

Capítulo 6

COLORAÇÃO DE ARESTAS

1 Introdução

Neste capítulo só trataremos de grafos sem laços. Uma parte desse material baseia-se no texto “Uma introdução à Teoria dos Grafos” (organizado para a II Bienal da SBM de 2004 – veja a lista de referências).

Uma **coloração das arestas** de um grafo é uma atribuição de cores às suas arestas tal que arestas adjacentes recebem cores diferentes. Mais formalmente, podemos dizer que uma **coloração das arestas** de um grafo G é uma *partição de $A(G)$ em emparelhamentos*. Se $\{E_1, \dots, E_k\}$ é uma tal coloração, dizemos que cada emparelhamento E_i (possivelmente vazio) é uma **cor** e k é o **número de cores**. Dizemos também que esta é uma **k -aresta-coloração** de G . Note que se G admite uma **k -aresta-coloração**, então isto quer dizer que é possível colorir as arestas de G com *no máximo* k cores.

Exemplo:

Dizemos que um grafo G é **k -aresta-colorível** se G admite uma k -aresta-coloração. [Note que se G é k -aresta-colorível, então G é p -aresta-colorível para todo $p > k$.]

2 Colorações mínimas

É fácil encontrar uma coloração das arestas de um grafo: basta colorir cada aresta com uma cor diferente.

PROBLEMA DE INTERESSE: Dado um grafo, obter uma coloração com poucas cores; ou melhor ainda, obter uma com o menor número possível de cores.

Uma coloração de arestas é **mínima** se o número de cores usadas por essa coloração é o menor possível, ou seja, se não existe outra coloração que use menos cores. O **índice cromático** de um grafo é o número de cores de uma coloração de arestas mínima. O índice cromático de um grafo G é denotado por $\chi'(G)$. Dizemos que um grafo G é **k -aresta-cromático** se $\chi'(G) = k$.

EXERCÍCIO E6.1. Mostre que $\chi'(G) \leq 2\Delta(G) - 1$ para todo grafo G .

Índice cromático dos circuitos e dos grafos completos

$$\chi'(C_n) = \begin{cases} 2 & \text{se } n \text{ é par,} \\ 3 & \text{se } n \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

EXERCÍCIO E6.2. Mostre que para $n \geq 2$ tem-se que

$$\chi'(K_n) = \begin{cases} n-1 & \text{se } n \text{ é par,} \\ n & \text{se } n \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

3 Delimitação inferior

Uma delimitação inferior simples mas importante do índice cromático é a seguinte.

Delimitação 6.1. *Em todo grafo G tem-se que $\chi'(G) \geq \Delta(G)$.*

A desigualdade acima decorre da seguinte observação: para qualquer coloração de arestas $\{E_1, \dots, E_k\}$ de G , temos que $k \geq g(v)$ para qualquer vértice v .

Essa delimitação inferior tem a seguinte consequência imediata: se uma coloração de arestas usa apenas Δ cores então ela é mínima.

Como veremos abaixo, todo grafo bipartido G admite uma coloração com apenas $\Delta(G)$ cores. Mas a coloração de muitos grafos não-bipartidos exige mais que $\Delta(G)$ cores.

PERGUNTA INTERESSANTE: Como convencer alguém de que um certo grafo G requer mais do que $\Delta(G)$ cores? Há algum objeto (subestrutura do grafo) que podemos exibir nesses casos, para convencer de que uma certa coloração exibida é mínima?

Infelizmente, não temos uma boa resposta para essa pergunta.

EXERCÍCIO E6.3. Mostre que $\chi'(G) = 4$ se G é o grafo de Petersen.

EXERCÍCIO E6.4. Mostre que todo grafo bipartido k -regular admite uma coloração das arestas com apenas k cores.

EXERCÍCIO E6.5. Exiba uma família de grafos G para os quais $\chi'(G) > \Delta(G)$.

EXERCÍCIO E6.6. Mostre que $\chi'(G) > \Delta(G)$ se G é um grafo k -regular com número ímpar de vértices.

EXERCÍCIO E6.7 Mostre que $\chi'(G) > \Delta(G)$ se $|V(G)|$ é ímpar e $|A(G)| > \frac{\Delta(G)}{2} (|V(G)| - 1)$.

4 Grafos bipartidos

O índice cromático de grafos bipartidos tem uma delimitação superior que coincide com a delimitação inferior 6.1 vista anteriormente. Ou seja, tal resultado fornece precisamente o índice cromático de um grafo bipartido. Ela foi estabelecida por König em 1916.

Teorema 6.2. (König, 1916) *Se G é um grafo bipartido então $\chi'(G) \leq \Delta(G)$.*

Provas. [Prova 1 – Exercício para casa: usar o resultado visto no exercício E27 da Lista 8: *se G é um grafo bipartido então G tem um emparelhamento que cobre todos os vértices de grau $\Delta(G)$.*]

[Prova 2.] Por indução em $|A(G)|$. Seja $m := |A(G)|$. Se $m = 0$ o resultado é imediato. Suponha então que $m > 0$ e escolha arbitrariamente uma aresta xy de G . Considere o grafo $G' = G - xy$. Como $\Delta(G') \leq \Delta(G)$, pela hipótese de indução segue que G' tem uma k -aresta-coloração, digamos $\mathcal{C} := \{E_1, E_2, \dots, E_k\}$, onde $k \leq \Delta(G)$. Vamos mostrar que é possível obter uma k -coloração para G , atribuindo-se uma das cores em \mathcal{C} à aresta xy (eventualmente após uma recoloração das arestas de G').

Como $g_{G'}(x) < k$, então existe uma cor em \mathcal{C} , digamos E_i , que não incide em x .

- (a) Se E_i não incide em y , então podemos dar a cor E_i à aresta xy , e manter as demais cores definidas por \mathcal{C} , obtendo dessa forma uma k -aresta-coloração de G . (Ou seja, só trocamos E_i por $E_i \cup \{xy\}$.)
- (b) Suponha então que E_i incide em y . Como $g_{G'}(y) < k$, então pelo menos uma cor em \mathcal{C} , digamos E_j , não incide em y . Seja $H := G[E_i \cup E_j]$ o subgrafo de G induzido pelas arestas de cores E_i ou E_j . (Os componentes de H são circuitos ou caminhos alternadamente de cor E_i e E_j .)

Seja Y o componente de H que contém o vértice y . Afirmamos que x não pertence a Y . De fato, se isso ocorresse, então existiria em H um caminho de y a x , cuja aresta inicial pertenceria a E_i e cuja aresta final pertenceria a E_j (já que em x não incide uma aresta de E_i). Neste caso, esse caminho teria comprimento par, e concatenando-o com a aresta xy teríamos um circuito ímpar em G , uma contradição (já que G é bipartido). Portanto, x não pertence ao componente Y . Neste caso, uma k -coloração de G pode ser obtida a partir de \mathcal{C} permutando-e as cores E_i e E_j no componente Y , e atribuindo-se a cor E_i à aresta xy . Mais formalmente, definimos $E_i := (E_i \triangle A(Y)) \cup \{xy\}$ e $E_j := E_j \triangle A(Y)$, e mantemos os demais emparelhamentos (cores) inalterados. □

OBSERVAÇÃO: A prova acima nos fornece um algoritmo polinomial para encontrar uma coloração mínima de um grafo bipartido.

Se G é um grafo bipartido então $\chi'(G) = \Delta(G)$.

5 Grafos arbitrários

Teorema 6.3. (Vizing, 1964) *Se G é um grafo simples, então $\chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$.*

Prova. Por indução em $|A(G)|$. Seja $m := |A(G)|$. Se $m = 0$ o resultado é imediato. Suponha então que $m > 0$ e escolha arbitrariamente uma aresta α de G . Considere o grafo $G' = G - \alpha$. Como $\Delta(G') \leq \Delta := \Delta(G)$, pela hipótese de indução segue que G' tem uma $(\Delta + 1)$ -aresta-coloração, digamos \mathcal{C} . Vamos mostrar que é possível atribuir uma das cores em \mathcal{C} à aresta α .

Suponha que $\alpha = uv_1$. Como $g_{G'}(u) < \Delta + 1$ e $g_{G'}(v_1) < \Delta + 1$, existem cores em \mathcal{C} , digamos E_u e E_1 tais que

E_u não incide em u e

E_1 não incide em v_1 .

Vamos construir uma seqüência de arestas (uv_1, uv_2, \dots) e uma seqüência de cores (E_1, E_2, \dots) tais que

E_i não incide em v_i e

uv_{i+1} tem a cor E_i .

Suponha que temos as seqüências $(uv_1, uv_2, \dots, uv_i)$ e (E_1, E_2, \dots, E_i) . Se existir aresta uv de cor E_i tal que $v \notin \{v_2, \dots, v_i\}$, chamamos de v_{i+1} o vértice v e tomamos uma cor E_{i+1} que não incide em v_{i+1} . Estendemos desta forma as duas seqüências, e repetimos este processo enquanto for possível.

Como $g(u)$ é finito, tal extensão não vai ser sempre possível. Suponha então que, tendo construído as seqüências

$(uv_1, uv_2, \dots, uv_k)$ e

$(E_1, E_2, \dots, E_k),$

não pudemos mais estender a seqüência das arestas. Vejamos as razões que impediram tal extensão.

(a) Não existe aresta uv com a cor E_k .

Neste caso, podemos recolorir as arestas uv_i , $1 < i \leq k$, atribuindo à aresta uv_i a cor E_i . Atribuímos à aresta uv_1 a cor E_1 .

(b) Existe aresta uv com a cor E_k , mas $v = v_j$ para algum $j < k$.