Material extra - Cap. 5

(Mais sobre cobertura mínima em grafos bipartidos)

como encontrar

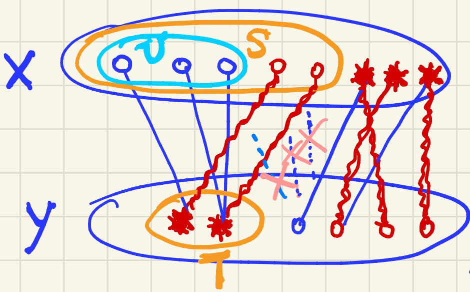
5/maio/20

Prova alternativa do Teorema min-max de König-Egerváry

$$\boxed{G \text{ bipartido} \Rightarrow \mathrm{Emp}(G) = \mathrm{cob}(G)}$$

Prova (Começa com emparelhamento máximo). [Suponha G conexo.]

Seja G um grafo (X,Y)-bipartido, e seja E^* um empar. máximo.



Seja $U = \{x \in X : x$ não é coberto por $E^*\}$.

Seja $Z = \{v \in X \cup Y : v$ é atingível a partir de U por um caminho E^*-alternante$\}$.

Sejam $S = U \cup (Z \cap X)$
$T = Z \cap Y$.

FATO 1: Todos os vértices de T são cobertos por E^*.

FATO 2: $\mathrm{Adj}(S) = T$.

FATO 3: $|T| = |S| - |U|$.

FATO 4: $K^* = (X \setminus S) \cup T$ é uma cobertura de G com $|K^*| = |E^*|$.

FATO 4 $\Rightarrow$ K^* é uma cobert. mínima. Logo, $\mathrm{Emp}(G) = \mathrm{cob}(G)$. ∎

Consequência da prova acima (p/ grafo bipartido)

(1) Mostra como encontrar uma cobertura mínima, a partir de um empar. máximo.

em tempo polinomial

(2) Se tivermos um empar. máximo E^*, podemos obter um certificado da maximalidade de E^* construindo (cf. prova) uma cobertura de mesma cardinalidade que $|E^*|$.

(3) Se um empar. E não é máximo, p/ convencer alguém disso, basta exibir um caminho E-altern. aumentador. (a prova acima mostra como fazer isso — encontramos um vértice em T que é livre de E)

(tempo polin.)

(Repetindo o processo de aumentação, obtém-se um empar. máximo.)

(4) O problema da cobertura mínima num grafo bipartido é FÁCIL (polinomial).

OBS

Para convencer alguém que uma cobertura K é mínima, o certificado é um empar. de mesma cardinalid. que $|K|$.