Proposição 1.6. *Se G contém pelo menos um circuito então cint$(G) \leq 2$ diam$(G) + 1$.*

Prova. Seja C um circuito em G de comprimento mínimo. Suponhamos que $\|C\| \geq 2\ \mathrm{diam}(G)+2$. Então existem vértices u,v em C tais que $d_C(u,v) \geq\ \mathrm{diam}(G)+1$. Como em G a distância entre esses vértices é no máximo diam(G), existe em G um caminho mínimo P de u a v tal que P não é um subgrafo de C. Sejam x, y vértices de P tais que a seção P_{xy} de P que vai de x a y tem pelo menos uma aresta não pertencente a C e além disso, intersecta C precisamente nos vértices x e y. Então ambas as seções do circuito C que vão de y a x têm comprimento no máximo $\|P_{xy}\|$, já que a concatenação de qualquer uma dessas seções com P_{xy} forma um circuito em G, e sabemos que C é de comprimento mínimo. Logo, $\|C\|$ é no máximo $2\ \|P_{xy}\|$, e portanto, no máximo $2\ \mathrm{diam}(G)$, contrariando a hipótese assumida. ■

• Caracterização de grafos bipartidos

Proposição 1.6. *Um grafo é bipartido se e só se não contém circuitos ímpares.*

Prova. Seja G um grafo bipartido com bipartição (X,Y) e seja $C = (v_1, v_2, \ldots, v_k)$ um circuito de G. Sem perda de generalidade, suponha que $v_1 \in X$. Então $v_2 \in Y$, $v_3 \in X$, e de modo geral, $v_i \in X$ se i é ímpar, e $v_i \in Y$ se i é par. Como $v_1 \in X$, então $v_k \in Y$, e portanto k é par, ou seja, C é um circuito par.

Vamos agora provar que se G é um grafo sem circuitos ímpares então G é bipartido. É suficiente considerar o caso em que G é conexo. Suponha então G conexo, escolha arbitrariamente um vértice w, e defina os conjuntos:

$$X := \{v \in V(G) :\ d(v,w) \text{ é par}\};$$

$$Y := \{v \in V(G) :\ d(v,w) \text{ é ímpar}\}.$$

Vamos provar que (X,Y) é uma bipartição de G. Para isso, vamos tomar dois vértices quaisquer u e v em X e provar que esses vértices não são adjacentes.

Sejam

P um caminho mais curto de w a u,

Q um caminho mais curto de w a v.

Se R é um caminho em G, e x, y são vértices de R, denotamos por R_{xy} a seção de R que vai de x a y.

Seja z o vértice comum a $V(P)$ e $V(Q)$ tal que, em Q nenhum outro vértice que ocorre depois de z pertence a P. [Ou seja, as seções Q_{zv} e P_{zu} de Q e P, respectivamente, têm apenas o vértice z em comum. Pensar por que existe tal vértice z.]

Pela escolha de P e Q, segue que $\|P_{wz}\| = \|Q_{wz}\|$. [Por que?] Neste caso, como P e Q têm comprimento par, concluimos que $\|P_{zu}\|$ e $\|Q_{zv}\|$ têm a mesma paridade. Logo, $P_{zu}^{-1}Q_{zv}$ é um caminho de comprimento par de u a v. Se u fosse adjacente a v então tal caminho juntamente com a aresta vu formaria um circuito ímpar em G, contrariando a hipótese. Logo, u e v não são adjacentes.

Analogamente, conclui-se que quaisquer dois vértices de Y não são adjacentes. Portanto, (X,Y) é uma bipartição de G, ou seja, G é bipartido. ■