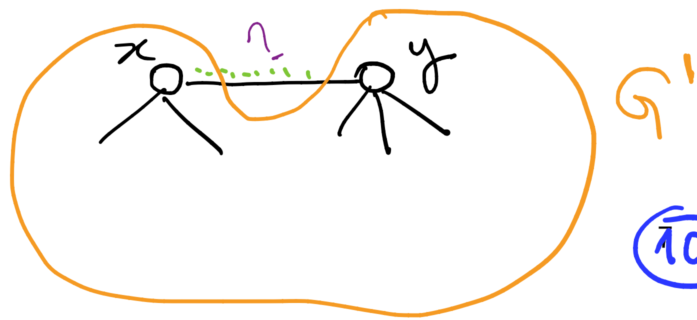
O índice cromático de grafos bipartidos tem uma delimitação superior que coincide com a delimitação inferior 6.1 mencionada anteriormente. Ou seja, tal resultado fornece precisamente o índice cromático de um grafo bipartido. Este resultado foi estabelecido por König em 1916.

Teorema 6.2. (König, 1916) Se G é um grafo bipartido então $\chi'(G) = \Delta(G)$.

Prova. (a) Claramente, $\chi'(G) \geq \Delta(G)$ (conforme a Delimitação 6.1). (b) Vamos provar que $\chi'(G) \leq \Delta(G)$, por por indução no número de arestas de G.

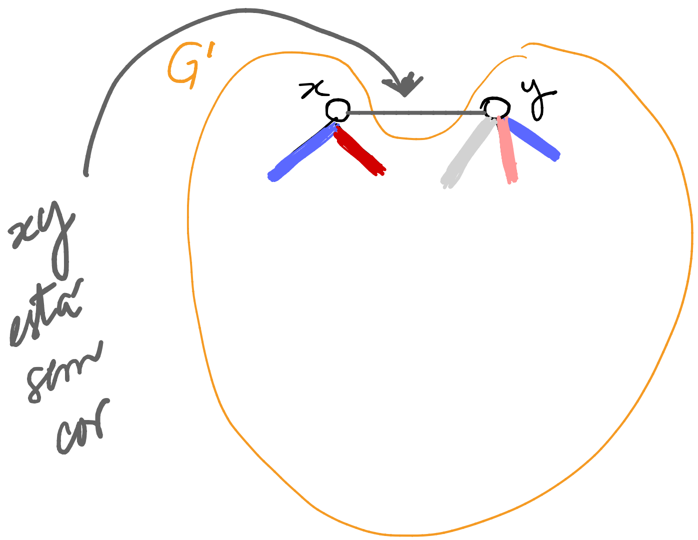
Se $|A(G)| = 1$, o resultado é imediato. Suponha então que $|A(G)| \geq 2$ e que $\Delta(G) = k$. Escolha arbitrariamente uma aresta xy de G, e considere o grafo $G' = G - xy$.

Como $\Delta(G') \leq \Delta(G) = k$, pela hipótese de indução segue que G' tem uma k-aresta-coloração $\mathcal{C} = \{E_1, E_2, \ldots, E_k\}$. Vamos mostrar que é possível obter uma k-aresta-coloração para G, atribuindo-se uma das cores em $\mathcal{C}$ à aresta xy (eventualmente após uma recoloração das arestas de G').



Como $g_{G'}(x) < k$, então existe uma cor em $\mathcal{C}$, digamos E_i, que não incide em x.

(a) Se E_i *não incide em* y, então podemos dar a cor E_i à aresta xy, e manter as demais cores definidas por $\mathcal{C}$, obtendo dessa forma uma k-aresta-coloração de G. (Ou seja, só trocamos E_i por $E_i \cup \{xy\}$.)



$C = \{E_1, \ldots, E_i, \ldots, E_k\}$

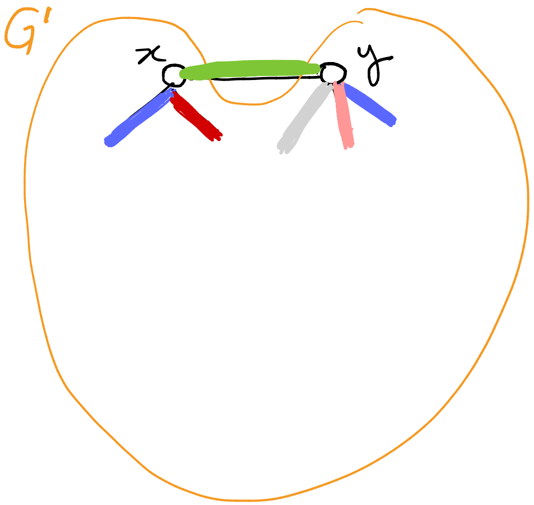
E_i: Não incide em x,
" " " y.

$\Downarrow$

Atribuímos a cor E_i à aresta xy

$\Downarrow$

Obtemos uma k-aresta-color. de G.



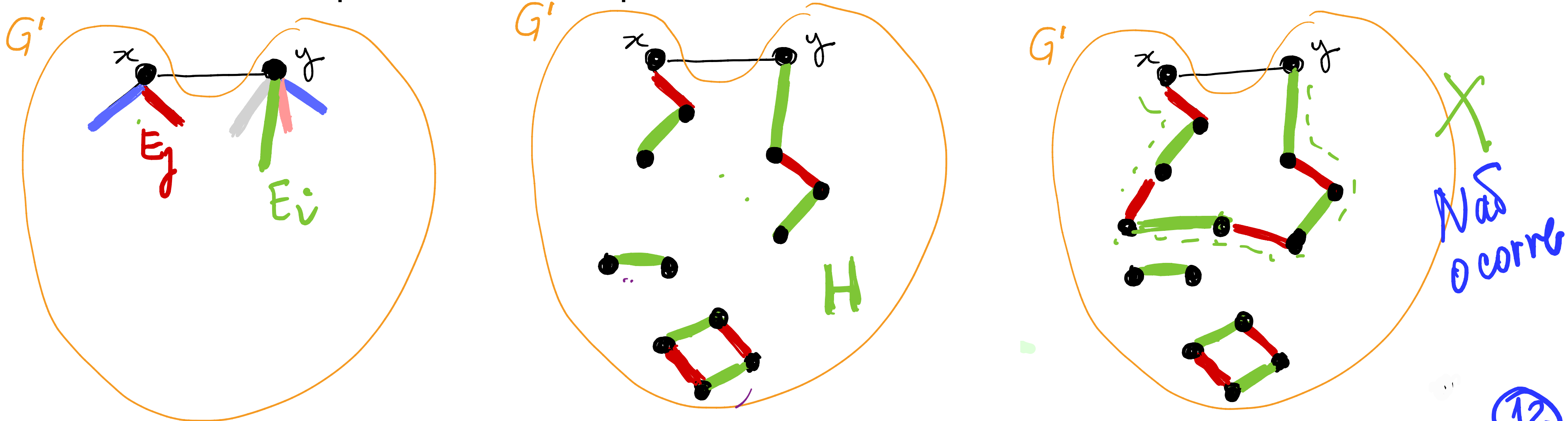
(b) Suponha então que E_i *incide em* y. Como $g_{G'}(y) < k$, então pelo menos uma cor em $\mathcal{C}$, digamos E_j, não incide em y.

Seja $H := G[E_i \cup E_j]$ o subgrafo de G induzido pelas arestas de cores E_i ou E_j. (Os compon. de H são circuitos ou caminhos alternantes de cor E_i e E_j.)

Seja Y o componente de H que contém o vértice y.

Afirmamos que x não pertence a Y. De fato, se x pertencesse a Y, existiria em H um caminho de y a x, cuja aresta inicial pertenceria a E_i e cuja aresta final pertenceria a E_j (já que em x não incide uma aresta de E_i).

Neste caso, esse caminho teria comprimento par, e concatenando-o com a aresta xy teríamos um circuito ímpar em G, uma contradição (já que G é bipartido). Portanto, x não pertence ao componente Y.



Como $\boldsymbol{x}$ não pertence a $\boldsymbol{Y}$, podemos obter uma $\boldsymbol{k}$-coloração de $\boldsymbol{G}$ da seguinte forma:

(i) Consideramos $\boldsymbol{\mathcal{C}}$ e permutamos as cores $\boldsymbol{E_i}$ e $\boldsymbol{E_j}$ no componente $\boldsymbol{Y}$;

(ii) atribuímos a cor $\boldsymbol{E_i}$ à aresta $\boldsymbol{xy}$.

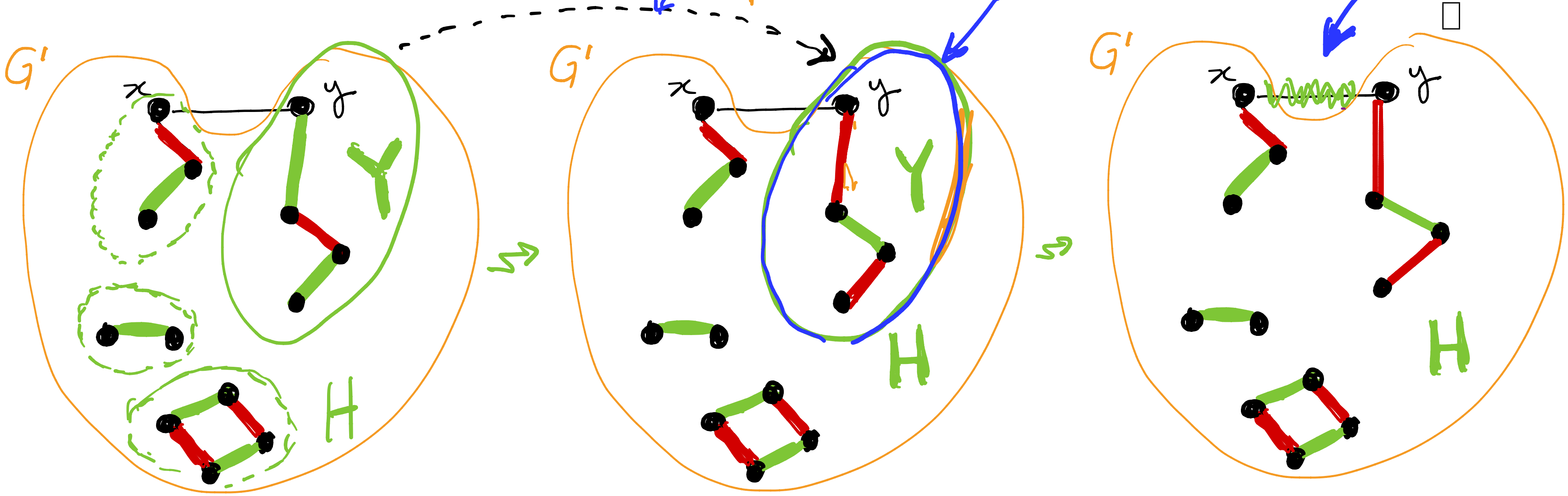
Mais formalmente, definimos

$$\boldsymbol{E_i := (E_i \triangle A(Y)) \cup \{xy\}} \text{ e}$$
$$\boldsymbol{E_j := E_j \triangle A(Y)},$$

Permutamos as cores E_i e E_j no compon. Y

Agora podemos atribuir a cor E_i (verde) p/ aresta xy

e mantemos os demais emparelhamentos (cores) inalterados.



OBSERVAÇÃO: A prova indutiva que fizemos nos fornece um algoritmo polinomial para encontrar uma coloração mínima de um grafo bipartido.

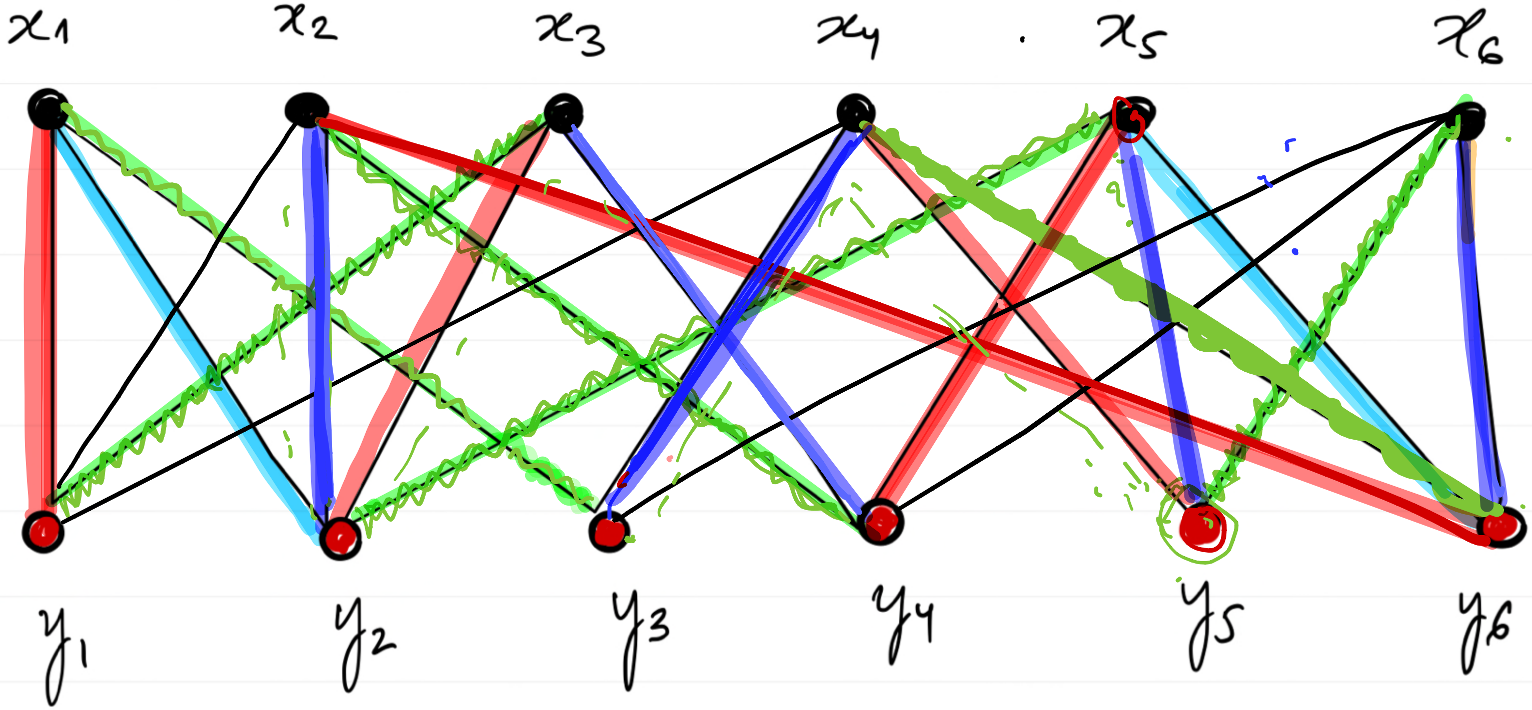
É possível fazer uma segunda prova do teorema de König usando o resultado proposto como EXERCÍCIO EXTRA no final do Capítulo 5:

"Um grafo bipartido tem um emparelhamento que cobre todos os vértices de grau máximo."

Essa prova seria mais de interesse teórico, pois nesse exercício extra o grafo G' construído, que contém G, pode ser muito grande.

(Dicas sobre este EXERCÍCIO EXTRA na aula.)

$\Delta(G) = 4$ G bipartido

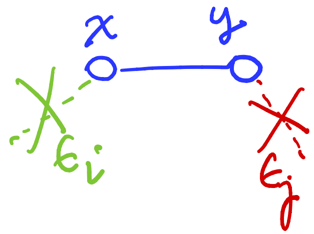


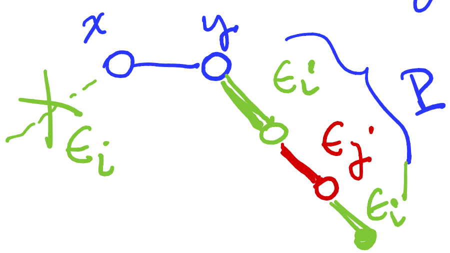
EXERCÍCIO p/ CASA : colorir as arestas sem cor cf. as idéias da prova do Teo 6.2 e obter uma 4-aresta-coloração.

Algoritmo p/ fazer uma Δ-coloração de um grafo bipartido G

- $k = \Delta(G)$
- Sejam $E_1, E_2, \dots, E_k$ empar. disjuntos de G (alguns ou todos vazios).
- **Enquanto** $E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup A_k \neq A(G)$
  faça
  - Seja $\alpha = xy \in A(G) \setminus (E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup A_k)$
  - Escolha i tal que E_i não cobre x
  - Escolha j tal que E_j não cobre y
  - Seja P o caminho mais longo que começa em y e só contém arestas de $E_i \cup E_j$. (Possivelm. P é vazio.)

    (Se não vazio, começa com cor E_i)





  - $E_i := (E_i \setminus A(P)) \cup (E_j \cap A(P)) \cup \{\alpha\}$ $\quad (E_i := (E_i \Delta A(P)) \cup \{\alpha\})$
  - $E_j := (E_j \setminus A(P)) \cup (E_i \cap A(P))$ $\quad (E_j := (E_j \Delta A(P)) \cup \{\alpha\})$

  $\equiv$ (Permute as cores E_i e E_j no caminho P e atribua a cor E_i à aresta xy)

5 Grafos arbitrários

Teorema 6.3.(Vizing, 1964) Se G é um grafo simples, então $\chi'(G) \leq \Delta(G)+1$.

Prova. Por indução em $|A(G)|$. Se G tem uma aresta o resultado é imediato. Suponha então que $|A(G)| \geq 2$ e considere $\Delta = \Delta(G)$. Escolha arbitrariamente uma aresta α de G. Considere o grafo $G' = G - \alpha$. Como $\Delta(G') \leq \Delta$, pela hipótese de indução segue que G' tem uma $(\Delta + 1)$-aresta-coloração, digamos $\mathcal{C}$. Vamos mostrar que é possível atribuir uma das cores em $\mathcal{C}$ à aresta α.

Suponha que $\alpha = u\,v_1$. Como $g_{G'}(u) < \Delta + 1$ e $g_{G'}(v_1) < \Delta + 1$, existem cores em $\mathcal{C}$, digamos E_u e E_1 tais que

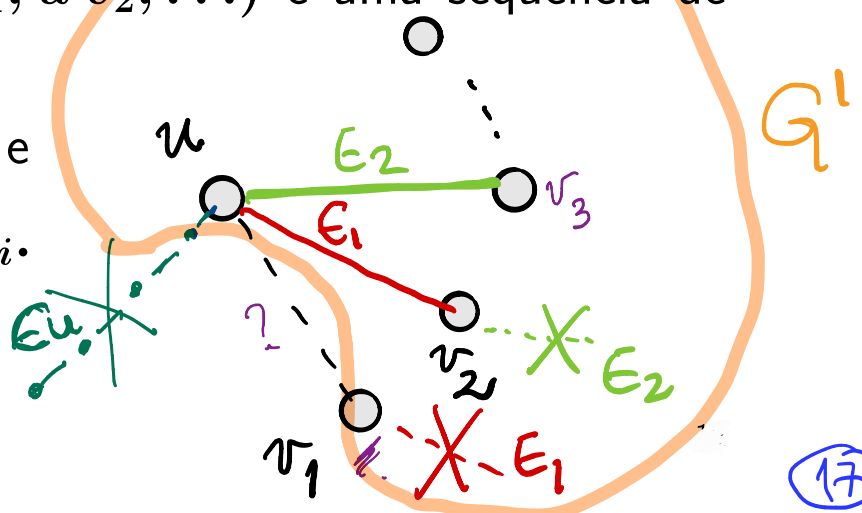
$$E_u \text{ não incide em } u \text{ e}$$

$$E_1 \text{ não incide em } v_1.$$

Vamos construir uma seqüência de arestas $(u\,v_1, u\,v_2, \ldots)$ e uma seqüência de cores $(E_1, E_2, \ldots)$ tais que

$$E_i \text{ não incide em } v_i \text{ e}$$

$$u\,v_{i+1} \text{ tem a cor } E_i.$$



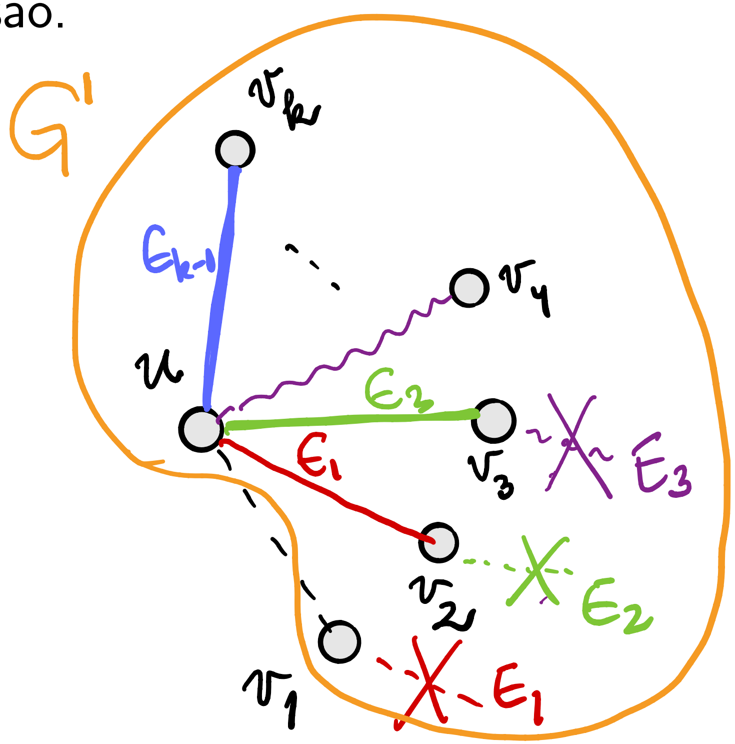
Suponha que temos as seqüências $(u\,v_1, u\,v_2, \ldots, u\,v_i)$ e $(E_1, E_2, \ldots, E_i)$. Se existir aresta uv de cor E_i tal que $v \notin \{v_2, \ldots, v_i\}$, chamamos de v_{i+1} o vértice v e tomamos uma cor E_{i+1} que não incide em v_{i+1}. Estendemos desta forma as duas seqüências, e repetimos este processo enquanto for possível.

Como $g(u)$ é finito, tal extensão não vai ser sempre possível. Suponha então que, tendo construído as seqüências

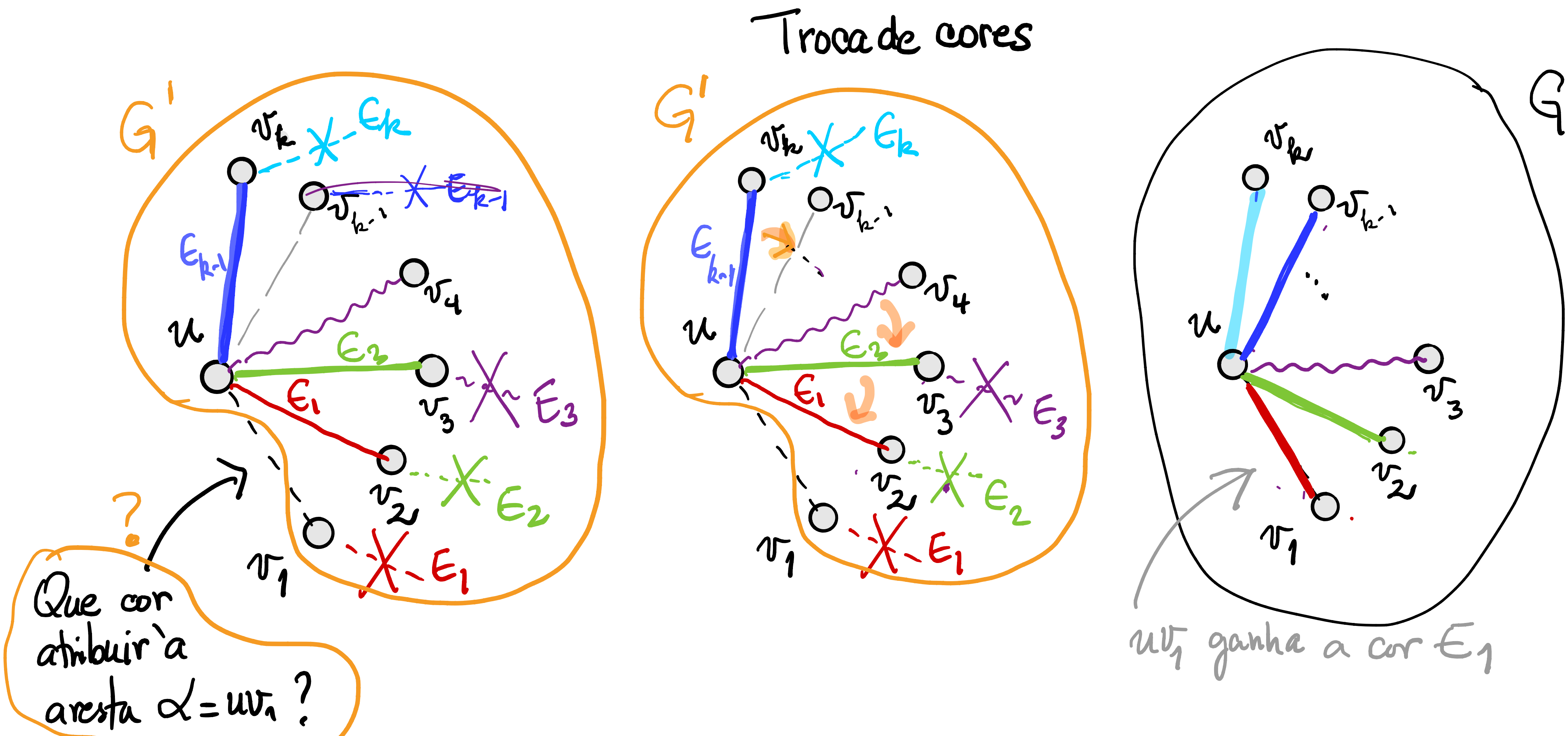
$$(u\,v_1, u\,v_2, \ldots, u\,v_k) \text{ e}$$

$$(E_1, E_2, \ldots, E_k),$$

não pudemos mais estender a seqüência das arestas. Vejamos as razões que impediram tal extensão.



(a) Não existe aresta uv com a cor E_k.

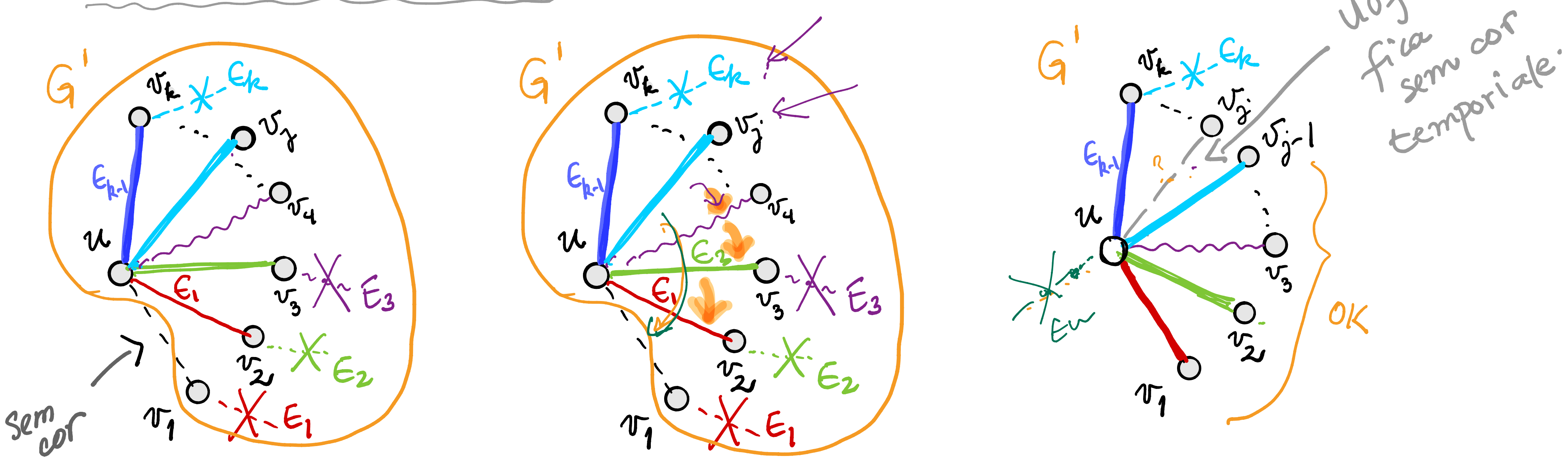


Neste caso, podemos recolorir as arestas $u\,v_i$, $1 < i \leq k$, atribuindo à aresta $u\,v_i$ a cor E_i. Atribuímos à aresta $u\,v_1$ a cor E_1.

(As demais arestas continuam com as cores que tinham.)

(b) Existe aresta $\boldsymbol{u\,v}$ com a cor $\boldsymbol{E_k}$, mas $\boldsymbol{v = v_j}$ para algum $\boldsymbol{j < k}$.

Neste caso, para começar, recolorimos as arestas $\boldsymbol{uv_i}$, $\boldsymbol{1 < i < j}$, dando a cor $\boldsymbol{E_i}$ a cada tal aresta $\boldsymbol{uv_i}$; e atribuímos a cor $\boldsymbol{E_1}$ à aresta $\boldsymbol{uv_1}$. Deixamos a aresta $\boldsymbol{uv_j}$ temporariamente sem cor.



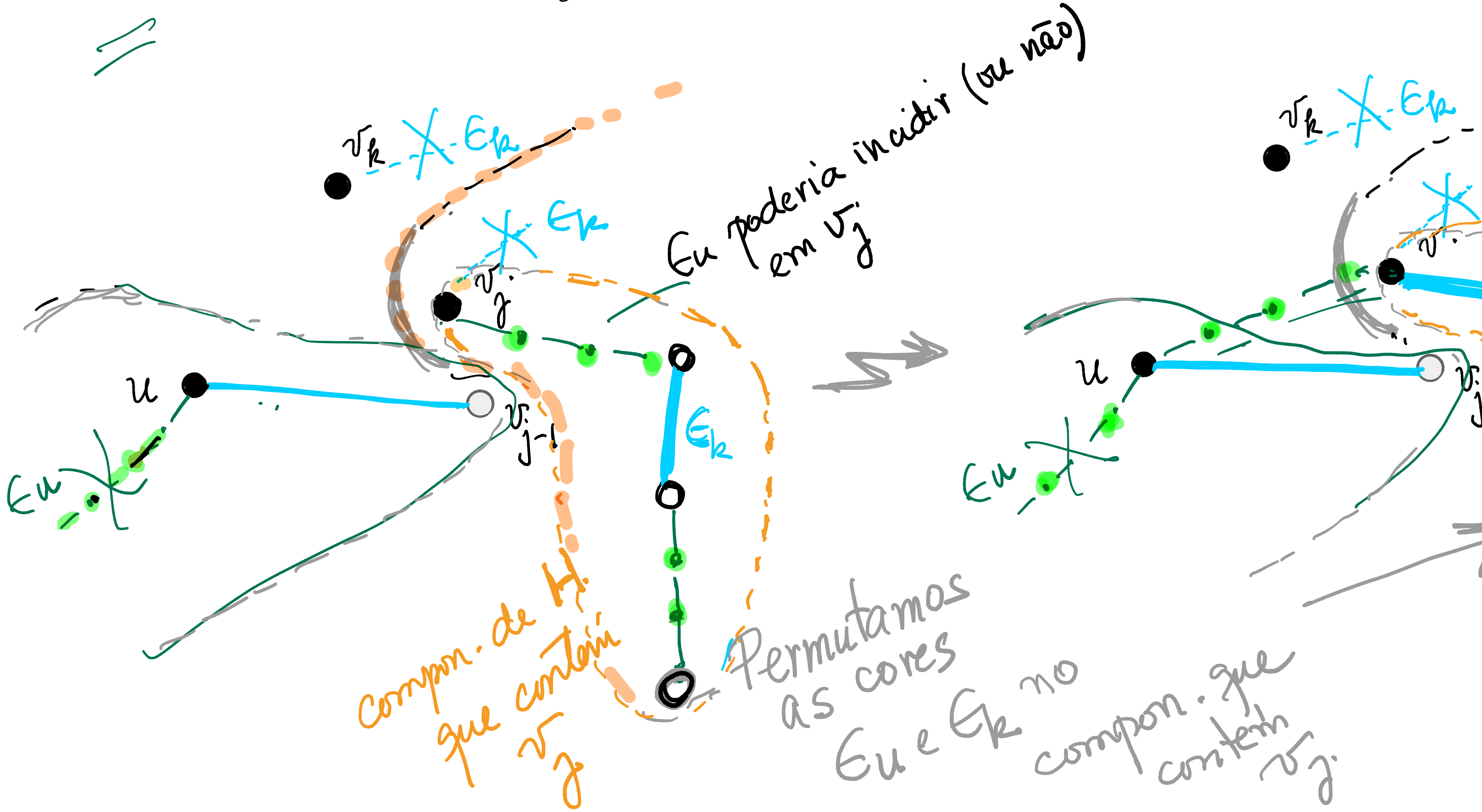
Seja $\boldsymbol{H}$ o subgrafo de $\boldsymbol{G}$ formado pelas arestas de cor $\boldsymbol{E_u}$ ou $\boldsymbol{E_k}$ (note que $\boldsymbol{uv_j}$ está sem cor). Cada um dos vértices $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v_j}$ e $\boldsymbol{v_k}$ têm grau no máximo 1 em $\boldsymbol{H}$, e portanto, não podem pertencer todos a um mesmo componente de $\boldsymbol{H}$.

Então pelo menos um dos dois casos seguinte deve ocorrer.

$H = G[E_u \cup E_k]$

(b1) Os vértices u e v_j pertencem a componentes distintos de H.

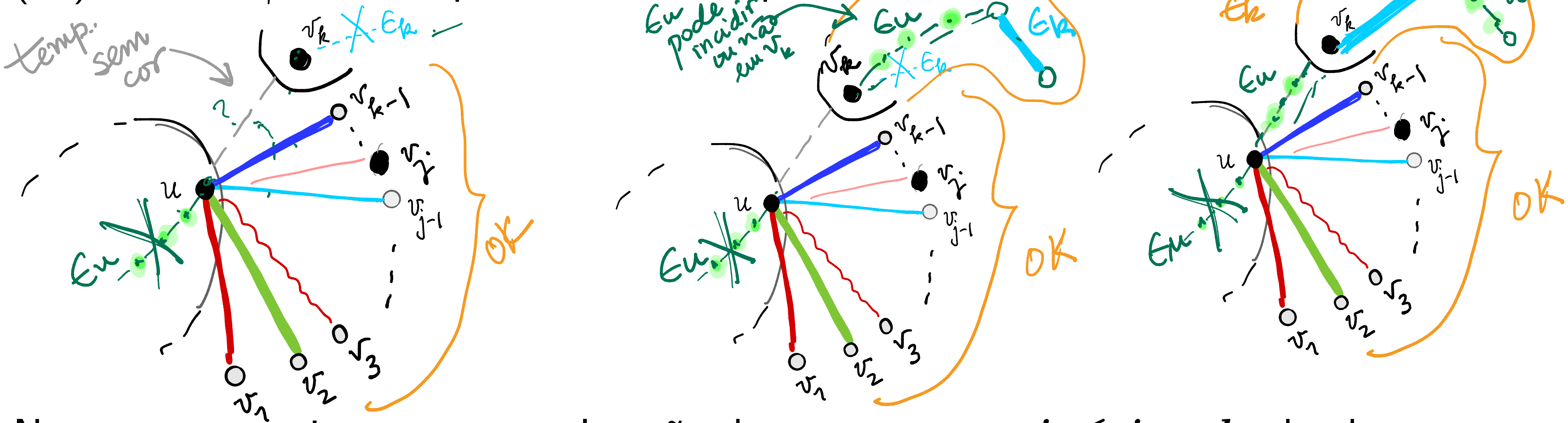
$H = G[E_u \cup E_k]$



Neste caso, permutamos as cores E_u e E_k no componente que contém v_j. Após esta recoloração, sabemos que a cor E_u não incide no vértice v_j. Como E_u não incide em u, então podemos colorir a aresta uv_j com a cor E_k. As demais arestas permanecem com as cores inalteradas. Obtemos assim uma $(\Delta + 1)$-aresta-coloração de G.

Eu

(b2) Os vértices $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v_k}$ pertencem a componentes distintos de $\boldsymbol{H}$.



Neste caso, continuamos a recoloração das arestas $\boldsymbol{uv_i}$, $\boldsymbol{j \leq i < k}$, dando a cor $\boldsymbol{E_i}$ a cada tal aresta $\boldsymbol{uv_i}$. Deixamos a aresta $\boldsymbol{uv_k}$ temporariamente sem cor. Como a recoloração não envolve as arestas de cor $\boldsymbol{E_u}$ ou $\boldsymbol{E_k}$, o subgrafo $\boldsymbol{H}$ não se altera.

Feito isso, permutamos as cores $\boldsymbol{E_u}$ e $\boldsymbol{E_k}$ no componente que contém $\boldsymbol{v_k}$. Após esta recoloração, temos que a cor $\boldsymbol{E_u}$ não incide em $\boldsymbol{v_k}$. Como $\boldsymbol{E_u}$ não incide em $\boldsymbol{u}$, podemos colorir a aresta $\boldsymbol{uv_k}$ com a cor $\boldsymbol{E_u}$, obtendo uma $(\boldsymbol{\Delta + 1})$-aresta-coloração de $\boldsymbol{G}$.

Tendo concluído a análise dos casos (b1) e (b2), a prova do teorema está completa. □

Resumindo

simples

Vizing

Se G é simples, então

$$\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G)+1$$

König

Se G é bipartido, então

$$\chi'(G) = \Delta(G)$$

G simples $\begin{cases} \chi'(G) = \Delta(G) & \leftarrow \text{dizemos que } G \in \text{Classe 1} \\ \chi'(G) = \Delta(G)+1 & \leftarrow \text{'' '' } G \in \text{Classe 2} \end{cases}$

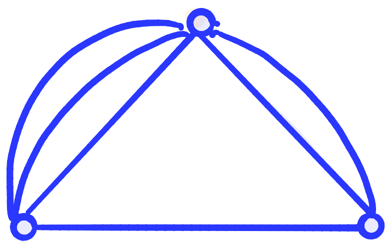
Resultado mais geral

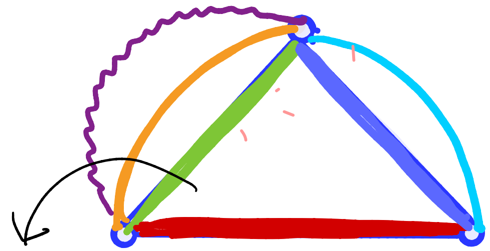
(G ñ precisa ser simples)

$$\chi'(G) \leq \Delta(G) + m(G) \quad (*)$$

multiplicidade máxima das arestas de G

G





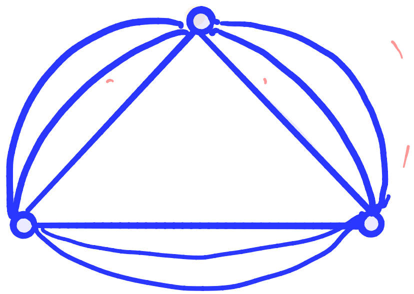
$m(G')=3$

$\chi'(G) = 6$

$\Delta(G) = 5$

$m(G) = 3$

G'



$\chi'(G') = 9$

$\Delta(G') = 6$

$m(G') = 3$

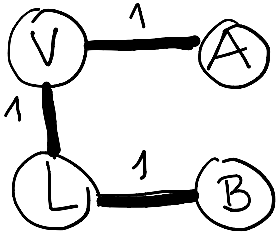
Desigualdade (*) é justa.

OBS: Uma parte desse material baseia-se no texto "Uma introdução à Teoria dos Grafos" (organizado para a II Bienal da SBM de 2004 – veja a lista de referências).

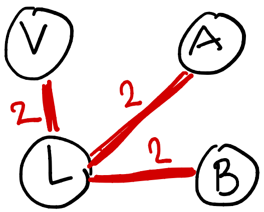
EXERCÍCIO

(não usa resultados sobre coloração que vimos)

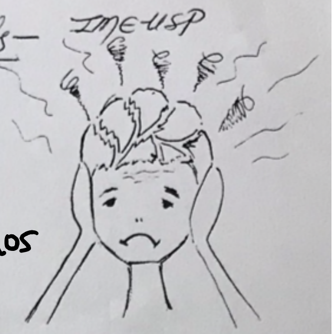
cubo 1



cubo 2



MAC-5770 – Introdução à Teoria dos Grafos – IME-USP

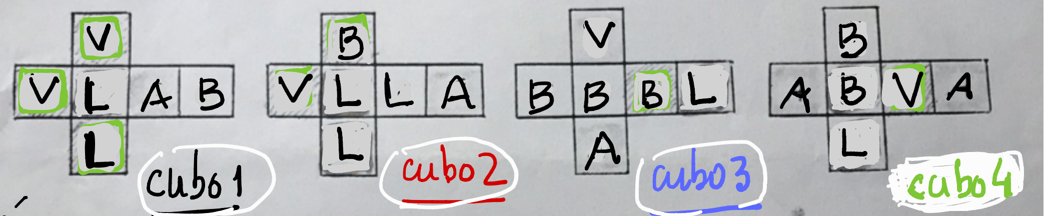


Quebra-cabeça "Insanidade Instantânea"

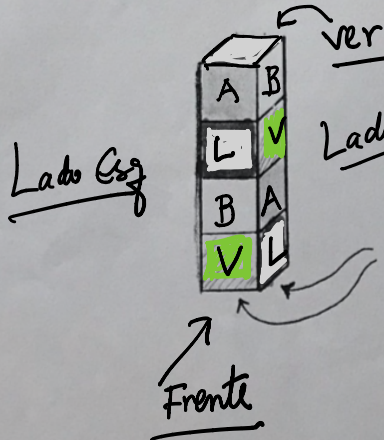
Dados: 4 cubos cujas faces têm um dos rótulos

V, A, B, L.

sendo que cada cubo contém pelo menos uma face de cada rótulo (veja figura abaixo).



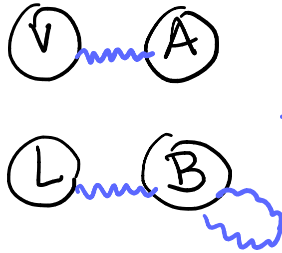
PROBLEMA: "Empilhar" os 4 cubos (veja figura abaixo) de forma que cada um dos lados (4x1) da pilha resultante tenha uma face de cada rótulo.



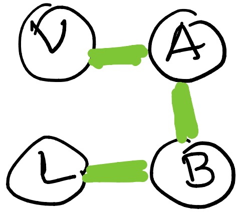
Em cada um dos lados (4x1) deve aparecer cada um dos rótulos V, A, B, L.

EXERCÍCIO: Resolver o problema usando linguagem da Teoria de Grafos.

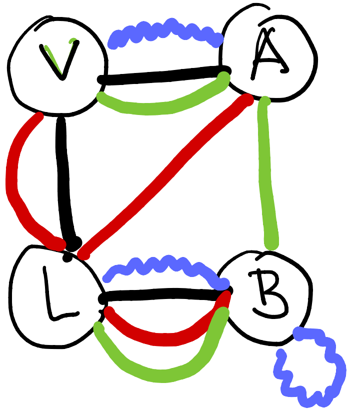
cubo 3



cubo 4

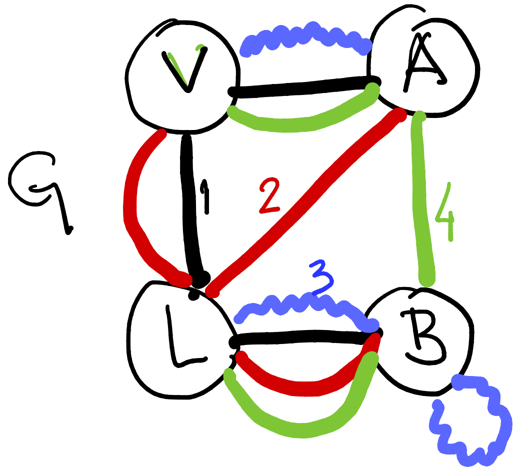


Pergunta: o que procurar neste grafo?



Solução do Quebra-cabeça. (parcial, por ora)

Considere o grafo G. com $V(G) = \{V, A, L, B\}$ Neste grafo, cada uma das cores (das arestas) indica a configuração do respectivo cubo.

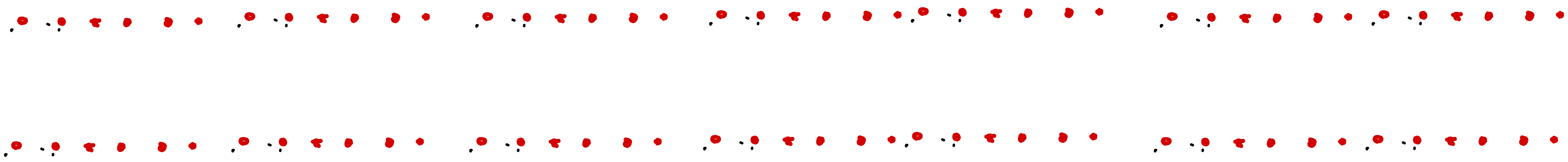


Cores = { preta (1), vermelho (2), azul (3), verde (4) }

cubo 1 — preta; cubo 2 — vermelho; cubo 3 — azul; cubo 4 — verde

Uma aresta xy de cor k ($k = 1, 2, 3, 4$) indica que no cubo k os rótulos x e y ocorrem em faces opostas. Ex: a aresta VA de cor preta (=1) indica que V e A ocorrem em faces opostas do cubo 1; VA de cor azul (=3) indica que V e A ocorrem em faces opostas do cubo 3; ....

Para saber se é possível fazer um empilhamento com as propriedades desejadas, precisamos procurar em G ???



Completar!

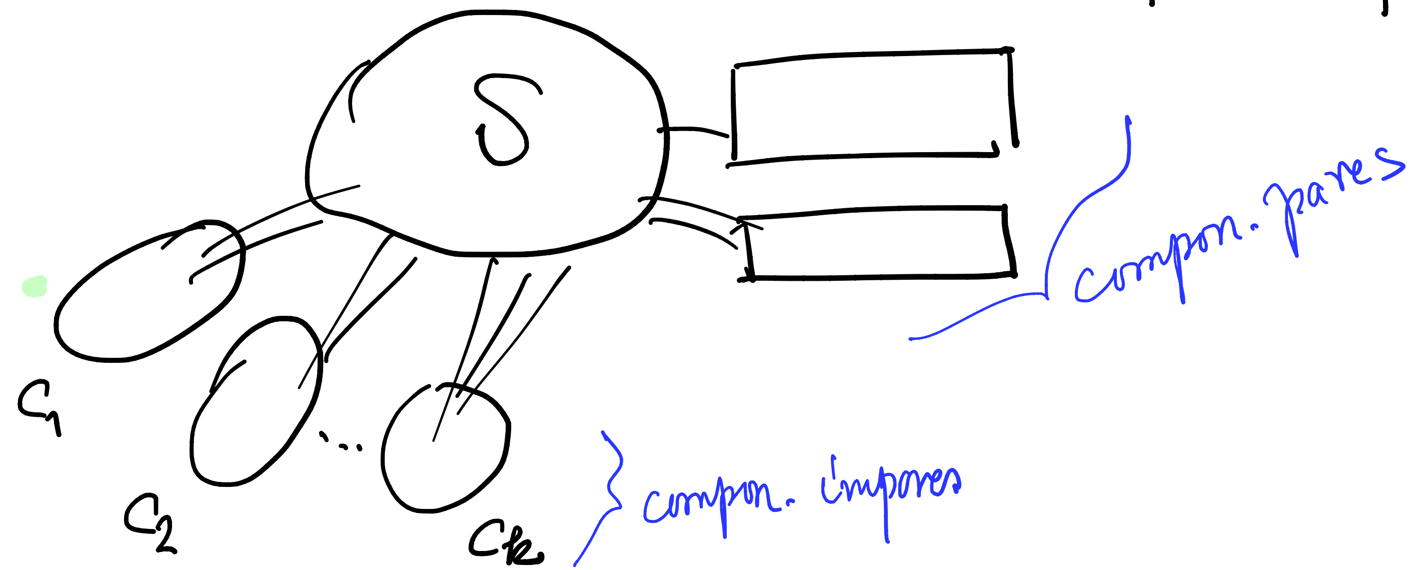
Teo. de Petersen

$\left.\begin{array}{l} G \text{ é 3-regular} \\ \text{sem pontes} \end{array}\right\} \Longrightarrow G$ tem um empar. perfeito

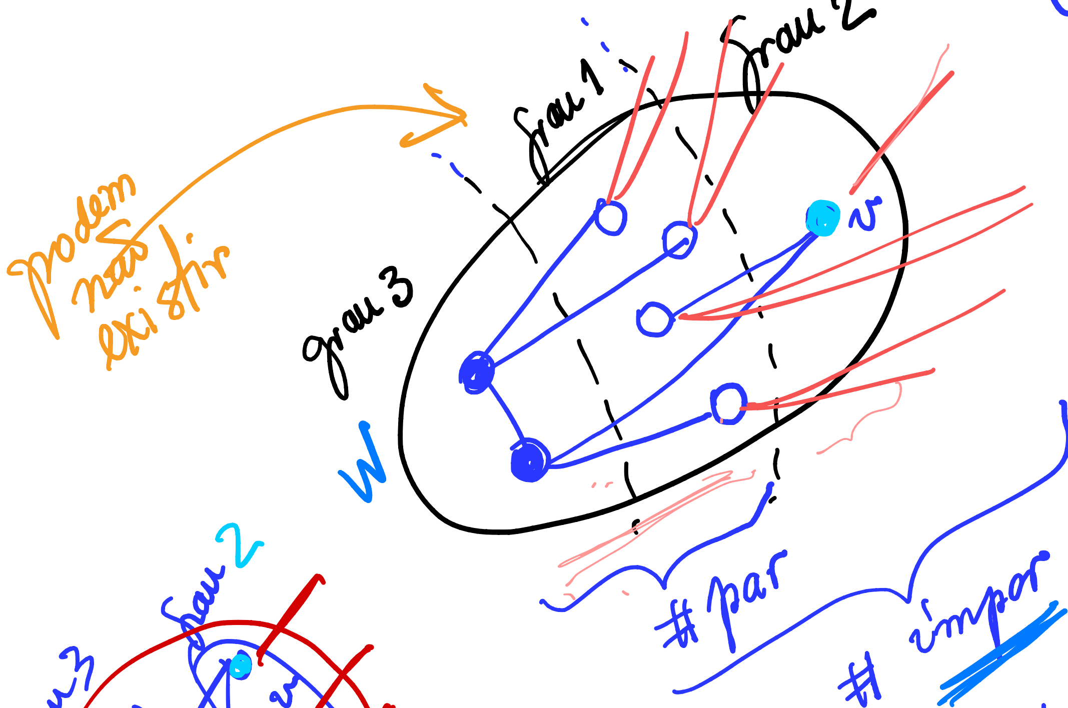
Prova. Vamos provar que G satisfaz a condição do Teo. de Tutte (condição sufic. p/ G ter um emp. perf.):

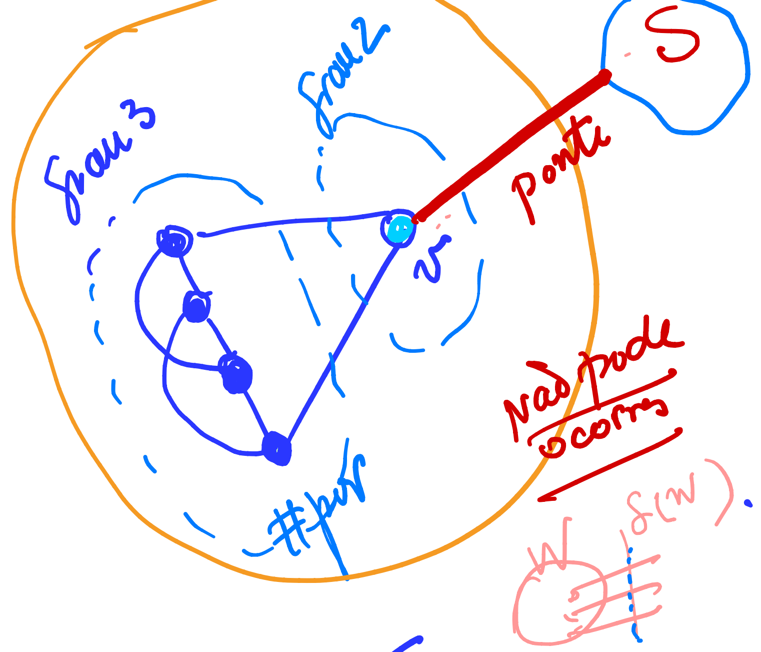
$$c_i(G-S) \leq |S| \qquad \forall\ S \subseteq V(G).$$

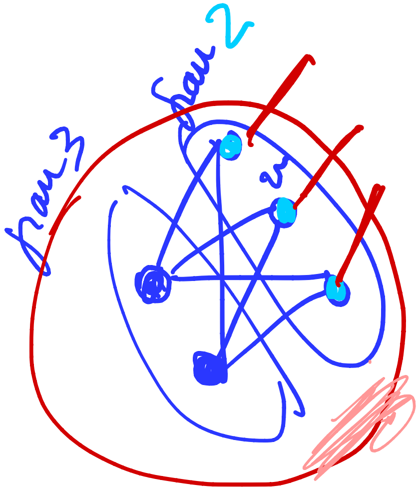
Seja $S \subseteq V(G)$; e sejam $C_1, C_2, \ldots, C_k$ compon. ímpares de $G-S$.



Seja W um dos compon. ímpares $(W \equiv C_i)$







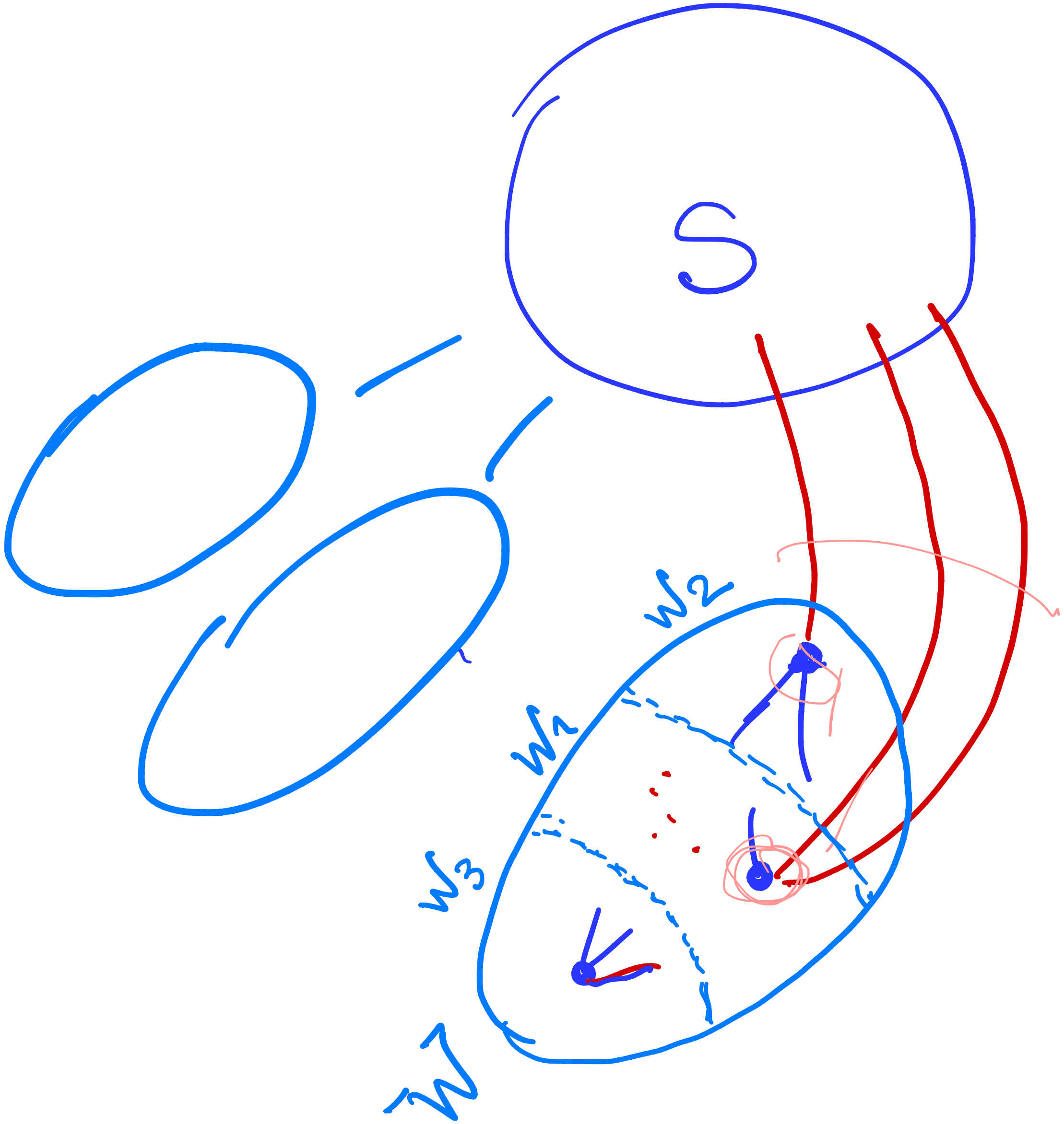
$\Rightarrow$ W tem # ímpar de vértices de grau 2.

Notação: $\delta(W) =$ conj^{to} das arestas com um extremo em W e outro em $\overline{W}$

Seja $W_i = \{ v \in W : g_W(v) = i \}$ $\quad i = 1, 2, 3.$

Como $|W_1| + |W_2| + |W_3|$ é ímpar,

e $|W_1| + |W_3|$ é par, segue que $|W_2|$ é ímpar.



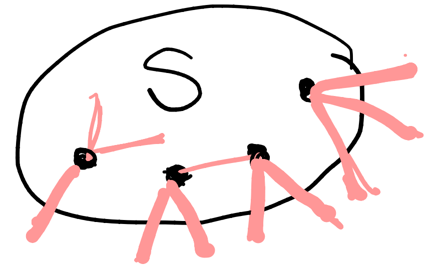
- Se $W_1 = \emptyset$ então $|W_2| \geq 3$. De fato, se $|W_2| = 1$ então $|\delta(W)| = 1$. Neste caso, a única aresta de $\delta(W)$ é uma ponte, contra a hipótese. Logo, $|W_2| \geq 3$. Neste caso, $|\delta(W)| \geq 3$.

- Se $W_1 \neq \emptyset$, como $|W_2| \geq 1$, então $|\delta(W)| \geq 3$.

Como as arestas de $\delta(W)$ têm um extremo em W e outro em S; cada compon. W contribui com pelo menos 3 arestas em $\delta(S)$.

Logo, $|\delta(S)| \geq 3k$, (A) onde k é o # compon. ímpares.

Como $g_G(v) = 3$ $\forall v \in S$, o nº de arestas com um extremo em S e outro em $\overline{S}$ é no máx. $3|S|$,



ou seja, $|\delta(S)| \leq 3|S|$. (B)

De (A) e (B) concluímos que $3k \leq |\delta(S)| \leq 3|S|$, ie,

$$k \leq |S|.$$

Com isso, temos que G satisfaz a hipót. do Teo. de Tutte, e portanto tem um empar. perfeito. ■

EXERCÍCIOS (em aula)

E1. Prove que se G é um grafo conexo simples, $|V(G)| = n$, n par, $g(v) > \frac{n}{2}$ $\forall v \in V(G)$, então G tem pelo menos 3 empar. perf. disjuntos.

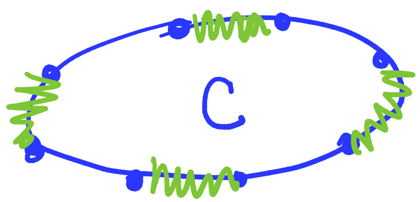
Dica.: $3 = 1 + 2$

E2. Prove que se G é um grafo conexo 3-regular, com uma ponte, então $\chi'(G) = 4$.

Soluções

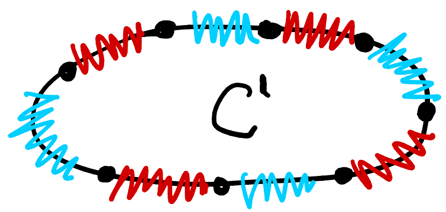
- Sol. E1. Como $g(v) > \frac{n}{2}$, pelo Teorema de Dirac temos que G tem um circuito hamiltoniano, digamos C. Seja E_1 um dos conjuntos das $n/2$ arestas que ocorrem alternadamente em C. Esse conjunto é um empar. perfeito. Considere

$G' = G - \mathcal{E}_1$. Então $g_{G'}(v) > \frac{n}{2} - 1$, ou seja, $g_{G'}(v) \geq \frac{n}{2}$, para todo $v \in V(G')$. Pelo Teorema de Dirac, G' tem um circuito hamiltoniano, digamos C'. Claramente, os dois conjuntos das $n/2$ arestas de C' que ocorrem alternadamente em C' são empar. perfeitos disjuntos de G'. Chame-os de $\mathcal{E}_2$ e $\mathcal{E}_3$. Então $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$ e $\mathcal{E}_3$ são 3 empar. perfeitos disjuntos em G.



circ. hamilt. em G

$\mathcal{E}_1$



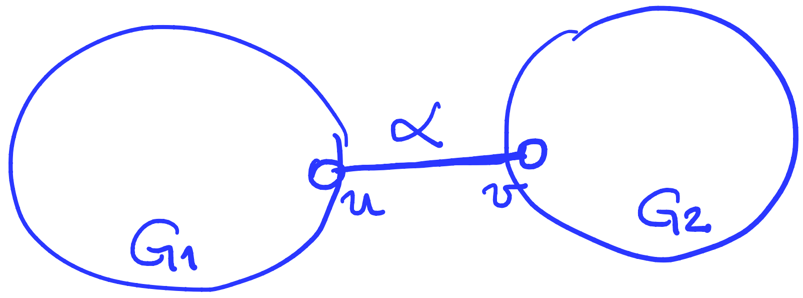
circ. hamilt. em $G' = G - \mathcal{E}_1$

$\mathcal{E}_2$ $\mathcal{E}_3$

Explicação da

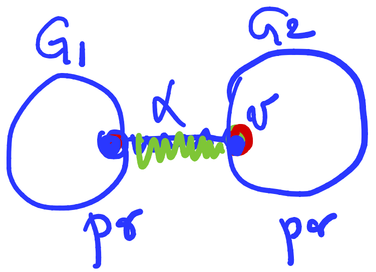
Dica: $3 = 1 + 2$ (significa encontrar 1 emp. perf, e depois encontrar 2 outros emp. perf.)

- **Sol. E2.** Seja $\alpha = uv$ uma ponte de G, e sejam G_1 e G_2 os componentes de $G-\alpha$.



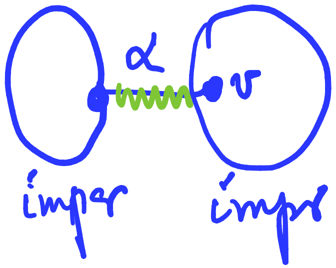
Como G é 3-regular, segue que G tem um nº par de vértices.
Então $|V(G_1)|$ e $|V(G_2)|$ têm a mesma paridade.
Suponha que $\chi'(G) = 3$. Então G tem 3 empar. perfeitos, digamos E_1, E_2, E_3.

Caso 1. $|V(G_1)|$ e $|V(G_2)|$ são ambos pares.



Suponha que $\alpha \in E_1$, e $v \in V(G_2)$.
Como v (em G_2) está coberto por α, então E_1 tem que ser um emp. perf. em $G_2 - v$. Mas isso é impossível, pois $G_2 - v$ tem um nº ímpar de vértices.

Caso 2. $|V(G_1)|$ e $|V(G_2)|$ são ambos ímpares.



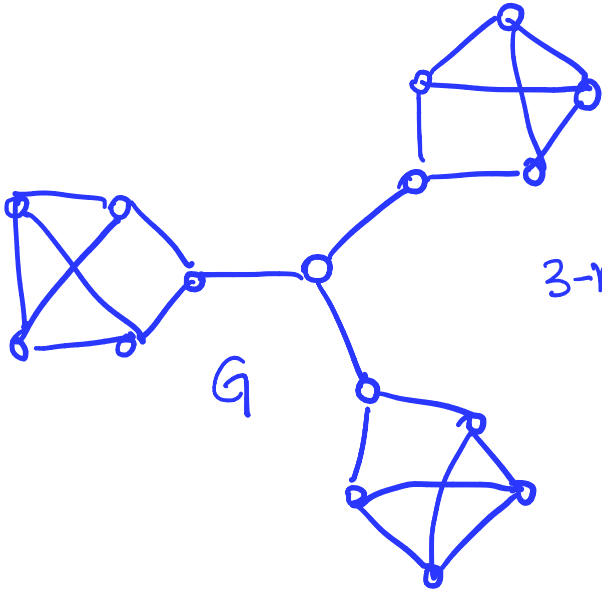
Suponha que $\alpha \in E_1$.
Os empar. E_2 e E_3 têm que ser empar. perfeitos em G_i $(i=1,2)$. Mas isto é impossível, pois G_i tem ordem ímpar.

Ao supor que $\chi'(G)=3$ chegamos a um absurdo em ambos os casos acima. Logo, $\chi'(G)=4$ (pois $\chi'(G)\leq 4$ pelo Teo. de Vizing).

Vimos:

- Ex. E2: G 3-reg, com ponte $\Rightarrow$ $\chi'(G)=4$.
- Teo. Petersen (Exerc): G 3-reg. sem ponte $\Rightarrow$ G tem emp. perf.

Cuidado: Neste caso, $G -$ emp.perf. é um 2-fator ← pode ou não ter 2 emp. perf.

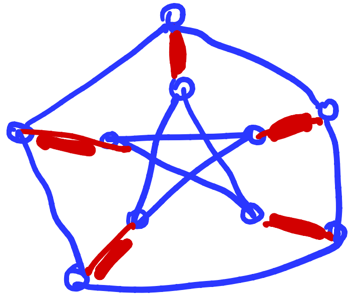


G

3-regular com ponte

$\chi'(G)=4$

Veja

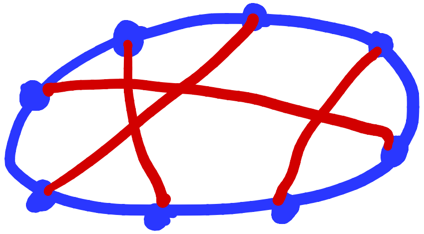


3-regular sem ponte

Grafo de Petersen

[Provamos que $\chi'(\text{Petersen}) = 4$]

H



3-regular sem ponte

$\chi'(H) = 3$

- **I. J. Holyer (1981)** provou que é NP-completo decidir se um grafo 3-regular tem índice cromático 3 ou 4.

- D. Leven & Z. Galil (1983) provaram p/ grafos k-regulares ($\forall k$ fixo): é NP-completo decidir se têm índice cromático k ou $k+1$.