

## Capítulo 7

### COLORAÇÃO DE VÉRTICES

#### 1 Introdução

Neste capítulo só trataremos de grafos simples. Uma parte desse material baseia-se no texto “Uma introdução à Teoria dos Grafos” (organizado para a II Bienal da SBM de 2004 – veja a lista de referências).

Uma **coloração do conjunto de vértices**, ou simplesmente, uma **coloração de vértices** de um grafo é uma atribuição de cores aos vértices tal que vértices adjacentes recebem cores diferentes. Mais formalmente, uma **coloração de vértices** de um grafo  $G$  é uma *partição de  $V(G)$  em conjuntos independentes* (alguns eventualmente vazios). Se  $\{X_1, \dots, X_k\}$  é uma tal coloração, dizemos que cada conjunto independente  $X_i$  é uma **cor** e  $k$  é o **número de cores**. Dizemos também que esta é uma  **$k$ -coloração** de  $G$ . Note que se  $G$  admite uma  **$k$ -coloração**, então isto quer dizer que é possível colorir os vértices de  $G$  com *no máximo*  $k$  cores.

Exemplo:

Dizemos que um grafo  $G$  é  **$k$ -colorível** se  $G$  admite uma  $k$ -coloração. [Note que se  $G$  é  $k$ -colorível, então  $G$  é  $p$ -colorível para todo  $p > k$ .]

Considere o seguinte exemplo (aplicação). Cada vértice do grafo é uma das substâncias químicas que uma certa indústria precisa manter armazenadas. Duas substâncias são adjacentes se podem reagir entre si. Uma coloração dos vértices desse grafo aloca cada substância a um armazém de tal modo que substâncias adjacentes fiquem em armazéns diferentes.

#### 2 Colorações mínimas

É fácil encontrar uma coloração dos vértices de um grafo: basta colorir cada vértice com uma cor diferente.

PROBLEMA DE INTERESSE: Dado um grafo, obter uma coloração de vértices com poucas cores; ou melhor ainda, obter uma com o menor número possível de cores.

Uma coloração de vértices é **mínima** se o número de cores usadas por essa coloração é o menor possível, ou seja, se não existe outra coloração que use menos cores. O **número cromático** de um

grafo é o número de cores de uma coloração de vértices mínima. O número cromático de um grafo  $G$  é denotado por

$$\chi(G).$$

OBS: O problema de encontrar uma coloração mínima de um grafo é NP-difícil.

Este capítulo estuda a relação entre o número cromático e outros parâmetros do grafo. Ele comprova, por exemplo, a intuição de que  $\chi$  é tanto menor quanto menor o grau máximo do grafo e tanto maior quanto maiores as cliques (subgrafos completos) do grafo.

EXERCÍCIO E7.1. Exiba um grafo com duas colorações mínimas diferentes.

EXERCÍCIO E7.2. Qual é o número cromático do grafo de Petersen?

EXERCÍCIO E7.2. [“Como proteger um museu”] (difícil) Um museu de arte tem uma grande sala cujo contorno é um polígono fechado, não necessariamente convexo, com  $n$  lados. Queremos postar guardas em alguns dos vértices do polígono de modo que cada ponto da sala possa ser visto por pelo menos um dos guardas (o ângulo de visão de cada guarda só é limitado pelas paredes da sala). Mostre que  $\lfloor n/3 \rfloor$  guardas são suficientes. Mostre que  $\lfloor n/3 \rfloor$  guardas são necessários em algumas salas. (Veja o livro “Proofs from the BOOK”, de Aigner & Ziegler, Springer 1991).

### 3 Algumas delimitações superiores

Para obter uma delimitação superior, digamos  $f(G)$ , do número cromático de um grafo  $G$ , basta mostrar a existência de uma coloração com  $f(G)$  cores. Eis uma delimitação superior muito simples, que reflete a intuição de que um grafo com poucas arestas tem número cromático pequeno:

**Teorema 7.1.** Para todo grafo  $G = (V, A)$  temos que  $\chi(G) \leq \frac{1}{2} + \sqrt{2|A| + \frac{1}{4}}$ .

**Prova.** (na aula)

Considere agora uma delimitação mais sofisticada. Ela confirma a intuição de que  $\chi$  é tanto menor quanto menor for o grau máximo do grafo.

**Teorema 7.2.** Para todo grafo  $G$ , temos que  $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$ .

**Prova 1.** Por indução no número de vértices de  $G$ . (Exercício para casa.)

**Prova 2.** Heurística gulosa. (Na aula.)

O resultado acima é o melhor possível já que existem grafos  $G$  para os quais  $\chi(G) = \Delta(G) + 1$ . Isso ocorre para os circuitos ímpares e para os grafos completos. O interessante é que, se excluirmos esses grafos, podemos provar uma delimitação melhor. É o que garante o teorema de Brooks, que veremos a seguir.

A prova que veremos é relativamente simples. Ela é baseada em *árvore-BP* (árvore de busca em profundidade – *DFS-tree*).

**LEMA BP.** Os únicos grafos para os quais toda árvore-BP é um caminho hamiltoniano são os circuitos, os grafos completos e os grafos completos bipartidos regulares ( $K_{n,n}$ ).

**Teorema 7.3.** (Teorema de Brooks, 1941)

Se  $G$  é um grafo conexo que não é completo e nem um circuito ímpar, então  $\chi(G) \leq \Delta(G)$ .

**Prova 1 (usando árvore-BP)**

Seja  $\mathcal{C} := \{1, 2, \dots, \Delta\}$ , onde  $\Delta := \Delta(G)$ .

**Caso 1.**  $G$  não é um grafo regular.

Seja  $x$  um vértice de grau mínimo, e seja  $T_x$  uma árvore-BP de  $G$  com raiz  $x$ . Faça uma coloração de  $G$  usando a heurística gulosa (vista na prova do Teorema 7.2) com as cores em  $\mathcal{C}$ , selecionando a cada iteração uma folha da subárvore de  $T_x$  induzida pelos vértices ainda não-coloridos. Note que, no momento de colorir uma folha  $f$ , tal folha é adjacente em  $T_x$  a pelo menos um vértice ainda não-colorido; e portanto,  $f$  é adjacente em  $G$  a no máximo  $g(f) - 1 \leq \Delta - 1$  vértices coloridos. Portanto, uma das cores em  $\mathcal{C}$  pode ser atribuída a  $f$ . Finalmente, no momento de colorir a raiz  $x$ , como  $g(x) < \Delta$ , existe uma cor disponível que podemos atribuir a  $x$ .

**Caso 2.**  $G$  é um grafo regular.

Se  $G$  é um circuito par ou um grafo bipartido completo regular, então claramente  $\chi(G) = 2 \leq \Delta$ . Suponhamos então que  $G$  seja distinto desses grafos.

– **Caso 2.1.**  $G$  tem um vértice-de-corte.

Seja  $v$  um vértice-de-corte. Então  $G = G_1 \cup G_2$ , onde  $G_1$  e  $G_2$  são conexos e  $V(G_1) \cup V(G_2) = \{v\}$ . Como  $G$  é regular, então  $G_1$  e  $G_2$  não são regulares. Pela prova do Caso 1 (acima), temos que  $\chi(G_i) \leq \Delta(G_i)$ ,  $i = 1, 2$ , e não é difícil verificar que  $\chi(G) = \max\{\chi(G_1), \chi(G_2)\} \leq \Delta$ .

– **Caso 2.2.**  $G$  não tem vértices-de-corte (ou seja,  $G$  é 2-conexo).

Seja  $T$  uma árvore-BP de  $G$  que não é um caminho (tal  $T$  existe pelo Lema BP). Seja  $x$  um vértice de  $T$  com pelo menos 2 filhos, digamos  $y$  e  $z$ . Como  $G$  é 2-conexo, então  $G - y$  e  $G - z$  são conexos. Então  $y$  (resp.  $z$ ) é uma folha de  $T$  ou tem descendentes próprios que são adjacentes a ancestrais de  $x$ . Então  $G' = G - \{y, z\}$  é conexo.

Seja  $T'$  uma árvore-BP em  $G'$  com raiz  $x$ . Atribua primeiramente a cor 1 aos vértices  $y$  e  $z$  (note que eles não são adjacentes). Faça em seguida uma coloração de  $T'$  com a heurística gulosa definida no Caso 1 (não deixando de levar em conta as arestas adjacentes a  $y$  ou  $z$ ). Note que, no momento de colorir a raiz  $x$ , como atribuímos a cor 1 aos vértices  $y$  e  $z$  (vizinhos de  $x$ ), existirá uma cor disponível para atribuímos a  $x$ . □

---

**Prova 2 (usando ideia das cadeias de Kempe)** (em aula)