Teorema 1 (de Brooks, 1941). *Se G é um grafo conexo que não é completo nem circuito ímpar, então $\chi(G) \leq \Delta(G)$.*

Dem.: Por indução em $|V(G)|$. Seja G um grafo conexo que não seja completo nem circuito ímpar. Considere $\Delta := \Delta(G)$. Primeiro, notemos que se $\Delta = 1$, então cada componente de G é um grafo completo, então este teorema não é aplicável neste caso. Depois, notemos que se $\Delta = 2$, então G é um caminho ou circuito par, então vale o teorema para tal G.

Assumamos então que $\Delta \geq 3$. Desta forma, o caso base seria um grafo com 4 vértices, digamos G. Como $\Delta = 3$ e G não é completo, então há exatamente dois vértices não-adjacentes em G. Logo, há uma 3-coloração em tal grafo.

Seja $n \geq 4$.
Hipótese de Indução: Seja G um grafo conexo que não seja completo nem circuito ímpar. Se $|V(G)| \leq n$, então $\chi(G) \leq \Delta$.

Consideremos G um grafo conexo que não seja completo nem circuito ímpar tal que $|V(G)| = n + 1$, e vamos supor que

$$\chi(G) > \Delta. \tag{1}$$

Seja v um vértice qualquer de G. Consideremos $H := G - v$. Então, $\chi(H) \leq \Delta$. Com efeito, como $|V(H')| < |V(G)|$, para todo componente H' de H, pela hipótese de indução temos que $\chi(H') \leq \Delta(H') \leq \Delta$, a menos que H' seja um circuito ímpar ou um grafo completo. Neste caso, $\chi(H') = \Delta(H') + 1 \leq \Delta$.

Logo, H possui uma Δ-coloração. Diante disto, podemos afirmar que $g_G(v) = \Delta$. Senão, haveria uma das Δ cores de H disponível para ser atribuída a G, e G possuiria uma Δ-coloração, contrariando (1).

Como H possui uma Δ-coloração mas G não possui, podemos afirmar que

$$\boxed{\text{Toda } \Delta\text{-coloração de } H \text{ usa todas as } \Delta \text{ cores nos vizinhos de } v.} \tag{2}$$

De fato, se houvesse alguma coloração que não usasse todas as Δ cores nos vizinhos de v, novamente teríamos uma cor disponível para atribuir a v, o que seria uma Δ-coloração para G, novamente contrariando (1).

Em vista disso, seja $\{V_1, V_2, \ldots, V_\Delta\}$ uma Δ-coloração de H, e consideremos $v_i \in V_i$ o vizinho de v colorido com a cor i, para cada $i = 1, 2, \ldots, \Delta$.

Seja $H_{ij} := H[V_i \cup V_j]$ o subgrafo de H induzido pelos vértices de cor i ou j, para todo $i \neq j$. Diante disto, é certo que

$$\boxed{\text{Para todo } i \neq j,\ v_i \text{ e } v_j \text{ pertencem a um mesmo componente } C_{ij} \text{ de } H_{ij}.} \tag{3}$$

De fato, se (3) não valesse, poderíamos permutar as cores i e j em um dos componentes de H_{ij} e teríamos então que v_i e v_j seriam da mesma cor, o que contraria (2).

Dessa forma, afirmamos que

$$\boxed{C_{ij} \text{ é um caminho de } v_i \text{ até } v_j.} \tag{4}$$

Com efeito, primeiro notemos que todos os vizinhos de v_i em H devem possuir cores duas a duas distintas. Senão, poderíamos recolorir v_i, contrariando (2). O mesmo vale para

v_j. Então, considere P um caminho de v_i até v_j em H_{ij}. Se $P \neq C_{ij}$, então existe algum vértice em P, digamos w, que possui pelo menos três vizinhos da mesma cor. Desta forma, em H, teríamos que seriam usadas, no máximo, $\Delta - 2$ cores nos vizinhos de w. Por isso, seria possível recolorir w com uma cor diferente. Neste caso, a seção de P que vai de v_i ao predecessor de w seria um componente de H_{ij} e a seção de P que vai de v_j ao predecessor de w seria outro componente de H_{ij}, contrariando (3).

Agora, analisemos os caminhos C_{ij}. Sejam i, j, k cores distintas da Δ-coloração de H. Então

$$\boxed{\text{Os caminhos } C_{ij} \text{ e } C_{ik} \text{ se intersectam apenas em } v_i.} \tag{5}$$

De fato, se existisse $w \in C_{ij} \cap C_{ik}$, então w teria dois vizinhos de cor j e dois vizinhos de cor k, o que, em G, implica que há, no máximo, $\Delta - 2$ cores distintas nos vizinhos de w, sendo possível recolorir w com uma cor diferente. Com isso, v_i e v_j ficariam em componentes distintos de H_{ij}, contradizendo (3).

Notemos que devem existir vértices v_i e v_j não-adjacentes em G. Caso contrário, suponha que todo v_i seja adjacente a todo v_j, para $i, j = 1, 2, \ldots, \Delta$. Desta forma, $G \equiv K_{\Delta+1}$, contrariando a suposição de que G não seja um grafo completo.

Assim sendo, sem perda de generalidade, consideremos que v_1 e v_2 sejam não-adjacentes. Seja $H'' := H[V_1 \cup V_2 \cup V_3]$ e seja

$$C_{12} = \{v_1, u_1, u_2, \ldots, u_p, v_2\}$$

a componente de H'' que liga v_1 a v_2 e

$$C_{13} = \{v_1, w_1, w_2, \ldots, w_q, v_3\}$$

a componente de H'' que liga v_1 a v_3, com $p > 0$ e $q \geq 0$. Se u_i tiver a cor 1 e w_i tiver a cor 3, é certo que $u_i w_i \notin A(H'')$. De fato, se u_i e w_i fossem adjacentes, então w_i teria três vizinhos da mesma cor, o que permitiria atribuir uma cor diferente a w_i e fazer com que v_1 e v_3 ficassem em componentes distintas em H'', contrariando (3).

Consequentemente, podemos então permutar as cores de C_{13}, obtendo C'_{13}, sem invalidar a coloração de H. Desta forma, v_3 passa a ter a cor 1 e v_1 passa a ter a cor 3. Em vista disso,

1. Se v_2 for adjacente a v_3, a existência do caminho C_{12} implica que v_2 teria dois vizinhos da cor 1: v_3 e u_p. Por conseguinte, seria possível recolorir v_2 com uma nova cor e atribuir a cor 2 a v, obtendo uma Δ-coloração para G.

2. Se v_2 não for adjacente a v_3, então existe o caminho C'_{23} que vai de v_3 até v_2, alternando entre as cores 1 e 2. Como v_2 possui apenas um vizinho de cor 1, o vértice u_p, temos que C'_{23} deve se intersectar com C_{12} neste vértice, contrariando (5).

Portanto, temos uma contradição ao assumir que $\chi(G) > \Delta$. Por conseguinte, segue que $\chi(G) \leq \Delta$. ■