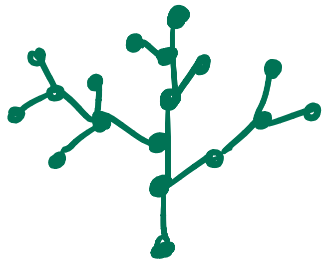
Capítulo 3
Árvores



Problema: Suponha que numa cidade haja n postos telefônicos. Para que seja sempre possível haver comunicação (não necessariamente direta) entre quaisquer desses postos, qual é o *número mínimo de linhas diretas* que deve existir?

Pergunta: Qual é o número mínimo de arestas que um grafo com n vértices deve ter para ser conexo?
Resposta: $n-1$

Vimos no Exercício 19 do Capítulo 1 que

Se um grafo conexo tem n vértices, então tem pelo menos $n-1$ arestas.

Vejamos uma prova desse fato.

Proposição 3.0. Se G é um grafo conexo com n vértices, então $A(G)| \geq n-1$.

Prova (na aula).

$$\left.\begin{array}{l} G \text{ grafo conexo} \\ |V(G)| = n \geq 1 \end{array}\right\} \Rightarrow |A(G)| \geq n-1$$

Prova 1 Por indução em n.

<u>Base da indução</u>: Quando $n=1$, claramente $|A(G)| \geq 0$, e portanto a afirmação é verdadeira

<u>Passo da indução</u>. Seja G um grafo conexo com $n \geq 2$ vértices. Vamos provar que a afirmação é verdadeira para G, supondo que ela é verdadeira

para grafos com até $n-1$ vértices.

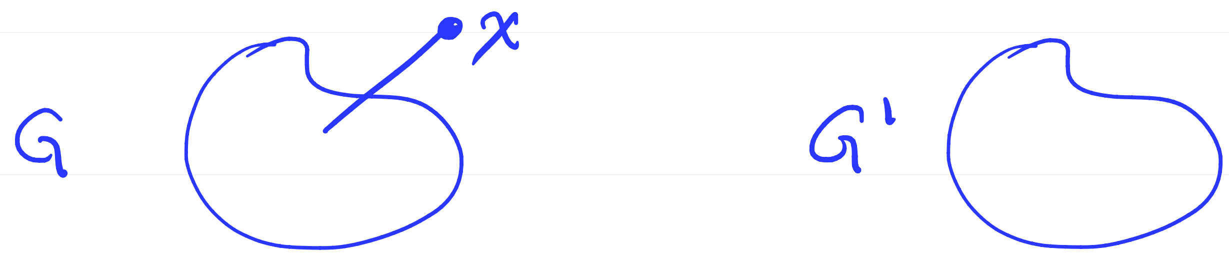
- Se $g(v) \geq 2$ para todo $v \in V(G)$, então

$$2|A(G)| \geq \sum_{v \in V(G)} g(v) \geq 2n.$$

Logo, $|A(G)| \geq n$ como queríamos provar.

- **Se não ocorre o caso anterior,** então existe pelo menos um vértice, digamos x, tal que $g(x) = 1$. (Como G é conexo, não existe vértice com grau zero.)

Considere o grafo $G' = G - x$.



Claramente, G' é conexo e $|V(G')| = n-1$.

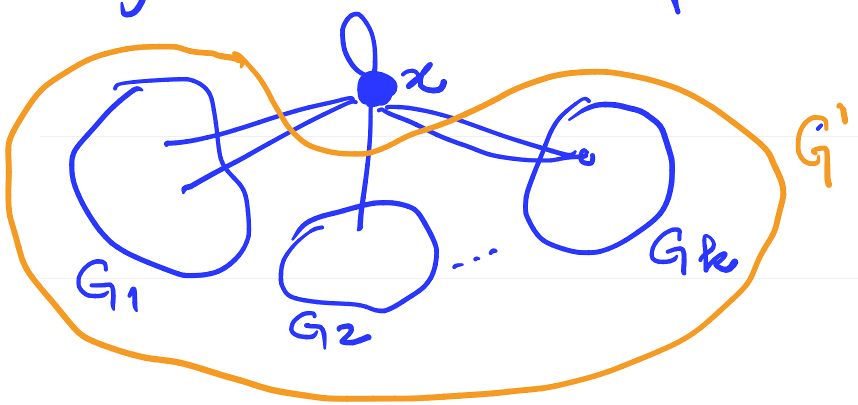
Logo, pela hipótese de indução, segue que $|A(G')| \geq n-2$; e portanto, $|A(G')| \geq n-1$.

Com isso, completamos a prova do Passo da indução. Pelo Princípio da indução finita, concluímos que a afirmação é verdadeira. $\square$

Prova 2. Por indução em n (removendo-se um vértice qquer).

Base da indução : ✓

Passo da indução . Seja G um grafo conexo com $n \geq 2$ vértices. Vamos provar que a afirmação seja verdadeira para G, supondo que ela é verdadeira p/ grafos com até $n-1$ vértices.



importante (veja adiante (*))

Tome um vértice qualquer x de G, e considere o grafo $G' = G - x$. Sejam $G_1, \ldots, G_k$, $k \geq 1$, os componentes de G', e seja $I(x)$ o nº de arestas incidentes ao vértice x. Claramente, $|I(x)| \geq k$.

Cada G_i $(1 \leq i \leq k)$ é conexo e tem no máx. n-1 arestas. (*)

Pela hipótese de indução,

$$|A(G_i)| \geq |V(G_i)| - 1 \quad \text{para } i = 1, \ldots, k.$$

Então,

$$|A(G)| = \sum_{i=1}^{k} |A(G_i)| + I(x)$$

$$\geq \sum_{i=1}^{k} |V(G_i)| - k + I(x) \geq n-1.$$

Com isso, concluímos a prova do passo da indução, e pelo Princípio da indução finita, temos que a afirmação é verdadeira. $\square$

4(b)

Prova 3. (Contraexemplo minimal)

Suponha que a afirmação seja falsa. Seja G um grafo que é um contraexemplo minimal. (G é conexo com $|A(G)| < |V(G)| - 1$, e é o menor possível c/ esta propried.)

- Se $g(v) \geq 2$ para todo $v \in V(G)$, então temos que $|A(G)| \geq n$. (Já vimos essa prova.)
- Então existe $x \in V(G)$ tal que $g(x) = 1$.

Considere o grafo $G' = G - x$. Claramente, G' é conexo e $|A(G')| < |V(G')| - 1$. Mas neste caso, G' contradiz a escolha de G (pois G' é menor que G).

Logo, não existe contraexemplo para a afirmação, e portanto ela é verdadeira. $\square$

Prova 4.

EXERCÍCIO: Por indução em $|A(G)|$.

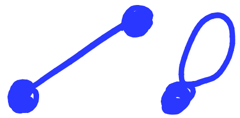
(Remover uma aresta α. Estudar os casos em que $c(G-\alpha)=1$ e $c(G-\alpha)=2$.)

Ou seja, conforme a Proposição 3.0, temos que $|A(G)| \geq n-1$ é **condição necessária** para que um grafo G com n vértices seja conexo.

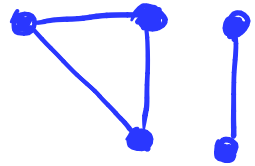
Pergunta 1: $|A(G)| \geq n-1$ é **condição suficiente** para garantir que um grafo G com n vértices seja conexo?

Resposta 1: Não! (Veja abaixo)

Justificativa:



3 vértices, 2 arestas



5 vértices, 4 arestas

Pergunta 2: Existem grafos conexos com n vértices e $n-1$ arestas, para todo $n \geq 1$?

Resposta 2: Sim. (Veja abaixo)

Justificativa: Grafos que são caminhos:

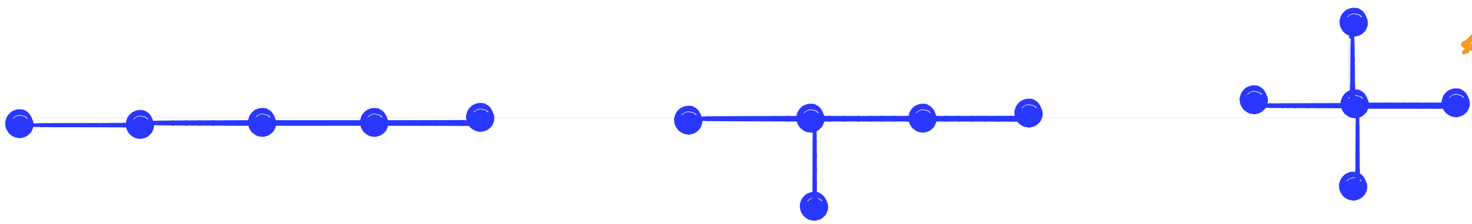
<u>EXERCÍCIO A.</u> Desenhe todos os grafos conexos (não-isomorfos) com n vértices e $n-1$ arestas para $n = 1, 2, \ldots, 6$.

$n=1$ $n=2$ $n=3$ $n=4$

estrela

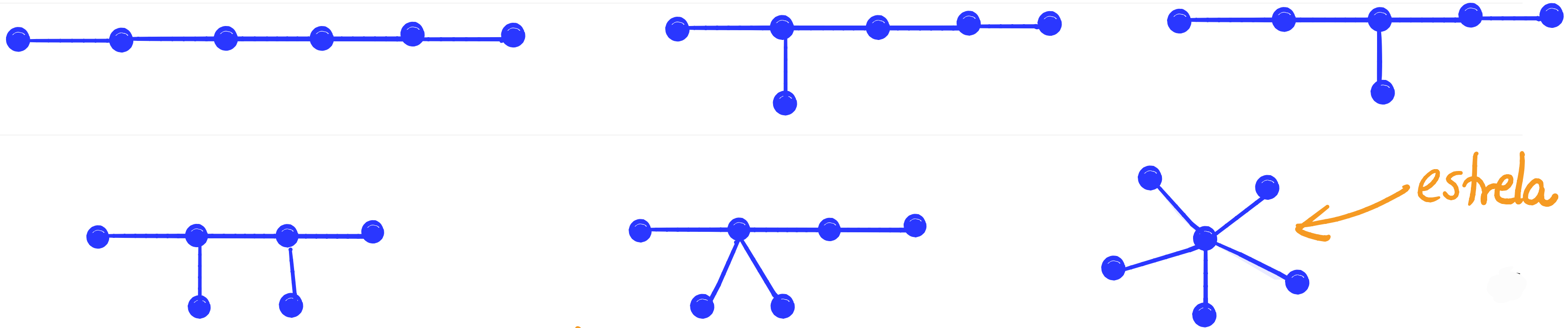
estrela

$n=5$



estrela

$n=6$



estrela

OBS: lagartas ('caterpillars') ⇝

Def. Dizemos que um grafo é **acíclico** se ele não contém circuitos.

OBS:: Os grafos desenhados no EXERCÍCIO A são todos acíclicos!

Pergunta 3: É verdade que se G é um grafo conexo com n vértices e $n-1$ arestas então G é acíclico?
Resposta 3: Sim.

Proposição 3.1. Se G é um grafo conexo com n vértices e exatamente $n-1$ arestas então G é acíclico.

Prova (na aula).

Prova 1. Por contradição.

Seja G um grafo conexo com n vértices e exatamente $n-1$ arestas. Suponha, por contradição, que G tenha um circuito, digamos C. Seja α uma aresta de C. Então $G' = G - \alpha$ é conexo. Como G' tem n vértices, pela Proposição 3.0, segue que G' tem pelo menos $n-1$ arestas. Mas então G tem pelo menos n arestas, uma contradição (à hipótese de que G tem exatamente $n-1$ arestas). $\square$

Prova 2. Por indução em n (removendo-se um vértice).

<u>Base da indução</u>: Quando $n=1$, então $|A(G)| = 0$,

e portanto, G é acíclico.

Passo da indução. Seja G um grafo conexo com $n \geq 2$ vértices e exatamente $n-1$ arestas. Suponhamos que a afirmação a ser provada seja verdadeira para grafos com até $n-1$ vértices.

Se $g(v) \geq 2$ para todo vértice v em G, temos que $|A(G)| \geq n$. (Isto segue da Proposição 1.1.) Como G não tem vértice de grau zero, concluímos que existe um vértice x tal que $g(x) = 1$.

Seja $G' = G - x$. Claramente, G é conexo e tem exatamente $n-1$ vértices e $n-2$ arestas. Pela hipótese de indução, G' é acíclico. Logo, G é acíclico. $\square$

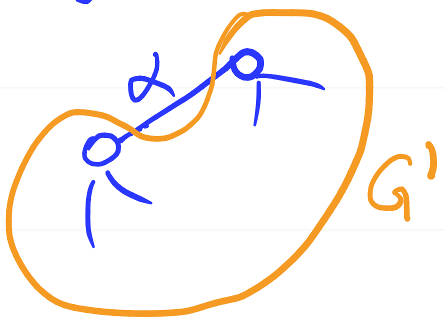
Prova 3 Prova por indução em n (removendo-se uma aresta).

<u>Base da indução</u>: ✓ (Já vimos na prova anterior.)

<u>Passo da indução</u>. Seja G um grafo conexo com

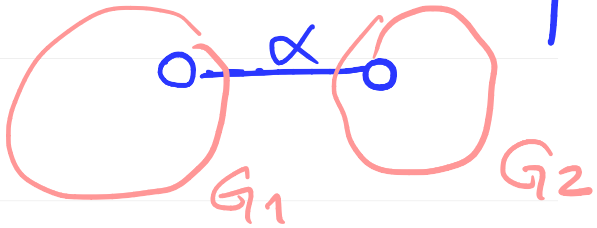
$n \geq 2$ vértices, e exatamente $n-1$ arestas. Vamos provar que a afirmação é verdadeira para G, supondo que ela é verdadeira para grafos com até $n-1$ vértices.

Seja α uma aresta de G. Considere $G' = G - \alpha$.



Se G' é conexo, então pela Prop. 3.0 temos que G' tem pelo menos $n-1$ arestas. Mas neste caso, G tem pelo menos n arestas, contrariando a hipótese (de que G tem exatamente $n-1$ arestas).

Então concluímos que α é uma ponte $\left(c(G') > c(G) \right)$ e G' tem exatamente 2 componentes, digamos G_1 e G_2.



Como G_i $(i=1,2)$ é conexo, pela Prop. 3.0, $|A(G_i)| \geq |V(G_i)| - 1$. Como $|A(G)| = n-1$, temos que $|A(G_i)| = |V(G_i)| - 1$ para $i = 1, 2$.

Pela hipótese de indução (já que G_i tem no max. $n-1$ arestas), temos que G_i é acíclico para $i=1,2$.

Portanto, G é acíclico. A conclusão segue pelo PIF. $\square$

Pergunta 4: Vale a recíproca da Proposição 3.1?
Resposta 4: Sim.

Proposição 3.2. Se G é um grafo conexo e acíclico com n vértices, então G tem exatamente $n-1$ arestas.

Prova (na aula).

Prova 1. (Contraexemplo minimal)

Suponha que a afirmação não seja verdadeira.
Seja G um contraexemplo minimal. (G é o menor grafo possível que é conexo, acíclico e com $|A(G)| \neq |V(G)| - 1$.)

Como G é conexo e acíclico, temos que G tem um vértice x de grau 1. (Já vimos que se $g(v) \geq 2$ então G tem um circuito.)

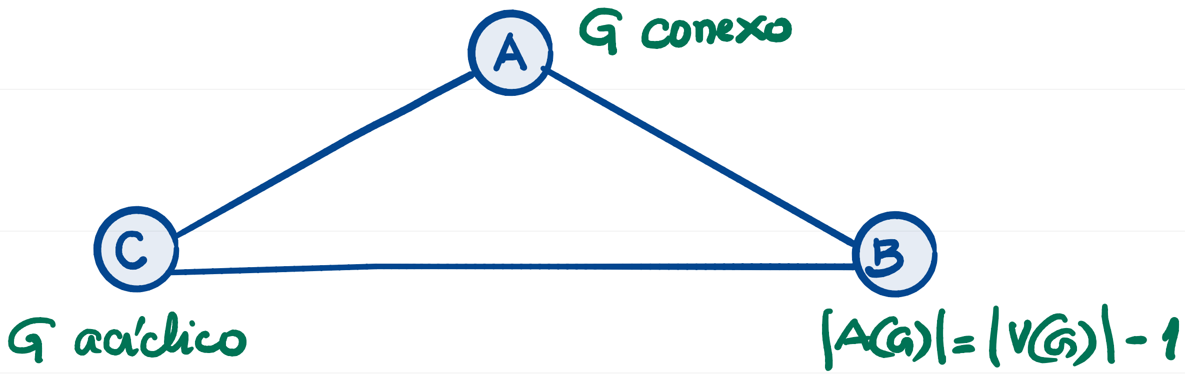
Considere $G' = G - x$. Claramente, G' é conexo, acíclico e $|A(G')| \neq |V(G')| - 1$. Neste caso, G' contraria a escolha de G.

Logo, não existe um contraexemplo minimal, e portanto a afirmação é verdadeira. $\square$

Prova 2. Por indução em n. (Exercício p/ casa)

Prova 3. Por indução em $|A(G)|$. (Exercício)

Resumo dos resultados vistos



Prop. 3.1. $A + B \Rightarrow C$

Prop. 3.2. $A + C \Rightarrow B$

EXERCÍCIO: $B + C \Rightarrow A$