

## Capítulo 3

### ÁRVORES

**Problema:** Suponha que numa cidade haja  $n$  postos telefônicos. Para que seja sempre possível haver comunicação (não necessariamente direta) entre quaisquer desses postos, qual é o *número mínimo de linhas diretas* que deve existir?

**Pergunta:** Qual é o número mínimo de arestas que um grafo com  $n$  vértices deve ter para ser conexo?

**Resposta:**

Já vimos (exercício 19 do Capítulo 1) que:

Se  $G$  é um grafo conexo com  $n$  vértices então  $G$  tem pelo menos  $n - 1$  arestas.

Ou seja,  $|A(G)| \geq n - 1$  é **condição necessária** para que um grafo  $G$  com  $n$  vértices seja conexo.

**Pergunta 1:**  $|A(G)| \geq n - 1$  é **condição suficiente** para garantir que um grafo  $G$  com  $n$  vértices seja conexo?

**Resposta 1:**

**Pergunta 2:** Existem grafos conexos com  $n$  vértices e  $n - 1$  arestas (para todo  $n \geq 1$ )?

**Resposta 2:**

Desenhe todos os grafos conexos (não-isomorfos) com  $n$  vértices e  $n - 1$  arestas para  $n = 1, 2, \dots, 6$ .

**Observação:**

**Pergunta 3:** É verdade que se  $G$  é um grafo conexo com  $n$  vértices e  $n - 1$  arestas então  $G$  não contém circuitos?

**Resposta 3:**

**Proposição 3.1.** *Se  $G$  é um grafo conexo com  $n$  vértices e  $n - 1$  arestas então  $G$  não contém circuitos.*

**Prova.** [na aula]

**Pergunta 4:** Vale a recíproca da Proposição 3.1?

**Resposta 4:**

**Proposição 3.2.** *Se  $G$  é um grafo conexo com  $n$  vértices e  $G$  não contém circuitos, então  $G$  tem  $n - 1$  arestas.*

**Prova.** [na aula]

Def. Dizemos que um grafo é **acíclico** se ele não contém circuitos.

Def. Uma **árvore** é um grafo acíclico conexo. Uma **floresta** é um grafo acíclico (não necessariamente conexo); ou seja, é um grafo cujos componentes são árvores.

Juntando as Proposições 3.1 e 3.2, e a definição acima, temos:

**Teorema 3.3.** *Um grafo conexo com  $n$  vértices é uma árvore se e só se tem  $n - 1$  arestas.*

**Corolário 3.4.** *Toda árvore não trivial tem pelo menos 2 vértices de grau 1.*

**Prova.** [na aula]

**Teorema 3.5.** *As seguintes afirmações a respeito de um grafo  $G$  são equivalentes:*

- (a)  $G$  é uma árvore.
- (b)  $G$  não tem laços e entre quaisquer dois vértices de  $G$  existe um único caminho.
- (c)  $G$  é acíclico e se  $u, v$  são dois vértices não-adjacentes de  $G$ , então  $G + uv$  tem exatamente um circuito. (Isto é,  $G$  é um grafo acíclico maximal.)
- (d)  $G$  é conexo e se  $e$  é uma aresta de  $G$  então  $G - e$  é desconexo. (Em outras palavras,  $G$  é conexo e toda aresta de  $G$  é uma ponte.)

**Prova.** [na aula] (Escrever a prova numa folha complementar.)

EXERCÍCIO 25. *Prove que se  $G$  é um grafo conexo com  $n$  vértices e  $n$  arestas,  $n \geq 1$ , então  $G$  contém um único circuito.*

EXERCÍCIO 26. *Prove que se  $G$  é um grafo simples com pelo menos 5 vértices então ou  $G$  ou o seu complemento  $\bar{G}$  contém um circuito.*

Def. Uma **árvore geradora** ('spanning tree') de um grafo  $G$  é um subgrafo gerador de  $G$  que é uma árvore. (Lembramos que um subgrafo  $T$  de  $G$  é gerador se  $V(T) = V(G)$ .)

Exemplos:

**Corolário 3.6.** *Todo grafo conexo contém uma árvore geradora.*

**Prova.** [na aula]

Vértice-de-corte (ou vértice separador).

Num grafo  $G$  um vértice  $v$  é um **vértice-de-corte** se o conjunto das arestas de  $G$  pode ser particionado em dois subconjuntos não-vazios  $A_1$  e  $A_2$  tais que os subgrafos  $G[A_1]$  e  $G[A_2]$  têm apenas o vértice  $v$  em comum.

**OBS:** Se  $G$  é um grafo *sem laços* então a definição acima é equivalente a:  $v$  é um vértice-de-corte se  $c(G - v) > c(G)$ , isto é, o número de componentes de  $G - v$  é maior do que o número de componentes de  $G$ .

Exemplos:

Def. Numa árvore um vértice de grau 1 é chamado **folha**.

**Teorema 3.7.** *Em uma árvore um vértice  $v$  é um vértice-de-corte se e só se  $g(v) > 1$ .*

**Prova.** [na aula]

**Corolário 3.8.** *Todo grafo conexo não-trivial, sem laços, tem pelo menos 2 vértices que não são vértices-de-corte.*

**Prova.** [na aula]

**Corolário 3.9.** *Todo grafo conexo não-trivial  $G$  tem um vértice  $v$  tal que  $G - v$  é conexo.*

EXERCÍCIO 27. *Seja  $G$  um grafo. Prove que uma aresta  $\alpha$  de  $G$  é uma aresta-de-corte se e só se  $\alpha$  não está contida em nenhum circuito de  $G$ .*

EXERCÍCIO 28. *Seja  $G$  um grafo conexo e  $\alpha$  uma aresta de  $G$ . Prove que  $\alpha$  pertence a todas as árvores geradoras de  $G$  se e só se  $\alpha$  é uma aresta-de-corte de  $G$ .*

**Teorema 3.10.** *O número de árvores geradoras (rotuladas) distintas de  $K_n$ ,  $n \geq 2$ , é igual  $n^{n-2}$ .*

**Prova.** [Idéia a ser discutida em aula]

## APLICAÇÕES

### O PROBLEMA DA INTERLIGAÇÃO MÍNIMA

Deseja-se interligar (conectar) um certo número de locais através de uma rede de comunicação (fibra ótica). Sabendo-se que o custo para construir uma ligação direta de um local  $i$  para um local  $j$  é  $c_{ij}$ , deseja-se construir uma tal rede de forma que o custo total de construção seja o menor possível.

Considerando cada local  $i$  como sendo um vértice  $v_i$  de um grafo com custos  $c_{ij}$  associados às arestas  $v_i v_j$ , o problema acima pode ser formulado da seguinte maneira:

Dado um grafo  $G = (V, A)$ , com custo  $c(a) \geq 0$  associado a cada aresta  $a \in A$ , encontrar em  $G$  um subgrafo gerador conexo de custo mínimo.

É imediato que no problema acima estamos interessados em encontrar em  $G$  uma **árvore geradora de custo mínimo**. Uma tal árvore será chamada de **árvore ótima**. O custo de um grafo  $T$ , denotado por  $c(T)$ , é definido como a soma dos custos das arestas em  $T$ ; isto é

$$c(T) := \sum_{a \in T} c(a).$$

Exemplo:

#### ALGORITMO DE KRUSKAL

Entrada: Grafo conexo  $G = (V, A)$ , com custo  $c(a) \geq 0$  em cada aresta  $a \in A$ .

Saída: Árvore ótima  $T$  (árvore geradora de custo mínimo).

1. (Ordenação) Ordene as arestas de  $G$  em ordem não-decrescente de seus custos. Chame-as de  $a_1, a_2, \dots, a_m$ , sendo  $c(a_1) \leq c(a_2) \leq \dots \leq c(a_m)$ .
2.  $F \leftarrow \emptyset$ .
3. Para  $i = 1$  até  $m$  faça  
se  $G[F \cup \{a_i\}]$  é acíclico então  $F \leftarrow F \cup \{a_i\}$ .
4.  $T \leftarrow G[F]$ . Pare.

OBS: O passo 3 pode ser melhorado. Note que quando  $|F| = |V| - 1$  não há mais necessidade de testar mais outras arestas.

OBS: Em aula, discussão sobre os casos em que os custos podem ser negativos.

O algoritmo acima é um *bom* algoritmo (muito eficiente). (Em aula: detalhes sobre a implementação e complexidade.)

**Teorema 3.11.** *Se  $T$  é um subgrafo construído pelo algoritmo de Kruskal, então  $T$  é uma árvore ótima de  $G$ .*

**Prova.** [na aula]