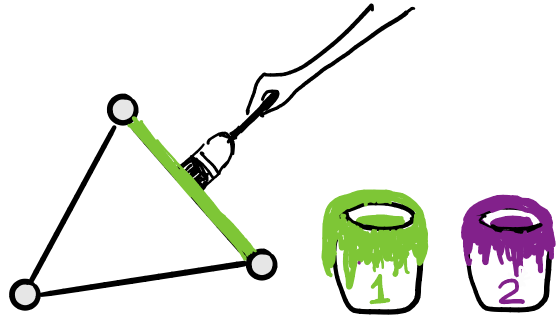
Capítulo 6

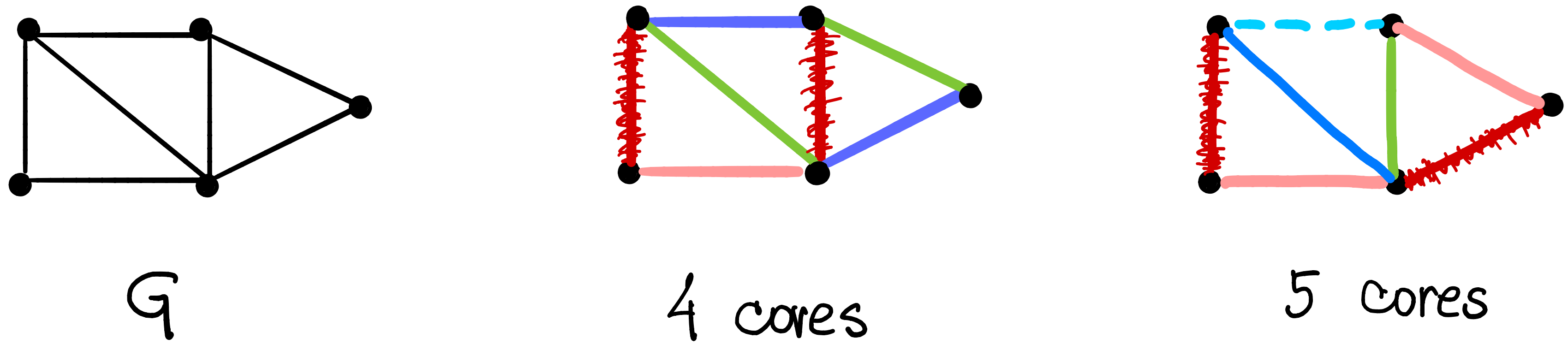
Coloração de arestas



1 Introdução

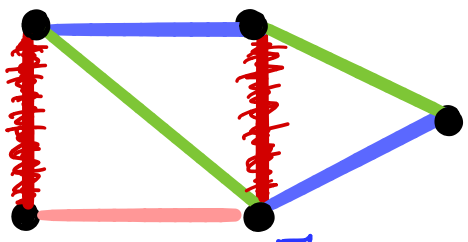
Neste capítulo só trataremos de grafos sem laços. Uma **coloração das arestas** de um grafo é uma **atribuição de cores às suas arestas tal que arestas adjacentes recebem cores diferentes**. Equivalentemente, podemos dizer que uma coloração das arestas de um grafo G é uma *partição de $A(G)$ em emparelhamentos*.

Ex:

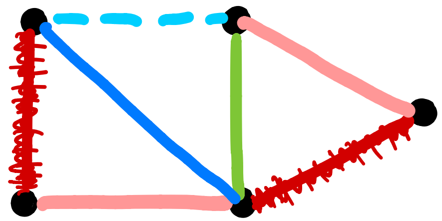


Se $E_1, \ldots, E_k$ são emparelhamentos que definem uma partição de $A(G)$, dizemos que cada emparelhamento E_i $(1 \leq i \leq n)$ é uma **cor**, e k é o **número de cores**. Neste caso, dizemos que G tem (ou admite) uma **k-aresta-coloração** $\mathcal{C} = \{E_1, \ldots, E_k\}$. ou G é **k-aresta-colorível**. Possivelmente algum emparelhamento E_i pode ser vazio; assim, quando dizemos que G tem uma **k-aresta-coloração**, isto quer dizer que podemos colorir as arestas de G com <u>no máximo</u> k cores.

Ex:



4-<u>aresta</u>-colorações



5-aresta-colorações

(6-aresta-colorações)

(7-aresta-colorações) ...

OBS: Quando um grafo G admite uma k-aresta-coloração, também dizemos que G é **k-aresta-colorível**.

2 Colorações mínimas e índice cromático

Encontrar uma coloração das arestas de um grafo é muito fácil (basta colorir cada aresta com uma cor diferente). Temos interesse em usar poucas cores. Uma coloração de arestas de um grafo é **mínima** (ou ótima) se o número de cores usadas por essa coloração é o menor possível.

PROBLEMA DE INTERESSE: Obter uma aresta-coloração mínima de um grafo.

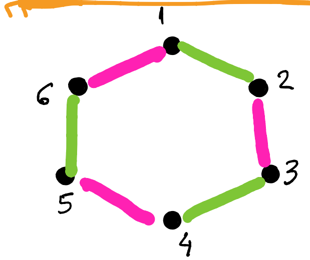
O problema acima é difícil! (É NP-difícil.)

Fácil, se G é bipartido!

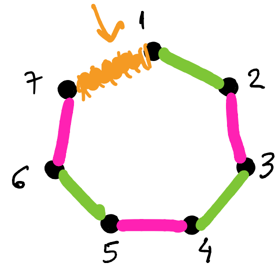
O **índice cromático** de G, denotado por $\chi'(G)$, é o **menor k tal que G é k-aresta-colorível**. Se $\chi'(G) = k$, então dizemos que G é **k-aresta-cromático**.

- **Índice cromático dos circuitos**

$$\chi'(C_n) = \begin{cases} 2 & \text{se } n \text{ é par,} \\ 3 & \text{se } n \text{ é ímpar.} \end{cases}$$



C_6

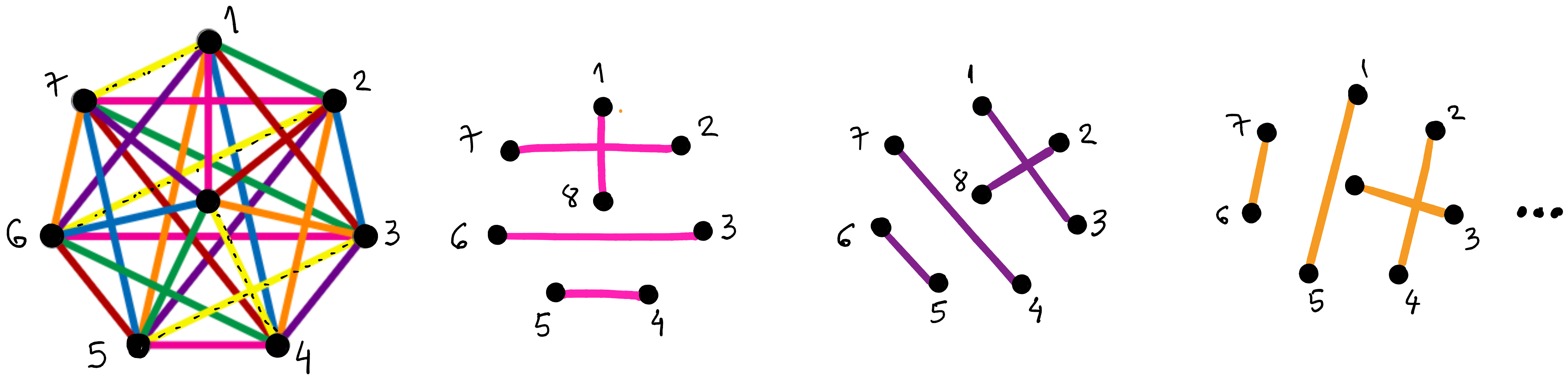


C_7

Índice cromático dos grafos completos

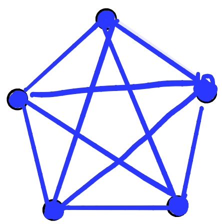
$$\chi'(K_n) = \begin{cases} n-1 & \text{se } n \text{ é par,}\\ n & \text{se } n \text{ é ímpar.}\end{cases}$$

(a) K_n, n par. (Exemplo de uma 7-aresta-coloração do K_8.)



(b) K_n, n ímpar

Vamos analisar o K_5.



$$\left.\begin{array}{l} |A(K_5)| = 10 \\ E \text{ empar.} \Rightarrow |E| \leq 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Precisamos mais do que 4 empar. p/ colorir } A(K_5)$$

$$\chi'(K_5) \geq 5$$

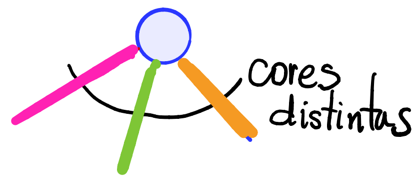
Veremos adiante que $\chi'(G) \leq \Delta(G)+1$.

Com isso, teremos $\chi'(K_n) = n$

- A ideia feita p/ K_5 pode ser feita p/ K_n, n ímpar $\Rightarrow$ $\chi'(K_n) \geq n$ se n ímpar

3 Delimitação inferior

Uma delimitação inferior imediata do índice cromático é a seguinte.



Delimitação 6.1. Em todo grafo G tem-se que $\chi'(G) \geq \Delta(G)$.

A desigualdade acima é imediata, pois em cada vértice v de G, as arestas que incidem em v têm que receber cores distintas. Logo, $\chi'(G) \geq \Delta(G)$. Assim, se uma coloração das arestas de G usa $\Delta(G)$ cores, então ela é mínima.

Veremos a seguir que todo grafo bipartido G admite uma $\Delta(G)$-aresta-coloração. (E que qualquer grafo G admite uma $(\Delta(G) + 1)$-aresta coloração.)

PERGUNTA:

arbitrário

Como convencer alguém de que um certo grafo G requer mais do que $\Delta(G)$ cores? Existe algum certificado (objeto/estrutura do grafo com alguma propriedade) fácil de ser testado?

Resposta: Não.

(Pode existir argumentos simples para grafos específico.

Veremos isso no caso do grafo de Petersen.

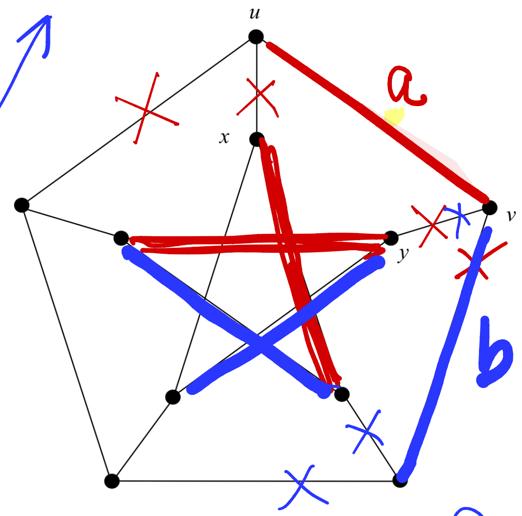
$G \equiv$ Petersen graph

Prova de que $\chi'(G)=4$

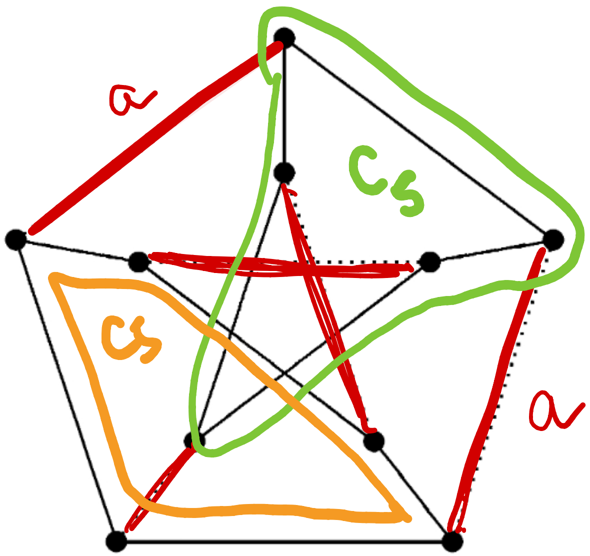
$A(G) = C_e \cup C_i \cup R$

arestas do circuito externo

arestas do circuito interno



Argumento 1. Se $\chi'(G)=3$, cada uma das 3 cores tem que ocorrer 2 vezes no circuito interno. (Ao atribuir a cor $\underline{a}$ a uma aresta do circ. externo, essa cor é forçada a aparecer 2 vezes no circ. interno) Contradição, pois o circ. interno tem compri/o 5.



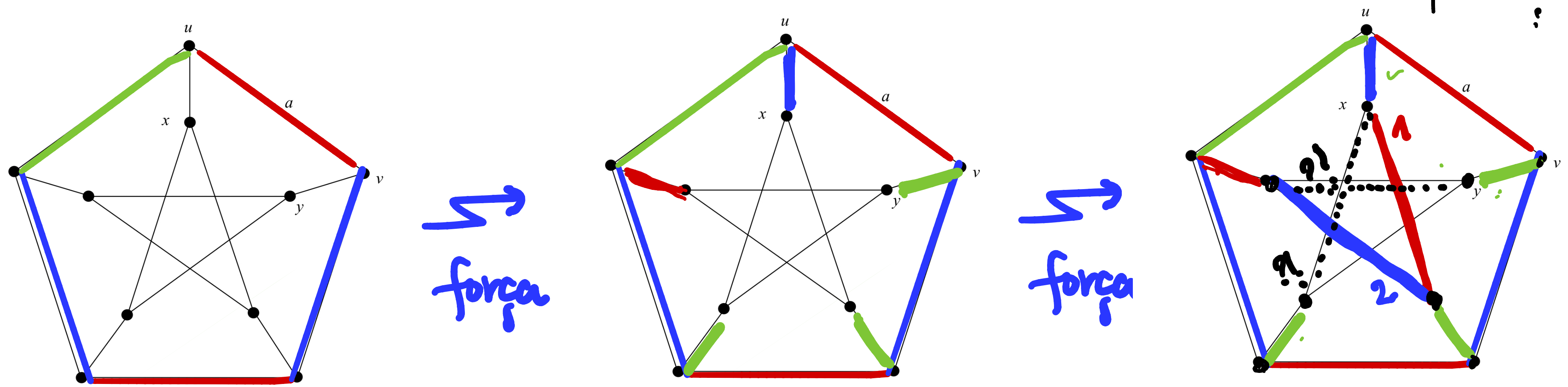
Argumento 2. $|A(G)| = 15$. Se $\chi'(G)=3$, então G tem que ter 3 empar. perf. disj.
Se E_1 é um emp. perf., E_1 tem que ter 2 arestas do circ. externo. Então 2 arestas do circ. interno e uma de R (raio) pertencem a E_1 (veja figura). Neste caso, $G - E_1$ é um 2-fator que consiste de dois C_5's, que clara/e não contém 2 emp. perf.

Argumento 3.

$A(G) = C_e \cup C_i \cup R$ (disjuntos)

Se $\chi'(G) = 3$, C_e requer 3 cores:
uma delas ocorre 1 vez,
duas " ocorrem 2 vezes

Não dá p/ completar!



Argumento 4.

Se $\chi'(G) = 3$ então G tem 3 emp. perf.

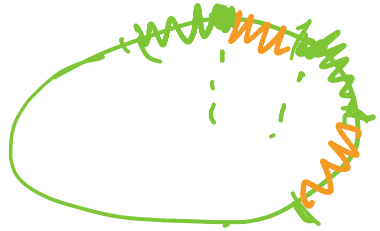
Seja E_1 um emp. perf. Então $G - E_1$ é um 2-fator F

Como G ñ é hamilt, $G \not\cong C_3$ e $G \not\cong C_4$, então $G \cong C_5 \cup C_5$. Neste caso, F ñ tem 2 emp. perf. disj.

OBS: $G \cong$ grafo de Petersen

G grafo de Petersen

$$\chi'(G) = 4 \iff G \text{ não é hamiltoniano}$$



($\Rightarrow$) Suponha que G tenha um circuito hamiltoniano C. Neste caso, as arestas de C podem ser coloridas com duas cores, digamos $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$. Neste caso, $G - A(C)$ é um empar. perf. que pode receber uma cor $\mathcal{C}_3$. Mas então $\chi'(G) = 3$.

($\Leftarrow$) (Veja o Argumento 4)

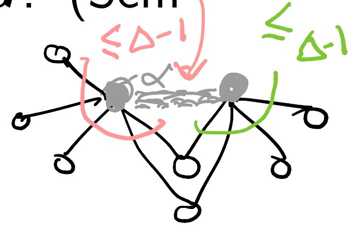
n deve ser par

$$|A(G)| = \frac{3n}{2}$$

EXERCÍCIO: Seja G um grafo 3-regular. Se $\chi'(G) = 4$ então G não é hamiltoniano.

EXERCÍCIO E6.1. Mostre que $\chi'(G) \leq 2\Delta(G) - 1$ para todo grafo G. (Sem usar o Teorema 6.2.)

Tem cor $\neq$ p/ atribuir a α



EXERCÍCIO E6.2. Exiba um grafo com duas colorações mínimas distintas.

EXERCÍCIO E6.3. Mostre que os emparelhamentos que compõem uma coloração mínima não são necessariamente máximos. Mais precisamente, exiba uma coloração mínima $\{E_1, \ldots, E_k\}$ em que nenhum dos emparelhamentos E_i é máximo.

EXERCÍCIO E6.4. Mostre que se G é o grafo de Petersen, então $\chi'(G) = 4$.

(Faça apenas se tiver uma prova diferente e tão simples q̃ as que vimos.)

EXERCÍCIO E6.5. Mostre que todo grafo bipartido k-regular admite uma k-aresta-coloração.

EXERCÍCIO E6.6. Exiba uma família de grafos G para os quais $\chi'(G) > \Delta(G)$.

EXERCÍCIO E6.7. Mostre que se G é um grafo k-regular com número ímpar de vértices, então $\chi'(G) > \Delta(G)$.

EXERCÍCIO E6.9. Prove que se G é um grafo 3-regular tal que $\chi'(G) = 4$, então G não é hamiltoniano.

4 Grafos bipartidos

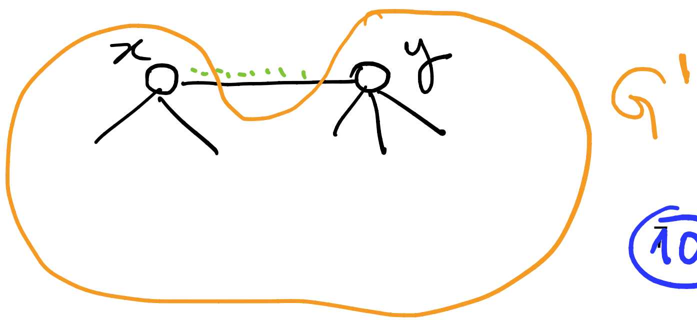
O índice cromático de grafos bipartidos tem uma delimitação superior que coincide com a delimitação inferior 6.1 mencionada anteriormente. Ou seja, tal resultado fornece precisamente o índice cromático de um grafo bipartido. Este resultado foi estabelecido por König em 1916.

$\boxed{\textbf{Teorema 6.2. (König, 1916)}\ \text{Se } G \text{ é um grafo bipartido então } \chi'(G) = \Delta(G).}$

Prova. (a) Claramente, $\chi'(G) \geq \Delta(G)$ (conforme a Delimitação 6.1). (b) Vamos provar que $\chi'(G) \leq \Delta(G)$, por por indução no número de arestas de G.

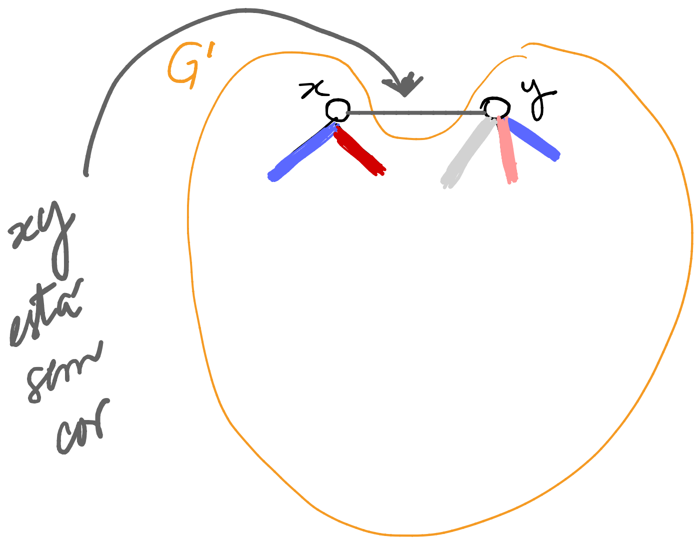
Se $|A(G)| = 1$, o resultado é imediato. Suponha então que $|A(G)| \geq 2$ e que $\Delta(G) = k$. Escolha arbitrariamente uma aresta xy de G, e considere o grafo $G' = G - xy$.

Como $\Delta(G') \leq \Delta(G) = k$, pela hipótese de indução segue que G' tem uma k-aresta-coloração $\mathcal{C} = \{E_1, E_2, \ldots, E_k\}$. Vamos mostrar que é possível obter uma k-aresta-coloração para G, atribuindo-se uma das cores em $\mathcal{C}$ à aresta xy (eventualmente após uma recoloração das arestas de G').



Como $g_{G'}(x) < k$, então existe uma cor em $\mathcal{C}$, digamos E_i, que não incide em x.

(a) Se E_i *não incide em* y, então podemos dar a cor E_i à aresta xy, e manter as demais cores definidas por $\mathcal{C}$, obtendo dessa forma uma k-aresta-coloração de G. (Ou seja, só trocamos E_i por $E_i \cup \{xy\}$.)



$$C = \{E_1, \ldots, E_i, \ldots, E_k\}$$

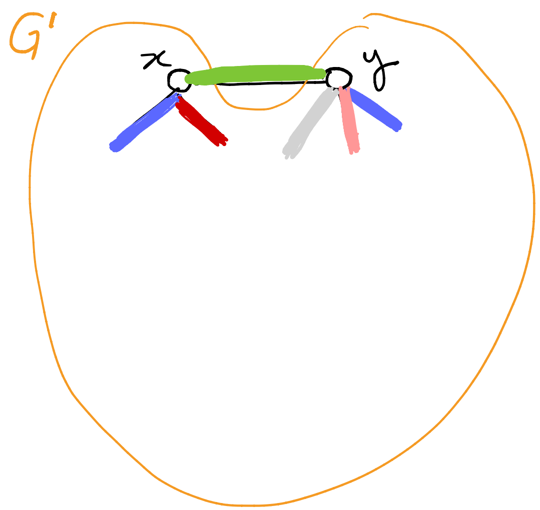
E_i: Não incide em x,
'' '' '' y.

$\Downarrow$

Atribuímos a cor E_i à aresta xy

$\Downarrow$

Obtemos uma k-aresta-color. de G.



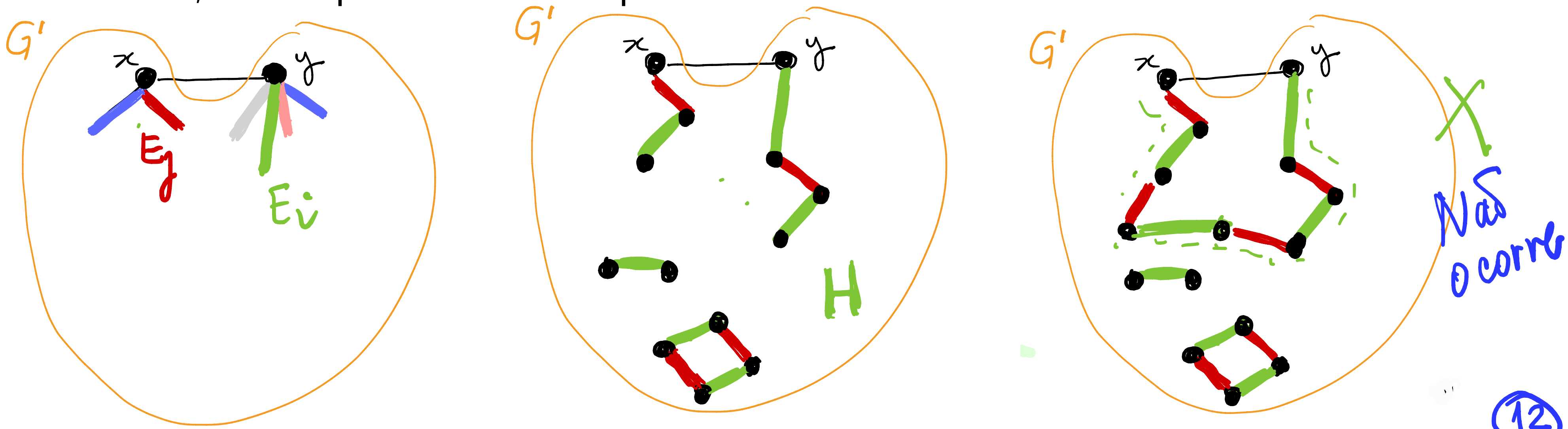
(b) Suponha então que E_i *incide em* y. Como $g_{G'}(y) < k$, então pelo menos uma cor em $\mathcal{C}$, digamos E_j, não incide em y.

Seja $H := G[E_i \cup E_j]$ o subgrafo de G induzido pelas arestas de cores E_i ou E_j. (Os compon. de H são circuitos ou caminhos alternantes de cor E_i e E_j.)

Seja Y o componente de H que contém o vértice y.

Afirmamos que x não pertence a Y. De fato, se x pertencesse a Y, existiria em H um caminho de y a x, cuja aresta inicial pertenceria a E_i e cuja aresta final pertenceria a E_j (já que em x não incide uma aresta de E_i).

Neste caso, esse caminho teria comprimento par, e concatenando-o com a aresta xy teríamos um circuito ímpar em G, uma contradição (já que G é bipartido). Portanto, x não pertence ao componente Y.



Como x não pertence a Y, podemos obter uma k-coloração de G da seguinte forma:

(i) Consideramos $\mathcal{C}$ e permutamos as cores E_i e E_j no componente Y;

(ii) atribuímos a cor E_i à aresta xy.

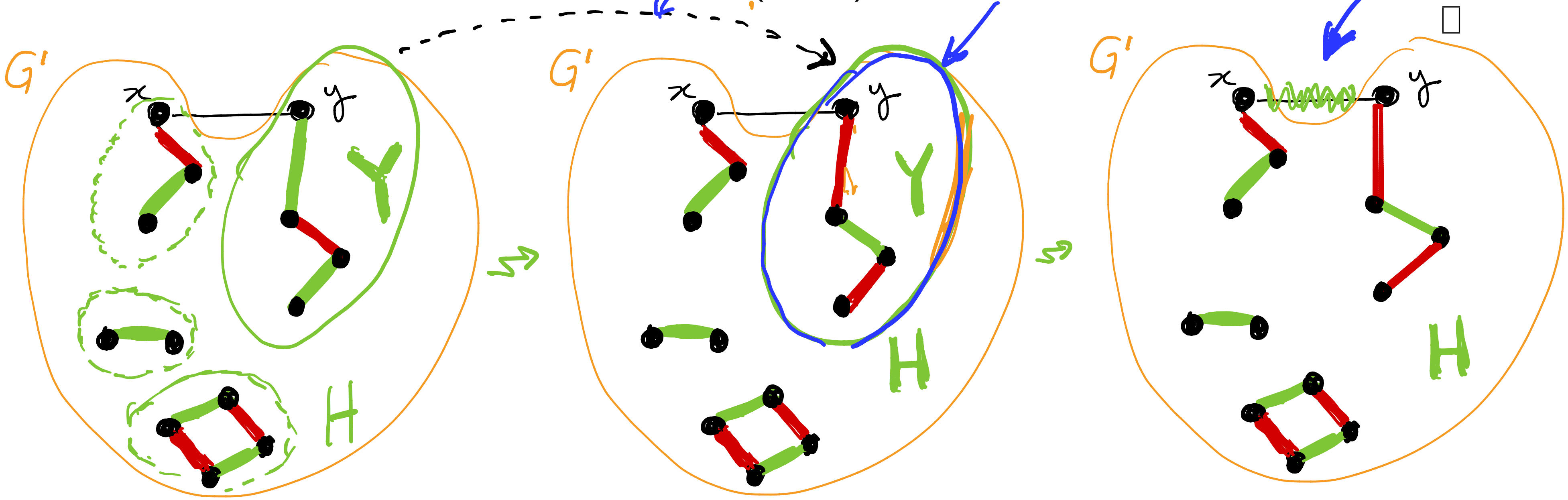
Mais formalmente, definimos

$$E_i := (E_i \triangle A(Y)) \cup \{xy\} \text{ e}$$
$$E_j := E_j \triangle A(Y),$$

Permutamos as cores E_i e E_j no compon. Y

Agora podemos atribuir a cor E_i (verde) p/ aresta xy

e mantemos os demais emparelhamentos (cores) inalterados.



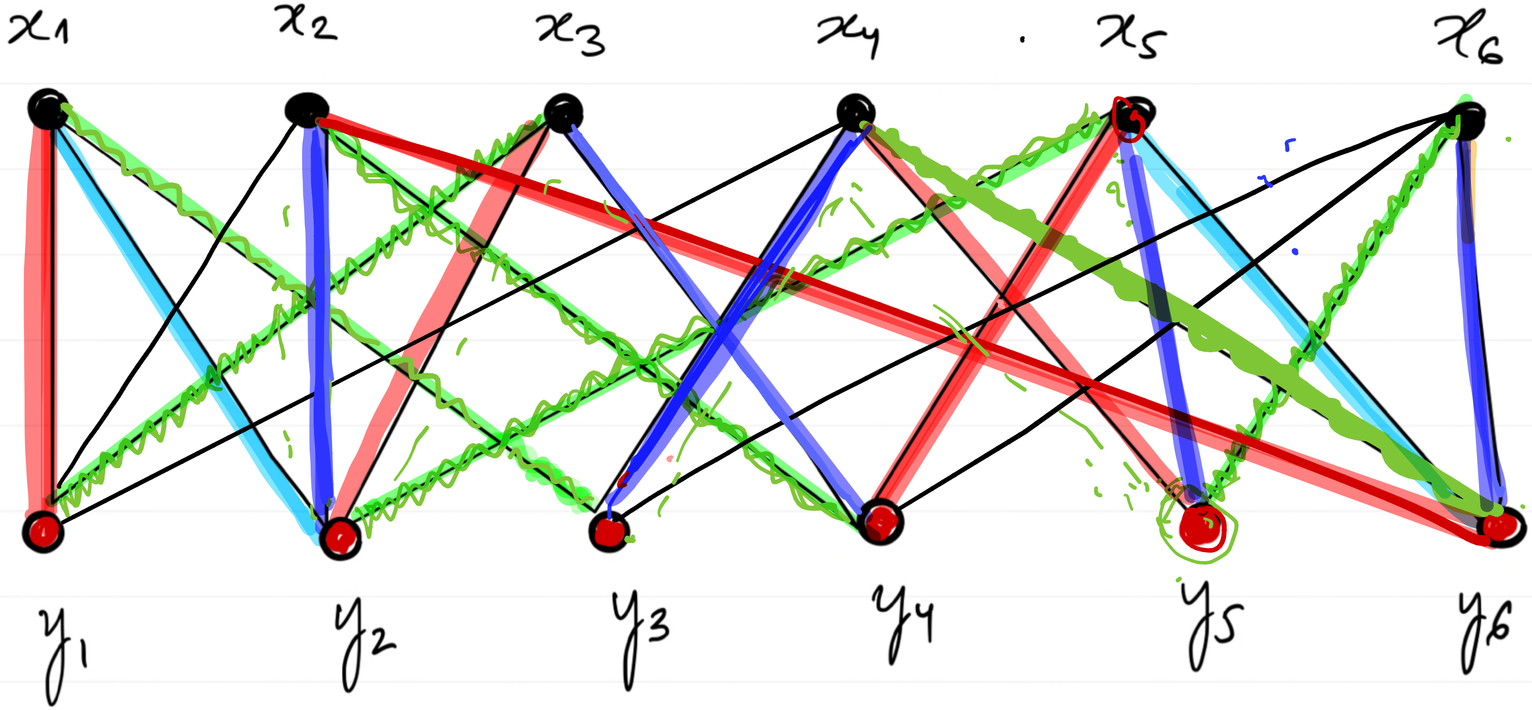
OBSERVAÇÃO: A prova indutiva que fizemos nos fornece um algoritmo polinomial para encontrar uma coloração mínima de um grafo bipartido.

É possível fazer uma segunda prova do teorema de König usando o resultado proposto como EXERCÍCIO EXTRA no final do Capítulo 5:

"Um grafo bipartido tem um emparelhamento que cobre todos os vértices de grau máximo."

Essa prova seria mais de interesse teórico, pois nesse exercício extra o grafo G' construído, que contém G, pode ser muito grande.

$\Delta(G) = 4$ $\quad$ G bipartido



EXERCÍCIO p/ CASA : colorir as arestas sem cor cf. as idéias da prova do Teo 6.2 e obter uma 4-aresta-coloração.

ALGORITMO 1.

Entrada : Grafo bipartido G

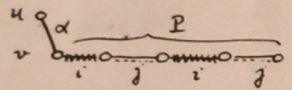
Saída : uma partição de $A(G)$ em um nº mínimo de emparelhamentos.
(= uma coloração própria das arestas de G usando o menor nº possível de cores.)

— Seja $k = \max\{g(v) : v \in V(G)\}$
sejam $E_1, \dots, E_k$ emparelhamentos disjuntos de G (alguns ou possivelmente todos os E_i podem ser vazios).
(* Cada E_i corresp. às arestas com a cor i *)

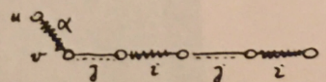
— Enquanto $E_1 \cup \dots \cup E_k \neq A(G)$

faça

- Seja $\alpha = uv$, $\alpha \in A(G) \setminus (E_1 \cup \dots \cup E_k)$; (* Seja $\alpha = uv$ uma aresta não colorida *)
- Escolha i tal que E_i não cobre u; (* Seja i uma cor que não está repres. em u *)
- Escolha j tal que E_j não cobre v; (* Seja j uma cor que não está repres. em v *)
- Seja P o caminho mais longo dentre os que começam em v e só contém arestas de $E_i \cup E_j$.
(* P é formado de arestas alternadamente de cor i e cor j, devendo começar com a cor i caso tenha comprimento não nulo *)



- $E_i := (E_i \setminus A(P)) \cup (E_j \cap A(P)) \cup \{\alpha\}$
$E_j := (E_j \setminus A(P)) \cup (E_i \cap A(P))$



(* Permute as cores i e j no caminho P e atribua a cor i à aresta α *)

$$\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$$

$\forall$ grafo G

$$\left\{ \begin{array}{l} \chi'(G) = \Delta(G) \longrightarrow \text{classe 1 (bipart.)} \;?\\ \chi'(G) = \Delta(G)+1 \longrightarrow \text{classe 2} \;? \end{array} \right.$$

5 Grafos arbitrários

Teorema 6.3.(Vizing, 1964) Se G é um grafo simples, então $\chi'(G) \leq \Delta(G)+1$.

Prova. Por indução em $|A(G)|$. Se G tem uma aresta o resultado é imediato. Suponha então que $|A(G)| \geq 2$ e considere $\Delta = \Delta(G)$. Escolha arbitrariamente uma aresta α de G. Considere o grafo $G' = G - \alpha$. Como $\Delta(G') \leq \Delta$, pela hipótese de indução segue que G' tem uma $(\Delta + 1)$-aresta-coloração, digamos $\mathcal{C}$. Vamos mostrar que é possível atribuir uma das cores em $\mathcal{C}$ à aresta α.

Suponha que $\alpha = u\,v_1$. Como $g_{G'}(u) < \Delta + 1$ e $g_{G'}(v_1) < \Delta + 1$, existem cores em $\mathcal{C}$, digamos E_u e E_1 tais que

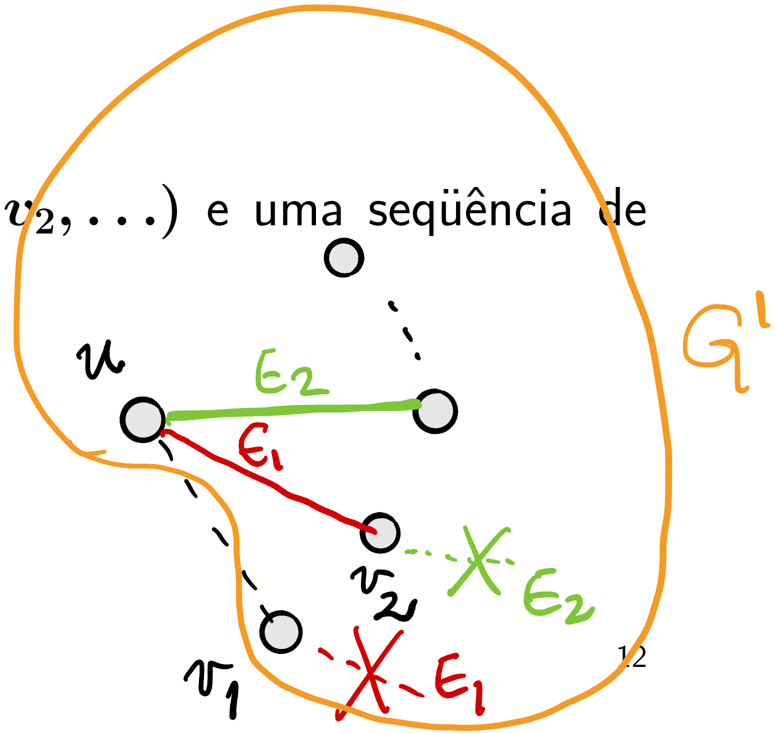
$$E_u \text{ não incide em } u \text{ e}$$

$$E_1 \text{ não incide em } v_1.$$

Vamos construir uma seqüência de arestas $(u\,v_1, u\,v_2, \ldots)$ e uma seqüência de cores $(E_1, E_2, \ldots)$ tais que

$$E_i \text{ não incide em } v_i \text{ e}$$

$$u\,v_{i+1} \text{ tem a cor } E_i.$$



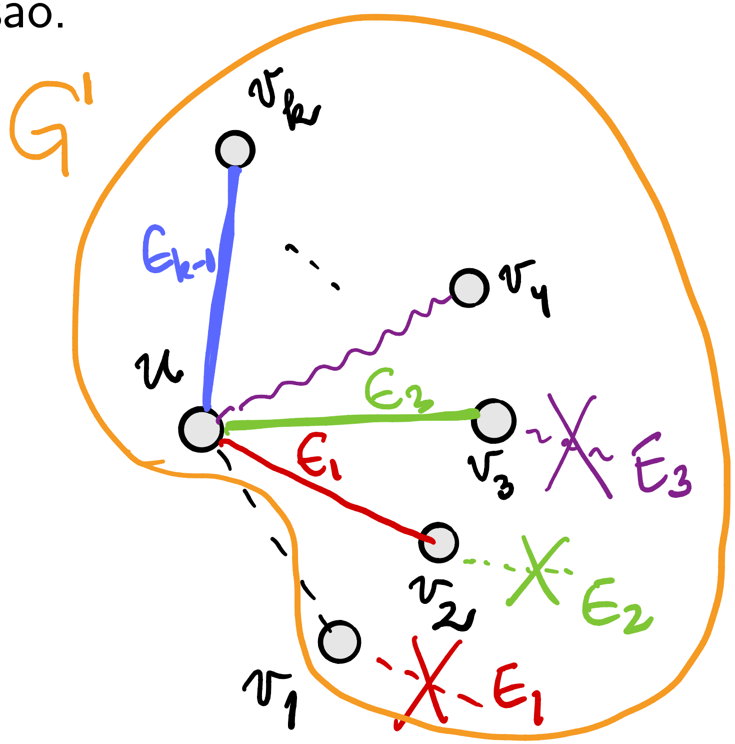
Suponha que temos as seqüências $(u\,v_1, u\,v_2, \ldots, u\,v_i)$ e $(E_1, E_2, \ldots, E_i)$. Se existir aresta uv de cor E_i tal que $v \notin \{v_2, \ldots, v_i\}$, chamamos de v_{i+1} o vértice v e tomamos uma cor E_{i+1} que não incide em v_{i+1}. Estendemos desta forma as duas seqüências, e repetimos este processo enquanto for possível.

Como $g(u)$ é finito, tal extensão não vai ser sempre possível. Suponha então que, tendo construído as seqüências

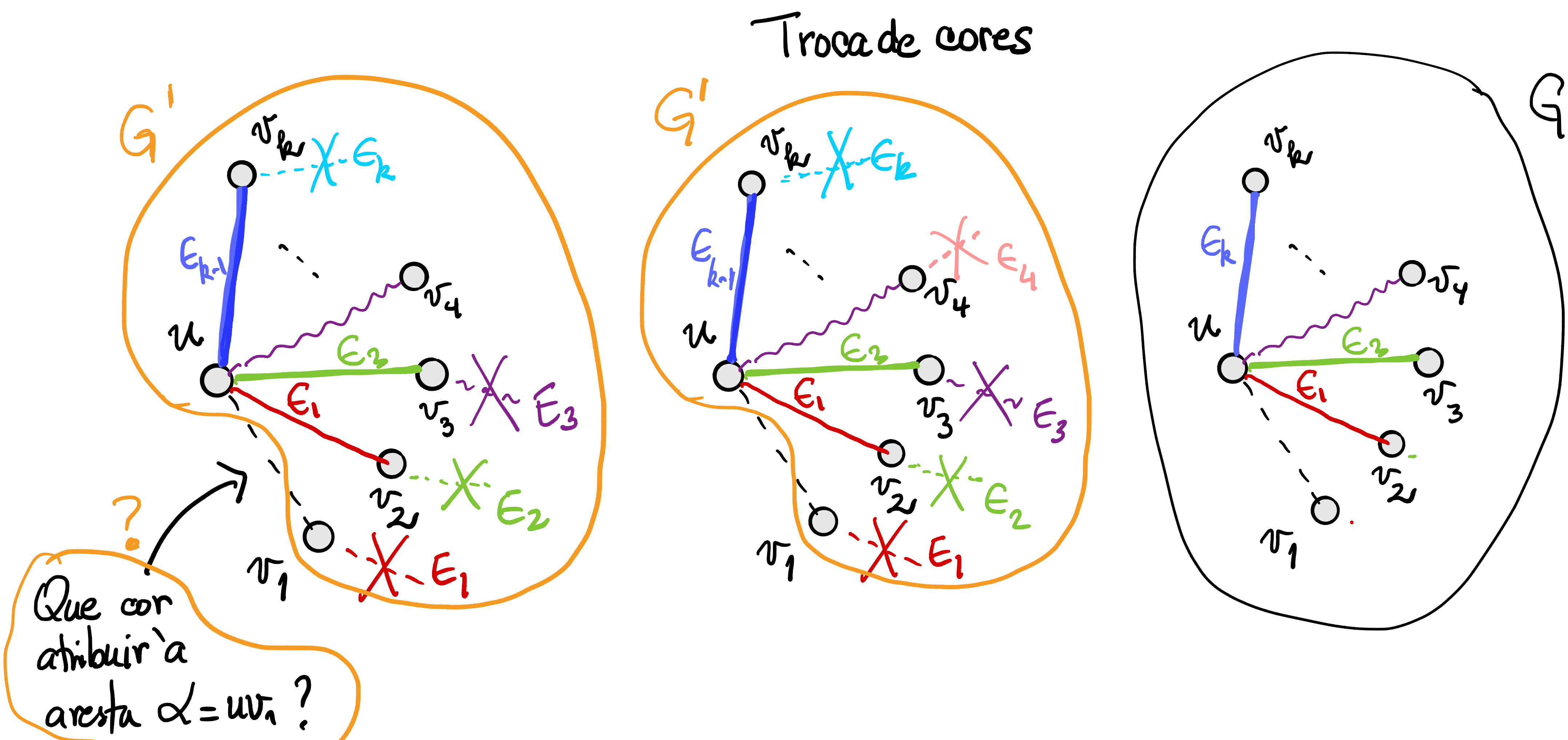
$$(u\,v_1, u\,v_2, \ldots, u\,v_k) \text{ e}$$

$$(E_1, E_2, \ldots, E_k),$$

não pudemos mais estender a seqüência das arestas. Vejamos as razões que impediram tal extensão.



(a) <u>Não existe aresta uv com a cor E_k.</u>



Neste caso, podemos recolorir as arestas $u\,v_i$, $1 < i \leq k$, atribuindo à aresta $u\,v_i$ a cor E_i. Atribuímos à aresta $u\,v_1$ a cor E_1. (As demais arestas continuam com as cores que tinham.)

(b) Existe aresta $u\,v$ com a cor E_k, mas $v = v_j$ para algum $j < k$.

Neste caso, para começar, recolorimos as arestas uv_i, $1 < i < j$, dando a cor E_i a cada tal aresta uv_i; e atribuímos a cor E_1 à aresta uv_1. Deixamos a aresta uv_j temporariamente sem cor.

Seja H o subgrafo de G formado pelas arestas de cor E_u ou E_k (note que uv_j está sem cor). Cada um dos vértices u, v_j e v_k têm grau no máximo 1 em H, e portanto, não podem pertencer todos a um mesmo componente de H.

Então pelo menos um dos dois casos seguinte deve ocorrer.

(b1) Os vértices $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v_j}$ pertencem a componentes distinos de $\boldsymbol{H}$.

Neste caso, permutamos as cores $\boldsymbol{E_u}$ e $\boldsymbol{E_k}$ no componente que contém $\boldsymbol{v_j}$. Após esta recoloração, sabemos que a cor $\boldsymbol{E_u}$ não incide no vértice $\boldsymbol{v_j}$. Como $\boldsymbol{E_u}$ não incide em $\boldsymbol{u}$, então podemos colorir a aresta $\boldsymbol{uv_j}$ com a cor $\boldsymbol{E_k}$. As demais arestas permanecem com as cores inalteradas. Obtemos assim uma $(\boldsymbol{\Delta + 1})$-aresta-coloração de $\boldsymbol{G}$.

(b2) Os vértices $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v_k}$ pertencem a componentes distintos de $\boldsymbol{H}$.

Neste caso, continuamos a recoloração das arestas $\boldsymbol{uv_i}$, $\boldsymbol{j \leq i < k}$, dando a cor $\boldsymbol{E_i}$ a cada tal aresta $\boldsymbol{uv_i}$. Deixamos a aresta $\boldsymbol{uv_k}$ temporariamente sem cor. Como a recoloração não envolve as arestas de cor $\boldsymbol{E_u}$ ou $\boldsymbol{E_k}$, o subgrafo $\boldsymbol{H}$ não se altera.

Feito isso, permutamos as cores $\boldsymbol{E_u}$ e $\boldsymbol{E_k}$ no componente que contém $\boldsymbol{v_k}$. Após esta recoloração, temos que a cor $\boldsymbol{E_u}$ não incide em $\boldsymbol{v_k}$. Como $\boldsymbol{E_u}$ não incide em $\boldsymbol{u}$, podemos colorir a aresta $\boldsymbol{uv_k}$ com a cor $\boldsymbol{E_u}$, obtendo uma $\boldsymbol{(\Delta + 1)}$-aresta-coloração de $\boldsymbol{G}$.

Tendo concluído a análise dos casos (b1) e (b2), a prova do teorema está completa.

$\square$

OBS: Uma parte desse material baseia-se no texto "Uma introdução à Teoria dos Grafos" (organizado para a II Bienal da SBM de 2004 – veja a lista de referências).