Capítulo 4

Grafos Hamiltonianos

PROBLEMA: "Volta ao redor do mundo"

É possível achar um trajeto, passando ao longo das arestas do dodecaedro (Figura 2), que visita cada uma das cidades <u>*exatamente uma vez*</u> *e termina na cidade de partida?* [Brinquedos construídos por William Hamilton, 1856 (Figura 1): versão 3-dimensional e versão planar.]

Figura 1 - William R. Hamilton

Figura 2 - Dodecaedro com nomes de 20 cidades

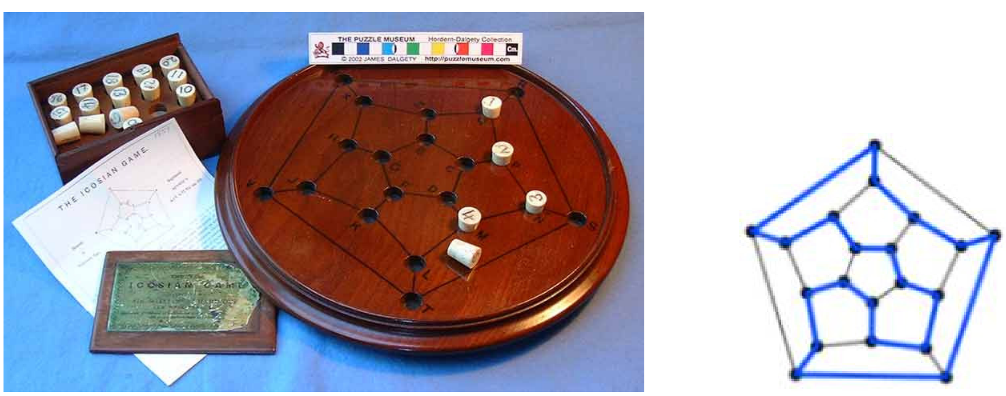

Figura 3 - Versão planar

Definição. Um circuito (resp. caminho) que contém todos os vértices de um grafo é chamado **hamiltoniano**. Um **grafo hamiltoniano** é um grafo que contém um circuito hamiltoniano.

Problema 1: Dado um grafo G, decidir se G é hamiltoniano.

Problema 2: Dado um grafo hamiltoniano G, encontrar um circuito hamiltoniano.

Os problemas acima são difíceis! (O Problema 1 é NP-completo.) Não se conhece algoritmos polinomiais para se resolvê-los.

Teorema 4.1 (Condição necessária para um grafo ser hamiltoniano)
Se G é um grafo hamiltoniano então para todo conjunto não-vazio $S \subset V(G)$,

$$c(G - S) \leq |S|.$$

Condições suficientes para um grafo ser hamiltoniano

Teorema 4.2. (Dirac, 1952)
Se G é um grafo simples de ordem $n \geq 3$ e $g(v) \geq n/2$ para todo $v \in V(G)$, então G é hamiltoniano.

Prova 1. Suponha que a afirmacão seja falsa. Então existe um grafo simples não-hamiltoniano *maximal* G de ordem $n \geq 3$ que satisfaz a condição do teorema. Ou seja, (maximal no sentido de que) G é não-hamiltoniano, mas para qualquer par de vértices não-adjacentes u, v em G, temos que o grafo $G + uv$ é hamiltoniano.

Claramente G não é completo (todo grafo completo com pelo menos 3 vértices é obviamente hamiltoniano). Portanto, existem vértices u e v não-adjacentes em G. Considere o grafo $H := G + uv$. Pela maximalidade de G, segue que H é hamiltoniano. Logo, todo circuito hamiltoniano em H deve conter a aresta uv. Então G tem um caminho hamiltoniano, digamos

$$P := (u = v_1, v_2, \ldots, v_n = v).$$

Note que, *se v_i é adjacente a u, então v_{i-1} não é adjacente a v*, pois senão

$$C = (v_1, v_i, v_{i+1}, \ldots, v_n, v_{i-1}, v_{i-2}, \ldots, v_1)$$

seria um circuito hamiltoniano em G, contrariando a escolha de G.

Portanto, para todo vértice adjacente a u, existe um vértice de $V(G) \setminus \{v\}$ que não é adjacente a v. Mas neste caso,

$$g(v) \leq n - 1 - g(u).$$

Como $g(u) \geq n/2$, temos que $g(v) \leq n - 1 - n/2 = n/2 - 1$, uma contradição. Logo, a afirmação é verdadeira, e o teorema está provado.

Prova 2. Idêntica à prova acima até a existência do caminho P. [A partir desse ponto, substituir por:]

Sejam

$$U := \{v_i : v_i \text{ é adjacente a } u\},$$

$$W := \{v_i : v_{i-1} \text{ é adjacente a } v\},$$

Então $U \cap W = \emptyset$, pois caso contrário

$$C = (v_1, v_i, v_{i+1}, \ldots, v_n, v_{i-1}, v_{i-2}, \ldots, v_1)$$

seria um circuito hamiltoniano em G, contrariando a escolha de G.

Por outro lado, como $u \notin U \cup W$, resulta que $|U \cup W| < n$. Logo,

$$n > |U \cup W| = |U| + |W| - |U \cap W| = g(u) + g(v) \geq n/2 + n/2 = n.$$

uma contradição. $\square$

A prova do Teorema 4.2 motivou o seguinte resultado, cuja prova segue analogamente. Note que o Teorema 4.2 é um corolário do Teorema 4.3.

Teorema 4.3. (Ore, 1960)
Se G é um grafo simples de ordem $n \geq 3$ tal que

$$g(u) + g(v) \geq n \quad \textit{para todo par } u, v \textit{ de vértices não-adjacentes},$$

então G é hamiltoniano.

O seguinte resultado também foi motivado pela prova do Teorema 4.2. Note que a prova é análoga a que fizemos para o Teorema 4.2.

Teorema 4.4. (Bondy & Chvátal, 1976)
Seja G um grafo simples de ordem n e sejam u, v vértices não-adjacentes em G tais que

$$g(u) + g(v) \geq n.$$

Então G é hamiltoniano se e só se $G + uv$ é hamiltoniano.

O resultado acima motivou a definição do conceito de fecho de um grafo e resultados algorítmicos baseados nesse conceito combinado com o Teorema 4.4. O **fecho de um grafo** G, $\mathcal{F}(G)$, é o grafo que se obtém de G acrescentando-se recursivamente arestas ligando pares de vértices não-adjacentes cuja soma dos graus é pelo menos $|V(G)|$ até que não exista mais nenhum tal par. Note que o fecho de um grafo é único (independe da ordem em que as arestas são acrescentadas). [Exercício: prove essa afirmação.] Usando o Teorema 4.4, segue imediatamente que "um grafo G é hamiltoniano se e só se $\mathcal{F}(G)$ é hamiltoniano." Na aula serão mencionadas algumas outras condições suficientes para um grafo ser hamiltoniano.