6 PROBLEMAS EXTREMAIS

6.1 INTRODUÇÃO

Por problemas extremais, entendemos perguntas como as dos exemplos abaixo.

(P1) Determine o número mínimo de arestas $\phi(n)$, tal que todo grafo G de ordem n e com pelo menos $\phi(n)$ arestas tem um circuito.
(P2) Determine o menor natural $\delta(n)$ tal que todo grafo de ordem n e grau mínimo pelo menos $\delta(n)$ tem um circuito hamiltoniano.
(P3) Determine o menor natural n tal que todo grafo de ordem pelo menos n tem um K_3 ou $\overline{K_3}$ como subgrafo induzido.
(P4) Determine o número máximo de arestas em um grafo de ordem n que não contém K_3.

Em particular, as respostas para as perguntas acima são:

(P1) Temos $\phi(n) = n$.
(P2) O Teorema de Dirac afirma que

$$\delta(n) = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil.$$

(P3) O Teorema de Ramsey (para o caso $(3,3)$) afirma que $n = 6$.
(P4) Veremos mais adiante que tal número é $\lceil \frac{n}{2} \rceil \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

Tipicamente, dada uma propriedade P de grafos, e um invariante I e uma classe $\mathcal{G}$ de grafos, procura-se determinar o menor valor m tal que todo grafo $G \in \mathcal{G}$ com $I(G) > m$ tem a propriedade P.

6.2 PROBLEMA DA PROIBIÇÃO DE UM DADO GRAFO

Dado um grafo G, definimos, para todo natural n o número

$$\mathrm{ex}(n, G) = \sup\{|E(H)| : H \text{ é um grafo de ordem } n \text{ com } H \not\supset G\}.$$

Neste caso, G é chamado **grafo proibido**.

Dizemos também que um grafo H de ordem n é um **grafo extremal** (relativo a G) se H tem $\mathrm{ex}(n, G)$ arestas e $H \not\supseteq G$ e denotamos o conjunto de todos os grafos extremais de ordem n por $\mathrm{EX}(n, G)$.

Por exemplo, $\mathrm{ex}(n, K_3) = \lceil \frac{n}{2} \rceil \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. O grafo $H = K_{\lceil \frac{n}{2} \rceil \lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ é um grafo extremal para $\mathcal{P}(K_3)$.

Chamamos de $\mathcal{P}(G)$ o problema de determinar o número $\mathrm{ex}(n, G)$.

Para resolver $\mathcal{P}(G)$, precisamos:

(a) Exibir um grafo extremal;
(b) Provar que todo grafo com n vértices e pelo menos $\mathrm{ex}(n, G) + 1$ arestas contém G como subgrafo.

Proibindo grafos completos

Turán, em 1941, investigou o problema $\mathcal{P}(K_p)$.

Para simplificar, considere $G \equiv K_{p+1}$. Claramente, os grafos p-partidos completos $K_{n_1,\cdots,n_p}$ de ordem n (ou seja, temos $\sum_i n_i = n$) não contêm K_{p+1}. Dentre todos os grafos desse tipo, o que tem o maior número possível de arestas é aquele que tem os blocos das partições o mais balanceado possível.

Ou seja, tomando $r = n \bmod p$ e $k = \lfloor n/p \rfloor$, o conjunto $\mathrm{EX}(n, K_{p+1})$ contém o grafo p-partido completo com $p - r$ blocos com k vértices e r blocos com $k + 1$ vértices.

Chamamos tal grafo de Grafo de Turán e o denotamos por $T_{n,p}$ (extremal que não contém K_{p+1}). Definimos também $t_{n,p} = |E(T_{n,p})|$.

Observando que

$$|E(\overline{T_{n,p}})| = (p - r)\binom{k}{2} + r\binom{k+1}{2},$$

obtemos a seguinte fórmula

$$|E(T_{n,p})| = \binom{n}{2} - \left((p-r)\binom{k}{2} + r\binom{k+1}{2}\right) = \binom{n}{2} - \frac{k(n-p+r)}{2}.$$

O seguinte teorema é um resultado clássico sobre problemas extremais. É interessante conhecer pelo menos uma prova deste resultado.

Teorema 6.1 (Turán, 1941). Dentre todo os grafos de ordem n que não contêm K_{p+1}, existe exatamente um com o número máximo de arestas, sendo esse o $T_{n,p}$.

Demonstração. (Técnica de "chopping") Provaremos por indução em n.

Observe que para $n \leq p$ o resultado é trivial.

Suponha então que $n > p$ e que o resultado é válido para $n-1$.

Seja G um grafo extremal de ordem n (em relação a K_{p+1}). Como a adição de qualquer aresta a G cria uma cópia de K_{p+1}, sabemos que existe uma cópia H de K_p em G.

Sejam $q_1 = |E(H)| = \binom{p}{2}$, $q_2 = |\{vw \in E(G) : v \in V(G) \setminus V(H), w \in V(H)\}|$ e $q_3 = |E(G - V(H))|$.

Como cada vértice de $V(G) \setminus V(H)$ é adjacente a no máximo $p-1$ vértices de H, temos $q_2 \leq (n-p)(p-1)$.

Além disso, pela hipótese de indução, sabemos que $q_3 \leq t_{n-p,p}$, pois $G - V(H)$ não contém uma cópia de K_{p+1}.

Tomando $r = n \bmod p$ e $k = \lfloor n/p \rfloor$, temos que

$$\begin{aligned}
|E(G)| = q_1 + q_2 + q_3 &\leq \binom{p}{2} + (n-p)(p-1) + t_{n-p,p} \\
&= \binom{p}{2} + (n-p)(p-1) + \left(\binom{n-p}{2} - \left\lfloor \frac{n-p}{p} \right\rfloor \frac{(n-p-p+r)}{2}\right) \\
&= \binom{p}{2} + (n-p)(p-1) + \frac{(n-p)(n-p-1)}{2} - \frac{(k-1)(n-2p+r)}{2} \\
&= \binom{p}{2} + \frac{(n-p)(n+p-3)}{2} - \frac{k(n-p+r)}{2} + \frac{kp}{2} + \frac{n-2p+r}{2} \\
&= \frac{n^2-3n+2p}{2} - \frac{k(n-p+r)}{2} + (n-p) \\
&= \binom{n}{2} - \frac{k(n-p+r)}{2} = t_{n,p}.
\end{aligned}$$

Ou seja, temos $|E(G)| \leq t_{n,p}$. Como $T_{n,p}$ não possui nenhuma cópia de K_{p+1} e G é extremal, segue a outra desigualdade e, portanto, temos $|E(G)| = t_{n,p}$.

Isso significa também que temos $q_2 = (n-p)(p-1)$ e $q_3 = t_{n-p,p}$. Pela hipótese de indução, temos que $G - V(H) \cong T_{n-p,p}$. Ademais, o valor de q_2 nos garante que cada vértice $v \in V(G) \setminus V(H)$ é adjacente a todo $w \in V(H)$, com exceção de um deles. Isso determina uma partição de $V(G)$ em p classes. De fato, se $V(H) = \{v_1, \ldots, v_p\}$, então temos a partição $V_1, \ldots, V_p$, onde $V_i = \{v \in V(H) : v \text{ não é adjacente a } v_i\}$.

Portanto $G \cong T_{n,p}$ (G é balanceado pois $T_{n-p,p}$ é balanceado por hipótese de indução). □

Uma outra prova pode ser obtida usando-se a **técnica da simetrização**, definida por Zykov(1949). Omitiremos essa prova, mas apresentaremos a definição desse conceito.

Defina a **operação de simetrização** de um vértice u em relação a um vértice $v \neq u$, v não adjacente a u, como a remoção das arestas incidentes a u, adição das arestas uw para todo $w \in N_G(v) \setminus \{u\}$.

Observe que se u e v são dois vértices distintos e não-adjacentes de um grafo G, temos que:

- Se G não possui uma cópia de K_{p+1}, então após a operação de simetrização de u em relação a v, o novo grafo também não possui uma cópia de K_{p+1}.
- Se G' é o grafo obtido após a operação de simetrização de u em relação a v, então $|E(G')| = |E(G)| + |N_G(v) \setminus \{u\}| - d_G(u)$.

Usando a técnica da simetrização, Erdős (1970) provou o seguinte resultado (exercício):

Teorema: Seja G é um grafo livre de K_{p+1} sobre n vértices. Então existe um grafo p-partido H sobre o mesmo conjunto de vértices, com $d_H(x) \geq d_G(x)$ para todo $x \in V(G)$.

Corolário 6.2 Para todo natural $n \geq 3$, temos que $\mathrm{EX}(n, K_3) = \left\{K_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor \lceil \frac{n}{2} \rceil}\right\}$ e $\mathrm{ex}(n, K_3) \leq \frac{n^2}{4}$.

Corolário 6.3 Se $n \geq p+1$, então todo grafo com n vértices e $t_{n,p}+1$ arestas contém um $K_{p+1} - e$ (onde e é uma aresta qualquer de K_{p+1}).

Demonstração. Provaremos por indução em n.

Observe que para $n = p+1$ o resultado é trivial (pois $t_{p+1,p-1} + 1 = \binom{p+1}{2} - 1$).

Suponha então que $n > p+1$ e que o resultado é válido para grafos de ordem menor que n.

Seja G um grafo de ordem n com $t_{n,p-1} + 1$ arestas.

Suponha que $\delta(G) > \delta(T_{n,p-1})$, então, como $|E(G)| = |E(T_{n,p-1})| + 1$, sabemos que G é um grafo $p-1$-partido completo, logo G contém um $K_{p+1} - e$.

Suponha então que $\delta(G) \leq \delta(T_{n,p-1})$, seja $x \in V(G)$ tal que $d_G(x) = \delta(G)$ e observe que $|E(G-x)| = t_{n,p-1} + 1 - \delta(G) \geq |E(T_{n,p-1})| + 1 - \delta(T_{n,p-1}) = |E(T_{n-1,p-1})| + 1 = t_{n-1,p-1}$.

Portanto, pela hipótese de indução temos $G \supseteq G - x \supseteq K_{p+1} - e$. □

Exercício 6.1. Temos que

$$t_{n,p-1} \leq \frac{1}{2} n^2 \frac{p-2}{p-1},$$

e vale a igualdade quando $p-1$ divide n.

Corolário 6.4 Temos

$$\lim_{n \to \infty} \frac{t_{n,p-1}}{\binom{n}{2}} = \frac{p-2}{p-1}.$$

Na verdade, a proposição acima pode ser generalizada para um resultado que depende do Teorema de Erdős & Stone enunciado a seguir.

Informalmente, esse teorema diz que com apenas mais ϵn^2 arestas adicionais temos não apenas o K_p, mas um K_s^p, isto é, um p-partido completo com classes de ordem s.

Teorema 6.5 (Erdős & Stone, 1946). Para todo $p \geq 2$ e $s \geq 1$ inteiros, e para todo $\epsilon > 0$, existe um inteiro n_0 tal que todo grafo com $n \geq n_0$ vértices e pelo menos $t_{n,p-1} + \epsilon n^2$ arestas contém um K_s^p como subgrafo.

O seguinte corolário generaliza o Corolário 6.4.

Corolário 6.6 (Erdős & Stone). Para todo grafo G,

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\mathrm{ex}(n, G)}{\binom{n}{2}} = \frac{\chi(G) - 2}{\chi(G) - 1}.$$

Demonstração. (Corolário 6.6) Seja $p = \chi(G)$. Como G não pode ser $(p-1)$-colorido, temos que $G \not\subseteq T_{n,p-1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, e, portanto, temos $t_{n,p-1} \leq \mathrm{ex}(n, G)$.

Por outro lado, para todo s suficientemente grande temos $G \subseteq K_s^p$ ($s \geq \Delta(G)$ é suficiente). Logo, temos $\mathrm{ex}(n, G) \leq \mathrm{ex}(n, K_s^p)$.

Vamos fixar um tal s. Para todo $\epsilon > 0$, o Teorema 6.5 implica que para n suficientemente grande temos $\mathrm{ex}(n, K_s^p) < t_{n,p-1} + \epsilon n^2$.

Portanto, para n suficientemente grande temos que

$$\begin{aligned}\frac{t_{n,p-1}}{\binom{n}{2}} \leq \frac{\mathrm{ex}(n,G)}{\binom{n}{2}} \leq \frac{(n, K_s^p)}{\binom{n}{2}} < \frac{t_{n,p-1} + \epsilon n^2}{\binom{n}{2}} \\ = \frac{t_{n,p-1}}{\binom{n}{2}} + \frac{2\epsilon}{1 - \frac{1}{n}} \leq \frac{t_{n,p-1}}{\binom{n}{2}} + 4\epsilon\end{aligned}$$

Usando o Corolário 6.4, concluímos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{ex}(n,G)}{\binom{n}{2}} = \frac{p-2}{p-1} = \frac{\chi(G)-2}{\chi(G)-1}.$$

□

Circuitos

Nesta seção, denotaremos por $s(n)$ o número mínimo de arestas tal que todo grafo com n vértices contém dois circuitos disjuntos nos vértices.

Teorema 6.7 Para todo $n \geq 6$, temos $s(n) = 3n - 5$.

Demonstração. Observe primeiramente que $K_{1,1,1,n-3}$ tem $3(n-3)+3 = 3n-6$ arestas e quaisquer dois circuitos se intersectam nos vértices, logo $s(n) \geq 3n - 5$.

Por indução em n, vamos provar que se G tem $3n - 5$ arestas, então existem dois circuitos de G que não se intersectam.

Se $n = 6$, então G tem 13 arestas. Isso significa que G é isomorfo a K_6 menos duas arestas e, portanto, tem duas cópias disjuntas de K_3.

Suponha então que $n > 6$ e que o resultado é válido para $n - 1$.

Observe que $\delta(G) \leq 5$ e seja $v \in V(G)$ um vértice de grau mínimo.

Também sabemos que se algum conjunto de 6 vértices possuir pelo menos 13 arestas, então G possuirá duas cópias disjuntas de K_3.

Caso 1: temos $d_G(v) = 5$.

Considere o grafo $G' = G - v$ e adicione duas arestas a um mesmo vértice de $N_G(v)$, observe que o novo grafo G'' possui $n - 1$ vértices e pelo menos $3n - 8$ arestas.

Pela hipótese de indução, existem dois circuitos disjuntos em G''.

Se eles não usam as arestas novas, então o resultado vale para G' e portanto, para G.

Se um dos circuitos, digamos C, usa pelo menos uma das arestas novas, o outro não pode usar nenhuma aresta nova (pois os circuitos são disjuntos).

Portanto, podemos estender C para passar por v e evitar usar a aresta nova, obtendo assim dois circuitos disjuntos em G.

Caso 2: temos $d_G(v) = 4$.

Considere o grafo $G' = G - v$ e adicione uma aresta incidente a um vértice de $N_G(v)$, observe que o novo grafo G'' possui $n - 1$ vértices e pelo menos $3n - 8$ arestas.

Pela hipótese de indução, existem dois circuitos disjuntos em G''.

Se um desses circuitos usar a aresta nova, podemos estendê-lo para passar por v e evitar usá-la, obtendo assim dois circuitos disjuntos em G.

Caso 3: temos $d_G(v) = 3$. Considere o grafo $G' = G - v$ e observe que ele possui $n - 1$ vértices e pelo menos $3n - 8$ arestas.

Logo, pela hipótese de indução, existem dois circuitos disjuntos em G' e, portanto, em G. □

Teorema 6.8 Se G é um grafo com n vértices e m arestas e G não possui nenhuma cópia de C_4, então $m \leq \frac{n}{4}(1 + \sqrt{4n-3})$. Isto é, temos $\mathrm{ex}(n, C_4) \leq \frac{n}{4}(1 + \sqrt{4n-3})$.

Demonstração. Observe que se G é um grafo com n vértices e m arestas e não possui nenhuma cópia de C_4, então para todo par de vértices x e y distintos, existe no máximo um z tal que $N_G(z) \supset \{x, y\}$.

Dessa observação, tiramos a seguinte desigualdade

$$\sum_{z \in V(G)} \binom{d(z)}{2} \leq \binom{n}{2}.$$

Observe agora que a função

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 1; \\ \binom{x}{2}, & \text{se } x \geq 1; \end{cases}$$

é convexa, logo, pela Desigualdade de Jensen, temos

$$\frac{1}{n} \sum_{z \in V(G)} \binom{d(z)}{2} \geq \binom{2m/n}{2}.$$

Donde segue que

$$\frac{n(n-1)}{2} \geq \frac{2m(2m-n)}{2n} = \frac{m(2m-n)}{n},$$

ou seja, temos

$$4m^2 - 2mn - n^3 + n^2 \leq 0.$$

Finalmente concluímos que

$$m \leq \frac{2n + \sqrt{4n^2 + 16(n^3 - n^2)}}{8} = \frac{n}{4}(1 + \sqrt{4n-3}).$$

Portanto temos que $\mathrm{ex}(n, C_4) \leq \frac{n}{4}(1 + \sqrt{4n-3})$. □

6.3 EXERCÍCIOS

Exercício 6.2. Determine o valor de $\mathrm{ex}(n, K_{1,r})$, para todos os naturais r, n.

Exercício 6.3. Prove que todo grafo com n vértices e $m = \frac{n}{4}(1+\sqrt{4n-3})$ arestas contém uma cópia de C_4.

Exercício 6.4. Prove que $t_{n,p-1}\binom{n}{2}^{-1}$ converge para $(p-2)/(p-1)$ quando $n \to \infty$. *Sugestão:* veja a sugestão dada no exercício 9 do livro de R. Diestel (Capítulo 7).

6.4 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[AH89] K.I. Appel and W. Haken. *Every Planar Map Is Four Colorable*. Contemporary mathematics, v. 98. American Mathematical Society, 1989.

[BM08] A. Bondy and U.S.R. Murty. *Graph Theory*. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 2008.

[Bol98] B. Bollobás. *Modern graph theory*. Graduate Texts in Mathematics Series. Springer-Verlag GmbH, 1998.

[Bro87] R.L. Brooks. On colouring the nodes of a network. In Ira Gessel and Gian-Carlo Rota, editors, *Classic Papers in Combinatorics*, Modern Birkhäuser Classics, pages 118–121. Birkhäuser Boston, 1987.

[CCPS11] W.J. Cook, W.H. Cunningham, W.R. Pulleyblank, and A. Schrijver. *Combinatorial Optimization*. Wiley Series in Discrete Mathematics and Optimization. Wiley, 2011.

[CRST06] Maria Chudnovsky, Neil Robertson, Paul Seymour, and Robin Thomas. The strong perfect graph theorem. *ANNALS OF MATHEMATICS*, 164:51–229, 2006.

[Die05] Reinhard Diestel. *Graph Theory (Graduate Texts in Mathematics)*. Springer, August 2005.

[ES35] P. Erdös and G. Szekeres. A combinatorial problem in geometry. *Compositio Math.*, 2:463–470, 1935.

[Fle14] Tamás Fleiner. Yet another proof for brooks' theorem. Technical Report QP-2014-01, Egerváry Reserch Group, Budapest, 2014. www.cs.elte.hu/egres.

[HS70] A. Hajnal and E. Szemerédi. Proof of a conjecture of P. Erdős. In *Combinatorial theory and its applications, II (Proc. Colloq., Balatonfüred, 1969)*, pages 601–623. North-Holland, Amsterdam, 1970.

[HT74] John Hopcroft and Robert Tarjan. Efficient planarity testing. *Journal of the ACM (JACM)*, 21(4):549–568, 1974.

[Kru60] J. B. Kruskal. Well-quasi-ordering, the Tree Theorem, and Vazsonyi's conjecture. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 95:210–225, 1960.

[Lov75] L Lovász. Three short proofs in graph theory. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 19(3):269 – 271, 1975.

[Mac37] Saunders MacLane. A combinatorial condition for planar graphs. *Fund. Math*, 28:22–32, 1937.

[Mak97] Yury Makarychev. A short proof of kuratowski's graph planarity criterion. *J. Graph Theory*, 25:129–131, 1997.

[NC88] Takao Nishizeki and Norishige Chiba. *Planar graphs: Theory and algorithms*, volume 140. North Holland, 1988.

[NRS06] Brendan Nagle, Vojtech Rödl, and Mathias Schacht. The counting lemma for regular k-uniform hypergraphs. *Random Struct. Algorithms*, 28(2):113–179, 2006.

[OPT01] Deryk Osthus, Hans Jürgen Prömel, and Anusch Taraz. Almost all graphs with high girth and suitable density have high chromatic number. *J. Graph Theory*, 37(4):220–226, August 2001.

[Ore55] Oystein Ore. Graphs and matching theorems. *Duke Math. J.*, 22:625–639, 1955.

[PL86] D. Plummer and L. Lovász. *Matching Theory*. North-Holland Mathematics Studies. Elsevier Science, 1986.

[Ric46] M. Richardson. On weakly ordered systems. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 52:113–116, 1946.

[Tho80] C. Thomassen. *Kuratowski's Theorem*. Preprint series: Matematisk Institut. Matematisk Inst., Univ., 1980.

[Tho81] Carsten Thomassen. Kuratowski's theorem. *Journal of Graph Theory*, 5:225–241, 1981.

[Tho88] Andrew Thomason. An upper bound for some Ramsey numbers. *J. Graph Theory*, 12(4):509–517, 1988.

[TT81] C. Thomassen and B. Toft. Non-separating induced cycles in graphs. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 31(2):199–224, October 1981.

[Wes] Douglas B. West. Ore, Berge–Tutte, and Gallai–Edmonds.

[Wes11] Douglas B. West. A short proof of the Berge–Tutte Formula and the Gallai–Edmonds Structure Theorem. *European Journal of Combinatorics*, 32(5):674–676, 2011.