# 3. Caracterizações de grafos planares (veremos uma)

Vimos que, $\begin{cases} K_5 \text{ não é planar} \\ K_{3,3} \text{ não é planar}. \end{cases}$

É fácil verificar que (EXERCÍCIO)

FATO: Qualquer subgrafo próprio de $K_5$ ou de $K_{3,3}$ é planar.

Também é fácil provar que

FATO: Se $G$ é não-planar então toda subdivisão de $G$ é não-planar.

FATO: Se $G$ é planar então todo subgrafo de $G$ é planar.

CONDIÇÃO NECESSÁRIA PARA UM GRAFO $G$ SER PLANAR:

$G$ não conter uma subdivisão de $K_5$ ou $K_{3,3}$.

Kazimierz KURATOWSKI (1930) provou que a condição acima é suficiente para $G$ ser planar.

TEOREMA 8.11 (Kuratowski, 1930)

Um grafo $G$ é planar sse $G$ não contém uma subdivisão de $K_5$ ou $K_{3,3}$.

Este resultado foi descoberto independentemente por Frink & Smith e Pontrjagin, e a versão do teorema restrita a grafos cúbicos foi descoberta independentemente por Menger (em 1930).
Veja o artigo do Thomassen (J.G. Theory, 1981) sobre referências a respeito.

## Importância do Teorema de Kuratowski

- Fornece uma caracterização de grafos planares em termos de um nº essencialmente finito de subgrafos proibidos.
- Ocupa uma posição de destaque entre os critérios de planaridade conhecidos, não apenas pela sua beleza e simplicidade, mas também porque implica — de maneira relativamente simples — o critério de planaridade de MacLane (1937) e o de Whitney (1932) além de outros.
- Diferentemente de outros critérios de planaridade, fornece uma caracterização útil de grafos não planares.
- Aparentemente, quase todas as provas conhecidas do teorema podem ser transformadas em algoritmos polinomiais para testar planaridade de grafos. [Hopcroft & Tarjan (1974) desenvolveram um algoritmo linear para testar planaridade.]

**PROVA** (do Teorema de Kuratowski) [Veja livro Nishizeki & Chiba]

Provaremos por indução em $|V(G)|$ que

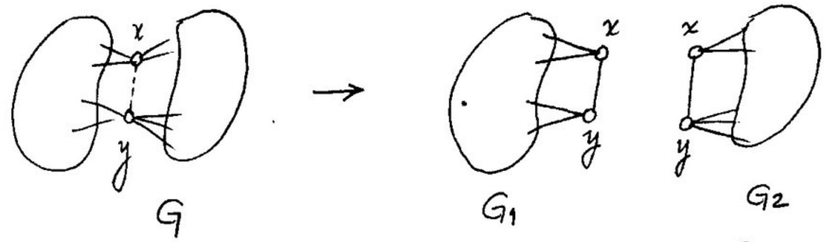
"Se $G$ não contém uma subdivisão de $K_5$ ou de $K_{3,3}$ então $G$ é planar."

Seja $n = |V(G)|$. Como $K_5 - e$ é planar p/ qualquer aresta $e$ em $K_5$, a afirmação é verdadeira se $n \leq 5$. Suponhamos então que $n \geq 6$. Temos 2 casos a considerar.

Caso 1. $G$ não é 3-conexo.

É imediato que um grafo é planar sse cada um de seus blocos (subgrafos 2-conexos maximais) é planar. Podemos então supor que $G$ seja 2-conexo. Neste caso, $G$ tem um par separador $\{x, y\}$.

Sejam $G_1$ e $G_2$ os 'split graphs' com relação ao par $\{x,y\}$. 8.9

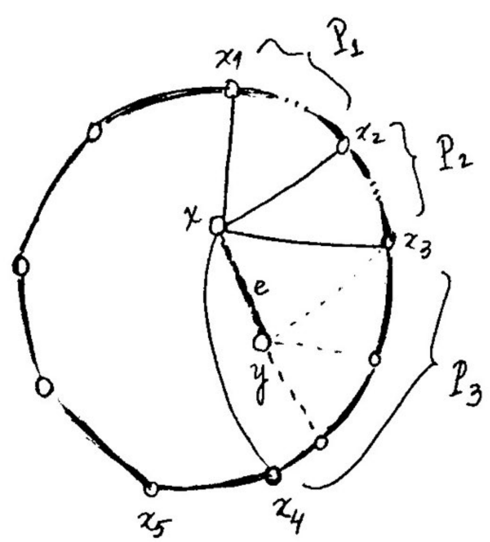



Claramente $G_1$ e $G_2$ têm menos vértices do que $G$, e também não contêm subdivisões de $K_5$ e nem de $K_{3,3}$. Logo, pela hipótese de indução, $G_1$ e $G_2$ são planares. Além disso, ambos têm uma imersão plana na qual a aresta $xy$ pertence à fronteira da face externa. Estas duas imersões planas podem ser acopladas em $\underline{x}$ e $\underline{y}$ de modo a produzir uma imersão plana de $G$. Portanto, $G$ é planar.

Caso 2. $G$ é 3-conexo.

Sendo $G$ 3-conexo, pelo Teorema **X** concluímos que $G$ tem uma aresta $e=xy$ tal que $G/e$ é 3-conexo. Seja $\underline{z}$ o vértice obtido identificando-se os vértices $\underline{x}$ e $\underline{y}$.
Pelo Lema **Y**, $G/e$ não contém uma subdivisão de $K_5$ e nem de $K_{3,3}$, e portanto, pela hipótese de indução, $G/e$ é planar. Considere um grafo plano $G/e$ e o subgrafo $G/e - z$. Como $G/e$ é 3-conexo, pelo Corolário **Z** a imersão plana de $G/e$ é única.

Seja $F$ a face do grafo plano $G/e - z$ tal que em $G/e$ contém o vértice $\underline{z}$, e seja $C$ o circuito facial que é a fronteira da face $F$. É imediato que todos os vizinhos de $\underline{x}$ ou $\underline{y}$, exceto eles próprios, devem pertencer a $C$. Sejam $x_1, x_2, \ldots, x_k$ os vizinhos de $\underline{x}$ que ocorrem em $C$ em ordem cíclica, e seja $P_i$ o caminho em $C$ que vai de $x_i$ a $x_{i+1}$ e não contém nenhum $x_j$, $j \notin \{i, i+1\}$, onde $x_{k+1} = x_1$. Se todos os vizinhos de $\underline{y}$, excetuando $\underline{x}$, estão contidos em um desses caminhos, então uma imersão



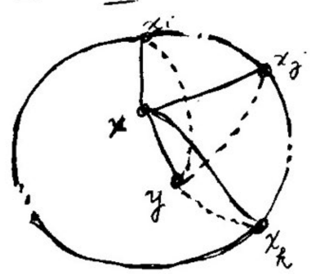

plana de $G$ pode ser obtida a partir da imersão de $G/e$, donde segue que $G$ é planar.

Analisemos então o caso em que nem todos os vizinhos de $y$, excetuando $x$, estão contidos em um dos caminhos $P_i$. Como $y$ tem 3 ou mais vizinhos incluindo $\underline{x}$, há 3 possibilidades:

(a) $y$ tem 3 ou mais vizinhos em $\{x_1, \ldots, x_k\}$;
(b) $y$ tem um vizinho $\underline{u}$ em $P_i - \{x_i, x_{i+1}\}$ para algum $\underline{i}$ e um vizinho $\underline{v}$ não pertencente a $P_i$;
(c) $y$ tem 2 vizinhos $x_i$ e $x_j$ tais que $j \neq i+1$ e $i \neq j+1$.

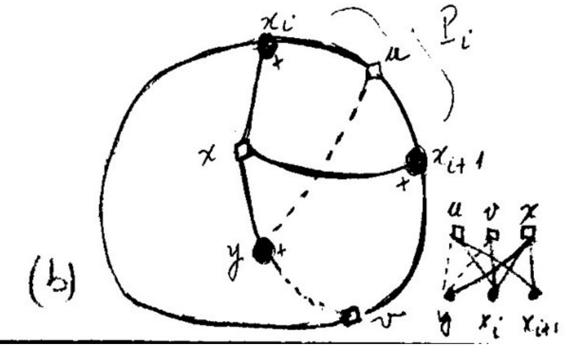
No caso (a) o subgrafo de $G$ induzido pelos vértices de $C$ juntamente com $\underline{x}$ e $\underline{y}$ contém uma subdivisão de $K_5$.

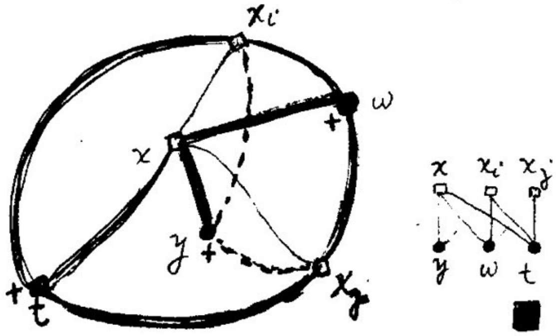
(a)




Nos casos (b) e (c), o subgrafo de $G$ induzido pelos vértices de $C$ juntamente com $\underline{x}$ e $\underline{y}$ contém uma subdivisão de $K_{3,3}$.

(b)




■