Capítulo 5

Emparelhamentos

1 Introdução

Todos os grafos tratados neste capítulo são simples (ou seja, sem laços e sem arestas múltiplas). Lembramos que, num grafo, duas arestas que têm um extremo comum são chamadas **adjacentes**. Um **emparelhamento** num grafo é um conjunto de arestas duas a duas não-adjacentes. Em outras palavras, um emparelhamento é um conjunto E de arestas tal que todo vértice do grafo é extremo de no máximo um elemento de E.
Exemplo:

- Seja G um grafo e $X \subseteq V(G)$. Dizemos que um emparelhamento E **cobre** (ou satura) X se em cada vértice de X incide pelo menos uma aresta de E. Neste caso, também dizemos que X é **coberto** (ou saturado) por E. Se $X = \{v\}$ então dizemos simplesmente que E **cobre** (ou satura) v.
- Um emparelhamento num grafo G é **perfeito** se cobre $V(G)$.
- Se uma aresta uv pertence a um emparelhamento E então dizemos que u e v **são (ou estão) emparelhados por** E.
- Se um vértice v não é coberto por um emparelhamento E então dizemos que v é **livre em (relação a)** E, ou simplesmente v é **livre** (se E estiver claro pelo contexto).

PROBLEMAS DE INTERESSE:

1. Encontrar um emparelhamento máximo em um grafo. [Existe algoritmo eficiente?]
2. Dado um grafo e um emparelhamento E, verificar se E é máximo. E se tal emparelhamento E não é máximo existe um certificado (fácil de ser testado) que nos convença disso?
3. Dado um grafo e um subconjunto X de vértices, decidir se existe um emparelhamento que cobre X. [É fácil decidir isso?]
4. Quando o grafo dado é bipartido será que é mais fácil resolver cada um dos problemas acima?
5. Suponha que um grafo G não tenha um emparelhamento perfeito. Existe um certificado que nos convença disso?

2 Emparelhamentos máximos

Um emparelhamento E num grafo é **maximal** se não existe nesse grafo um emparelhamento E' que contém E propriamente (isto é, tal que $E' \supset E$). Um emparelhamento é **máximo** se tem o maior número possível de elementos (ou seja, tem cardinalidade máxima).

OBS: Note que nem todo emparelhamento maximal é máximo. Claramente, todo emparelhamento máximo é maximal.

Exemplos:

Definição. Seja E um emparelhamento num grafo G. Um **caminho E-alternante** em G é um caminho cujas arestas estão alternadamente em E e em $A(G) \setminus E$. [OBS: um tal caminho com ambos os extremos livres (em E) é também chamado um **caminho aumentador** (*augmenting path*)].
Exemplos:

Teorema 5.1. (Berge, 1957)
Seja G um grafo e E um emparelhamento em G. Então E é um emparelhamento máximo se e só se G não tem nenhum caminho E-alternante com ambos os extremos livres.

Prova. (a) Seja E um emparelhamento máximo em G. Suponha que exista em G um caminho E-alternante com ambos os extremos livres. Seja

$$E' := \Big(E \setminus A(P)\Big) \cup \Big(A(P) \setminus E\Big) = E \triangle A(P).$$

Claramente E' é um emparelhamento em G, e além disso, $|E'| > |E|$. Logo, E não é um emparelhamento máximo, uma contradição.

(b) Vamos agora provar a afirmação recíproca. Para isso, considere um emparelhamento E em G e suponha que não exista em G um caminho E-alternante com ambos os extremos livres. Suponha que E não seja máximo. Tome um emparelhamento máximo E^* em G e considere o grafo

$$H := G[E^* \triangle E].$$

Claramente, $g_H(v) \leq 2$ para todo vértice v em H. Logo, cada componente de H é um circuito ou um caminho com arestas alternadamente em E e em E^*. Como $|E^*| > |E|$, deve existir um componente de H que é um caminho, digamos P, que contém mais arestas de E^* do que de E.

```
P     0******0======0******0======0******0======0******0
```

Então, a primeira e a última aresta de P pertencem a E^*, e portanto os seus extremos não são cobertos por E. Logo, P é um caminho E-alternante com ambos os extremos livres (em E). Mas isto é uma contradição. Portanto, podemos concluir que E é um emparelhamento máximo. □

3 Emparelhamentos em grafos bipartidos

Todos os resultados abaixo serão provados em aula. Algumas vezes, serão mencionadas duas provas distintas.

Os dois teoremas desta seção são centrais na teoria de emparelhamentos em grafos.

Teorema 5.2. (Hall, 1935)
Seja G um grafo (X, Y)-bipartido. Então G tem um emparelhamento que cobre X se e só se $|\mathrm{Adj(S)}| \geq |\mathrm{S}|$ para todo $S \subseteq X$.

(Desejável: conhecer pelo menos 2 provas distintas do Teorema de Hall.)

Corolário 5.3.
Seja G um grafo (X, Y)-bipartido. Se $|\mathrm{Adj(S)}| \geq |\mathrm{S}| - \mathrm{k}$ para todo $S \subseteq X$ e algum inteiro fixo k, então G tem um emparelhamento de cardinalidade $|X| - k$.

Corolário 5.4.
Todo grafo bipartido k-regular com $k \geq 1$ tem um emparelhamento perfeito.

Definição: Seja k um inteiro positivo. Um subgrafo gerador k-regular de G é chamado **k-fator**. Assim, um **1-fator** de G é simplesmente um subgrafo gerado pelas arestas de um emparelhamento perfeito de G; um **2-fator** é um subgrafo gerador de G que é uma união de circuitos disjuntos nos vértices.

Corolário 5.5.
Todo grafo bipartido $2k$-regular, $k \geq 1$, tem um 2-fator.

OBS: O resultado acima, para grafos bipartidos, vale também para grafos arbitrários. Petersen (1891) provou que "todo grafo $2k$-regular, $k \geq 1$, tem um 2-fator". (Veremos em aula como provar este resultado mais geral, fazendo uso do Corolário 5.4.)

3.1 Emparelhamentos e Coberturas – um resultado min-max

Definição: Uma **cobertura** de um grafo G é um conjunto $K \subseteq V(G)$ tal que toda aresta de G tem pelo menos um dos extremos em K. (Mais precisamente, K é uma cobertura das arestas de G por vértices.)

Teorema 5.6. (König, 1931) – Teorema min-max
Seja G um grafo (X, Y)-bipartido. Então a cardinalidade de um emparelhamento máximo em G é igual à cardinalidade de uma cobertura mínima.

3.2 Algoritmo para encontrar um emparelhamento máximo