

### 3 CONEXIDADE

Seja  $G$  um grafo. Dizemos que  $G$  é  $k$ -**conexo** se, para todo  $S \subseteq V(G)$  e  $|S| < k$ , temos que o grafo  $G - S$  é conexo e possui ao menos dois vértices.

Analogamente, dizemos que  $G$  é  $k$ -**aresta-conexo** se, para todo  $F \subseteq E(G)$ , com  $|F| < k$ , temos que  $G - F$  é conexo e possui ao menos dois vértices.

Além disso, convencionamos que todo grafo é 0-conexo e 0-aresta-conexo.

Finalmente, definimos a **conexidade** de  $G$  (**connectivity of  $G$** ), denotada por  $K(G)$ , como o maior natural  $k$  tal que  $G$  é  $k$ -conexo e definimos a **aresta-conexidade** de  $G$  (**edge connectivity of  $G$** ), denotada por  $K'(G)$ , como o maior natural  $k$  tal que  $G$  é  $k$ -aresta-conexo.

**Exercício 3.1.** Mostre que  $K(G) \leq K'(G) \leq \delta(G)$ .

Para provar as várias versões do teorema de Menger, vamos agora considerar digrafos (grafos orientados), em particular, permitimos aqui arestas múltiplas. Note que isso é diferente de uma **orientação** de um grafo, quando partimos de um grafo e orientamos suas arestas.

Para facilitar a notação, se  $G$  é um grafo (ou digrafo) e  $s$  e  $t$  são dois de seus vértices, então chamamos de  **$st$ -caminho** qualquer caminho (orientado, no caso de digrafos) de  $s$  a  $t$ .

Um digrafo  $D$  é dito **fortemente conexo** se para quaisquer dois vértices  $u, v$  existe em  $D$  um  $uv$ -caminho (Isto significa que existe também um  $vu$ -caminho).

Além disso, definimos  $k$ -conexidade forte,  $k$ -aresta-conexidade forte,  $K(D)$  e  $K'(D)$  analogamente, trocando “conexo” por “fortemente conexo”.

Finalmente, se  $G$  é um grafo conexo (ou digrafo fortemente conexo) e  $S \subseteq V(G)$  é tal que  $G - S$  é desconexo, então dizemos que  $S$  é um



Figura 3.1: Um  $st$ -caminho, *i.e.*, um caminho orientado de  $s$  para  $t$ . Os arcos em um tal caminho devem ter “mesma” orientação.

**conjunto separador** de  $G$ .

#### 3.1 TEOREMA DE Menger

O teorema de Menger caracteriza a noção de conexidade através de caminhos disjuntos.

**Teorema 3.1** (Menger, 1927). Seja  $D = (V, E)$  um digrafo,  $s, t \in V$ , e  $s \neq t$ . O número *máximo* de  $st$ -caminhos em  $D$  disjuntos nos arcos é igual ao número *mínimo* de arcos cuja remoção destrói todos os  $st$ -caminhos.

A prova tradicional é por *maxflow*. Faremos outra. Se  $X \subseteq V$ , denotamos por  $\delta^+(X)$  o conjunto dos arcos de  $D$  que saem de  $X$  (*i.e.*, têm a cauda em  $X$  e a cabeça em  $\bar{X} = V \setminus X$ ). Chamamos  $\delta^+(X)$  de **corte de  $X$** ; dizemos que  $X$  é um **corte  $st$ -separador** se  $s \in X$  e  $t \in \bar{X}$ .

*Demonstração.* A seguinte prova é devido a András Frank, e usa funções submodulares definidas abaixo.

Primeiramente, uma função  $f : 2^X \mapsto \mathbb{R}$  das partes de  $X$  nos reais é dita **submodular** se  $f(U \cup V) + f(U \cap V) \leq f(U) + f(V)$ . Se há igualdade em vez de “ $\leq$ ” a função é **modular**, e se há “ $\geq$ ” a função é **supermodular**.

O teorema 3.1 é um corolário do seguinte.

**Teorema 3.2** Seja  $D = (V, E)$  um digrafo,  $s, t \in V$ , e  $s \neq t$ . Em  $D$  existem pelo menos  $k$   $st$ -caminhos disjuntos nos arcos se e só se  $\delta^+(X) \geq k$  para todo  $X \subseteq V$  que é corte  $st$ -separador (i.e.,  $s \in X$  e  $t \notin X$ ).

Vamos provar inicialmente que o teorema 3.2 de fato implica o teorema 3.1.

Seja  $k$  o número máximo de  $st$ -caminhos disjuntos nos arcos, então, pelo teorema 3.2, existe um  $X \subseteq V$  corte  $st$ -separador tal que  $\delta^+(X) < k + 1$ . A remoção de  $\delta^+(X)$  certamente desconecta  $s$  de  $t$ . Por outro lado a remoção de  $k - 1$  arestas certamente não desconecta  $s$  de  $t$ , pois todo corte  $X$   $st$ -separador passa a ter ao menos um arco em  $\delta^+(X)$ .

Vamos agora provar o teorema 3.2.

Suponha que  $D$  é  $k$ -conexo, então cada corte intercepta ao menos uma aresta de cada caminho, e os caminhos são disjuntos, donde  $|X| \geq k$ .

**Exercício 3.2.** Mostre que a função  $f(X) = |\delta^+(X)|$  é submodular.

A prova da recíproca é por indução no número de arcos. Dizemos que um corte  $st$ -separador é **justo** se  $|\delta^+(X)| = k$ . Suponha que  $|\delta^+(X)| \geq k$  para todo corte  $st$ -separador.

Observe que

$$|\delta^+(X)| + |\delta^+(Y)| \geq |\delta^+(X \cup Y)| + |\delta^+(X \cap Y)| \geq k + k.$$

Donde segue que se  $X$  e  $Y$  são justos, então  $X \cup Y$  e  $X \cap Y$  são justos.

Vamos supor que todo arco de  $D$  pertence a um conjunto justo (senão podemos deletá-lo e usar a hipótese indutiva).

Tome  $v \neq s$  e  $X$  tais que  $vt \in \delta^+(X)$  e  $X$  é justo (Figura 3.2). Observe que se não existisse tal  $v$ , então todos os arcos de  $D$  seriam da forma  $st$  e o resultado seguiria trivialmente.

Seja  $S$  a interseção de todos os conjuntos justos  $X$  tais que  $\delta^+(X)$  contém  $vt$  (note que  $S$  é justo). Vamos provar que existe  $u \in S$  com  $uv \in E(D)$ .

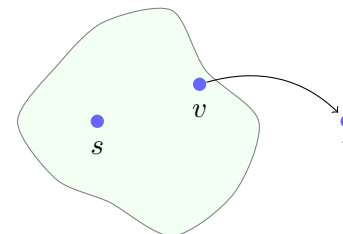


Figura 3.2: Exemplo de escolha do vértice  $v$  e do conjunto justo  $X$  da demonstração do Teorema 3.2.

Suponha que não há tal  $u$  e observe que  $\delta^+(S \setminus \{v\})$  deve possuir ao menos  $k$  arcos pois  $S \setminus \{v\}$  é corte  $st$ -separador, mas isso significa que  $\delta^+(S)$  possui ao menos  $k + 1$  arcos, o que contradiz sua definição.

Tomemos então  $u \in S$  com  $uv \in E(D)$  e  $D'$  o digrafo definido a partir de  $D$  removendo os arcos  $uv$  e  $vt$  e incluindo um novo arco  $ut$  (Figura 3.3), note que essa operação poderá gerar arcos múltiplos.

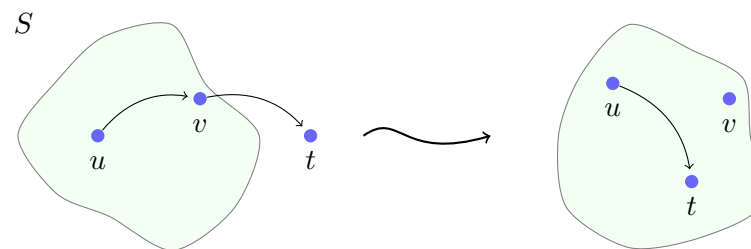


Figura 3.3: À esquerda, um exemplo de digrafo  $D$  da demonstração do Teorema 3.2. À direita, o digrafo  $D'$  construído.

Certamente  $|E(D')| = |E(D)| - 1$ . Vamos mostrar que  $D'$  satisfaz a hipótese do teorema.

Tome  $X$  um corte  $st$ -separador em  $D'$  arbitrário e suponha por absurdo que  $|\delta_{D'}^+(X)| < k$ .

Observe que, se  $u, v \notin X$ , então  $\delta_{D'}^+(X) = \delta_D^+(X)$ , logo  $|\delta_{D'}^+(X)| \geq k$ .

Por outro lado, se  $u \in X$  e  $v \notin X$ , então também temos  $|\delta_{D'}^+(X)| = |\delta_D^+(X)| \geq k$ , já que a remoção do arco  $uv$  foi compensada pela adição do arco  $ut$ .

O mesmo vale para o caso  $u, v \in X$ , pois a remoção do arco  $vt$  foi compensada pela adição do arco  $ut$ .

Resta apenas o caso  $u \notin X$  e  $v \in X$ . Mas então  $k > |\delta_{D'}^+(X)| = |\delta_D^+(X)| - 1 \geq k$ , logo  $|\delta_D^+(X)| = k$ , i.e.  $X$  é justo em  $D$ . Observe que  $vt \in \delta_D^+(X)$ , mas  $X$  não contém  $u$ , o que contradiz a escolha de  $S$ , pois  $u \in S$ .

Portanto podemos aplicar a hipótese indutiva para  $D'$ , então temos  $k$   $st$ -caminhos em  $D'$  disjuntos nos arcos. Para obter os  $st$ -caminhos em  $D$ , basta substituir o arco adicionado  $ut$  pelos arcos removidos  $uv$  e  $vt$ .  $\square$

A partir do teorema 3.1, podemos deduzir as seguintes outras versões.

**Teorema 3.3** Seja  $D = (V, E)$  um digrafo,  $s, t \in V$ ,  $s \neq t$  e  $st \notin E$ . O número *máximo* de  $st$ -caminhos em  $D$  internamente disjuntos nos vértices é igual ao número *mínimo* de vértices em  $V \setminus \{s, t\}$  cuja remoção destroi todos os  $st$ -caminhos.

*Demonstração.* Certamente não há como destruir todos os  $st$ -caminhos removendo menos vértices do que o número máximo de  $st$ -caminhos.

Considere  $D'$  o digrafo tal que  $V(D') = \{v^+ : v \in V(D)\} \cup \{v^- : v \in V(D)\}$  e  $E(D') = \{x^+y^- : xy \in E(D)\} \cup \{v^-v^+ : v \in V(D)\}$ .

Observe que caminhos disjuntos nos arcos em  $D'$  correspondem a caminhos internamente disjuntos nos vértices em  $D$ .

Além disso, remover um vértice  $v$  de  $D$  corresponde a remover o arco  $v^-v^+$  de  $D'$ .

Logo o teorema 3.1 aplicado a  $D'$  nos dá o resultado para  $D$ .  $\square$

**Teorema 3.4** Seja  $G = (V, E)$  um grafo,  $s, t \in V$ , e  $s \neq t$ . O número *máximo* de  $st$ -caminhos disjuntos nas arestas em  $D$  é igual ao número *mínimo* de arcos cuja remoção destroi todos os  $st$ -caminhos.

*Demonstração.* Seja  $D$  o digrafo obtido a partir de  $G$  trocando cada aresta  $uv$  pelos arcos  $(u, v)$  e  $(v, u)$ . Porém, não basta apenas aplicar o teorema para o digrafo e remover a orientação dos arcos, pois nada impede que ambos os arcos do par sejam usados, cada uma por um caminho diferente.

Para resolver esse problema, consideramos o digrafo induzido pelos arcos contidos nos caminhos e adicionamos  $k$  arcos da forma  $ts$ , observe que todo vértice desse digrafo possui grau de entrada igual ao grau de saída e que essa propriedade é mantida se eliminarmos todos os pares de arcos  $(u, v)$  e  $(v, u)$  sucessivamente correspondentes a orientações opostas de uma mesma aresta.

Ao final desse procedimento, obtemos um digrafo  $D'$  euleriano pelo teorema 1.7. Cada seção da trilha euleriana entre duas ocorrências sucessivas de arcos da forma  $ts$  corresponde a um dos  $k$   $st$ -caminhos.  $\square$

**Teorema 3.5** Seja  $G = (V, E)$  um grafo,  $s, t \in V$ ,  $s \neq t$  e  $st \notin E$ . O número *máximo* de  $st$ -caminhos em  $G$  internamente disjuntos nos vértices é igual ao número *mínimo* de vértices em  $V \setminus \{s, t\}$  cuja remoção destroi todos os  $st$ -caminhos.

*Demonstração.* Análoga à prova do teorema 3.3, mas usando o teorema 3.4 ao invés do teorema 3.1.  $\square$

A partir dos teoremas 3.1, 3.3, 3.4 e 3.5, seguem os seguintes corolários.

**Corolário 3.6** Um digrafo  $D$  é  $k$ -fortemente-arco-conexo se e somente se para todo par de vértices distintos  $v$  e  $w$  existem  $k$  caminhos orientados disjuntos nos arcos de  $v$  a  $w$ .

**Corolário 3.7** Um digrafo  $D$  é  $k$ -fortemente-conexo se e somente se para todo par de vértices distintos  $v$  e  $w$  existem  $k$  caminhos orientados internamente disjuntos nos vértices de  $v$  a  $w$ .

**Corolário 3.8** Um grafo  $G$  é  $k$ -aresta-conexo se e somente se para todo par de vértices distintos  $v$  e  $w$  existem  $k$  caminhos disjuntos nas arestas de  $v$  a  $w$ .

**Corolário 3.9** Um grafo  $G$  é  $k$ -conexo se e somente se para todo par de vértices distintos  $v$  e  $w$  existem  $k$  caminhos internamente disjuntos nos vértices de  $v$  a  $w$ .

### 3.2 2-CONEXIDADE E 2-ARESTA-CONEXIDADE

Seja  $G$  um grafo e  $H$  um subgrafo de  $G$ , um  $H$ -caminho em  $G$  é um caminho  $P$  em  $G$  não-trivial que intersecta  $H$  precisamente nos seus extremos. Dado um grafo  $G$  e um subgrafo  $H \subseteq G$ , uma  $H$ -orelha é um  $H$ -caminho ou um circuito em  $G$  onde *exatamente um* de seus vértices pertence a  $H$ .

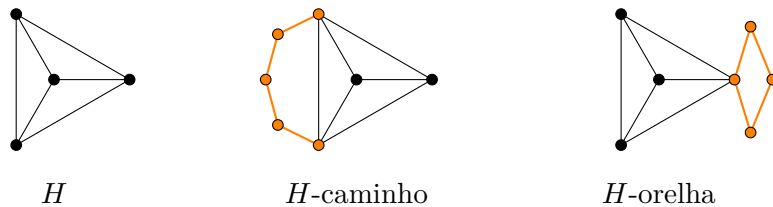


Figura 3.4: Exemplo de  $H$ -caminho e  $H$ -orelha.

**Observação:** Para diferenciar os dois tipos de  $H$ -orelhas há autores que usam os termos "open ear" e "closed ear" quando é um circuito.

Um vértice  $v$  de um grafo  $G$  é dito **vértice de corte** de  $G$  se existe uma partição de  $E(G)$  em dois conjuntos não-vazios  $A$  e  $B$  tal que se  $a \in A$  e  $b \in B$  são arestas adjacentes, então ambas incidem em  $v$ .

No caso em que  $G$  é um grafo simples, então  $v$  é vértice de corte se e somente se a remoção do vértice  $v$  aumenta o número de componentes conexos.

Dada uma aresta  $e = xy$  de um grafo  $G$ , o grafo obtido pela **subdivisão da aresta**  $e$  é o grafo obtido de  $G$  pela remoção da aresta  $e$ , e pela adição de um novo vértice  $w$  vizinho a  $x$  e  $y$ .

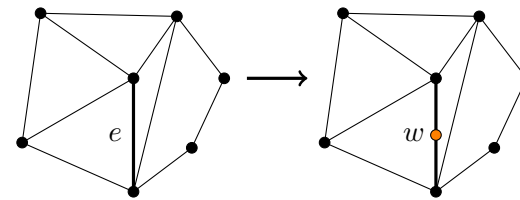


Figura 3.5: Exemplo de subdivisão da aresta  $e$ .

Dada uma aresta  $e = xy$  de um grafo  $G = (V, E)$ , o grafo obtido pela **contração da aresta**  $e$ , denotado por  $G/e$ , é o grafo obtido de  $G$  pela remoção dos vértices  $x$  e  $y$ , e pela adição de um novo vértice  $v_e$  vizinho aos vizinhos de  $x$  e  $y$  em  $G - x - y$ . Dado um conjunto  $U \subseteq V$  de um grafo  $G$ , o grafo obtido de  $G$  pela **contração do conjunto de vértices**  $U$ , denotado por  $G/U$ , é o grafo obtido de  $G$  pela remoção dos vértices de  $U$ , e pela adição de um novo vértice  $v_U$  vizinho aos vizinhos dos vértices de  $U$  em  $G - U$ .

Mais formalmente, dado um conjunto de vértices  $U \subseteq V$ , o grafo  $G/U$  é o grafo  $(V', E')$  onde

- $V' = (V \setminus U) \cup \{v_U\}$  ( $v_U \notin V(G)$ ); e

- $E' = \{uv \in E : \{u, v\} \cap U = \emptyset\} \cup \{v'w : \text{existe } x \in U \text{ tal que } xw \in E \setminus E(G[U])\}$ .

**Observação:** A contração de uma aresta  $e = xy$  pode ser vista como um caso especial de contração de conjunto de vértices  $U$  onde  $U = \{x, y\}$ .

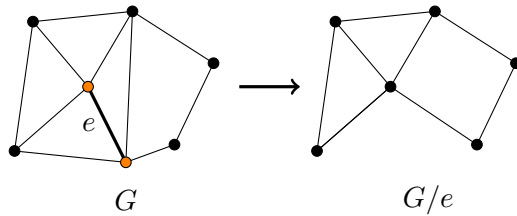


Figura 3.6: Exemplo de contração da aresta  $e$ .

**Teorema 3.10** Seja  $G$  um grafo com ao menos 3 vértices. São equivalentes

- $G$  é 2-conexo;
- Quaisquer dois vértices de  $G$  pertencem a um circuito comum;
- Quaisquer duas arestas de  $G$  pertencem a um circuito comum;
- $G$  pode ser construído a partir de um circuito (não um laço) com a adição sucessiva de  $H$ -caminhos a grafos  $H$  já construídos (decomposição em orelhas que é “própria”).

*Demonstração.* (a  $\Leftrightarrow$  b) Consequência direta do teorema 3.5.

(b  $\Rightarrow$  c) Se  $e$  e  $f$  são duas arestas, subdivida cada uma em duas e observe que o grafo resultante  $G'$  é 2-conexo (pois não possui vértice de corte). Portanto, como a  $\Rightarrow$  b, então  $G'$  contém um circuito com ambos os vértices novos, o que significa que  $G$  possui um circuito contendo as duas arestas.

(c  $\Rightarrow$  d) Seja  $G' \subseteq G$  um subgrafo construído como no item d com o maior número de arestas possível. Se  $G' = G$ , não há o que fazer.

Suponha então que  $G'$  é um subgrafo próprio de  $G$ .

Vamos mostrar que todo vértice  $v$  de  $G$  está em  $G'$ . Suponha, por absurdo, que não e tome em  $G$  um circuito  $C$  envolvendo uma aresta adjacente a  $v$  e alguma aresta de  $G'$  (existe devido a c). Tome então o caminho maximal nas arestas de  $(G - G') \cap C$  que contém  $v$  e contém no máximo dois vértices em  $G'$ . Ele é um  $G'$ -caminho (note que a presença de uma aresta de  $G'$  em  $C$  garante que há mais de um vértice de  $G'$  em  $C$ ), o que contradiz a maximalidade de  $G'$ .

Logo todo vértice de  $G$  está em  $G'$ .

Mas então  $G'$  é um subgrafo gerador de  $G$ , isso significa que toda aresta de  $G'$  que não é aresta de  $G$  é um  $G'$ -caminho, novamente contradizendo a maximalidade de  $G'$ .

(d  $\Rightarrow$  a) Consequência direta da construção de  $G$ : para desconectar  $G$  é necessário remover ao menos dois vértices (isso é verdade em um circuito e permanece verdade com a adição sucessiva de  $H$ -caminhos a  $G$ ).  $\square$

**Teorema 3.11** Seja  $G$  um grafo com ao menos 3 vértices. São equivalentes:

- $G$  é 2-aresta-conexo;
- Para quaisquer dois vértices de  $G$  existem dois caminhos arestas-disjuntos ligando-os;
- $G$  é conexo e qualquer aresta de  $G$  pertence a um circuito;
- $G$  pode ser construído a partir de um vértice com a adição sucessiva de  $H$ -orelhas a grafos  $H$  já construídos (decomposição em orelhas).
- $G$  pode ser construído a partir de um circuito acrescentando sequencialmente arestas (podem ser laços) e subdividindo arestas;

*Demonstração.* (a  $\Leftrightarrow$  b) Consequência direta do teorema 3.4.

(b  $\Rightarrow$  c) Certamente todo par de vértices está conectado, logo  $G$  é conexo.

Além disso, se  $xy$  é aresta de  $G$ , então há dois caminhos disjuntos nas arestas entre  $x$  e  $y$ . Certamente um deles, digamos  $P$ , não usa a aresta  $xy$ . Mas então o circuito formado pela adição da aresta  $xy$  a  $P$  possui a aresta  $xy$ .

(c  $\Rightarrow$  d) Seja  $G' \subseteq G$  um subgrafo construído como no item d com o maior número de arestas possível. Se  $G' = G$ , não há o que fazer.

Suponha então que  $G'$  é um subgrafo próprio de  $G$ .

Vamos mostrar que todo vértice  $v$  de  $G$  está em  $G'$ . Suponha, por absurdo, que não e tome em  $G$  um circuito  $C$  envolvendo uma aresta adjacente a  $v$  (existe devido a c). Tome então a trilha maximal nas arestas de  $(G - G') \cap C$  que contém  $ve$  contém no máximo dois vértices de  $G'$  (note que tal trilha pode ser o circuito inteiro). Ela é uma  $G'$ -orelha, o que contradiz a maximalidade de  $G'$ .

Logo todo vértice de  $G$  está em  $G'$ .

Mas então  $G'$  é um subgrafo gerador de  $G$ , isso significa que toda aresta de  $G'$  que não é aresta de  $G$  é um  $G'$ -caminho (e conseqüentemente, uma  $G'$ -orelha), novamente contradizendo a maximalidade de  $G'$ .

(d  $\Rightarrow$  e) Basta observar que cada orelha da decomposição de  $G$  pode ser obtida adicionando uma aresta e subdividindo-a sucessivamente.

(e  $\Rightarrow$  a) Conseqüência direta da construção de  $G$ : para desconectar  $G$  é necessário remover ao menos duas arestas (isso é verdade em um circuito e permanece verdade com a adição sucessiva de arestas a  $G$  e com a subdivisão de arestas de  $G$ ).  $\square$

**Teorema 3.12** (Lovász). Um grafo  $G$  é hipoemparelhável se e somente se  $G$  tem uma decomposição em orelhas ímpares, i.e.  $G$  pode ser obtido a partir de um vértice com a adição sucessiva de  $H$ -orelhas com número ímpar de arestas a grafos  $H$  já construídos.

*Demonstração.* Suponha que  $G$  é um grafo hipoemparelhável com menor número de arestas o possível que não pode ser obtido pelo procedimento

do teorema. Observe que  $G$  é conexo com um número ímpar de vértices (pois a remoção de qualquer vértice de  $G$  deve resultar em um grafo com apenas componentes conexos com número par de vértices) e certamente  $G$  não possui apenas um vértice.

Como  $G$  é hipoemparelhável, temos que  $D_G = V(G)$  na decomposição de Edmonds–Gallai (teorema 2.9).

Seja  $M$  um emparelhamento máximo em  $G$  e observe que há apenas um vértice  $v$  em  $G$  que não é coberto por  $M$ . Como  $D_G = V(G)$ , sabemos que, se rodarmos o algoritmo da seção 2.5, obteremos seqüências  $G_0, G_1, \dots, G_n, B_0, B_1, \dots, B_{n-1}$  e  $M_0, M_1, \dots, M_n$  tais que  $G_0 = G$ ,  $M_0 = M$ ,  $G_n$  possui apenas um vértice  $e$ , para todo  $i < n$ ,  $B_i$  é um  $M_i$ -botão,  $G_{i+1} = G_i/B_i$  e  $M_{i+1} = M_i/B_i$ .

Observe que, para todo  $i < n$ , temos que  $G_i$  é hipoemparelhável e que há apenas um vértice em  $G_i$ , digamos  $v_i$  descoberto em  $M_i$ . Isso significa que, para todo vértice  $t_i$  em  $G_i$  existe um caminho  $M_i$ -alternante  $P_{t_i, i}$  de  $v_i$  a  $t_i$  em  $G_i$  de comprimento par.

Observe também que, para todo  $i < n$ , temos que cada caminho  $M_{i+1}$ -alternante em  $G_{i+1}$  com início em  $v_{i+1}$  corresponde a um caminho  $M_i$ -alternante em  $G_i$  com início em  $v_i$ .

Vamos provar que, para todo  $i < n$ , temos  $G_i[V(B_i)] = B_i$ .

Suponha que não, isto é, suponha que existe uma aresta  $e \in G[V(B_i)] \setminus E(B_i)$ , e note que todo caminho  $M_{i+1}$ -alternante de  $G_{i+1}$  pode ser transformado em um caminho  $M_i$ -alternante de  $G_i - e$ .

Mas então, a existência dos caminhos  $P_{t_{i+1}, i+1}$  garante que, para todo vértice  $t_i$  de  $G_i$  existe um caminho  $M_i$ -alternante em  $G_i - e$  de comprimento par de  $v_i$  a  $t_i$ , isso significa que  $G_i - e$  é hipoemparelhável.

Tome então uma aresta  $f$  de  $G$  responsável pela existência de  $e$  em  $G_i$  e observe que, como  $G_i - e$  é hipoemparelhável, temos que  $G - e$  é hipoemparelhável. Pela minimalidade de  $G$ , sabemos que  $G - e$  pode ser obtido pelo procedimento descrito no teorema, mas  $e$  forma uma  $(G - e)$ -orelha de comprimento ímpar, contradizendo a escolha de  $G$ .

Logo, para todo  $i < n$ , temos  $G_i[V(B_i)] = B_i$ .

Vamos provar agora que, para todo  $i < n$ , não existem arestas distintas  $e$  e  $f$  em  $G_i$  que correspondem a uma mesma aresta de  $G_{i+1}$ .

Suponha que não e observe que  $\{e, f\} \cap M_i = \emptyset$ . Além disso, observe que  $e$  e  $f$  têm de ser adjacentes com suas pontas distintas no botão  $B_i$ . Novamente a existência dos caminhos  $P_{t_{i+1}, i+1}$  garante que, para todo vértice  $t_i$  de  $G_i$  existe um caminho  $M_i$ -alternante em  $G_i - e$  de comprimento par de  $v_i$  a  $t_i$ , isso significa que  $G_i - e$  é hipoemparlhável.

Mais uma vez, tome então uma aresta  $g$  de  $G$  responsável pela existência de  $e$  em  $G_i$  e observe que, como  $G_i - e$  é hipoemparlhável, temos que  $G - e$  é hipoemparlhável. Pela minimalidade de  $G$ , sabemos que  $G - e$  pode ser obtido pelo procedimento descrito no teorema, mas  $e$  forma uma  $(G - e)$ -orelha de comprimento ímpar, contradizendo a escolha de  $G$ .

Para todo  $i < n$ , seja  $u_i$  o vértice de  $G_{i+1}$  proveniente da contração de  $B_i$ .

Certamente  $n > 1$ , caso contrário  $G$  seria um circuito ímpar (pois seria um botão), que pode ser obtido pelo procedimento descrito no teorema. Isso significa que, para todo  $i < n - 1$ , o vértice  $u_i$  possui grau pelo menos dois em  $G_{i+1}$  e certamente  $u_{n-2}$  possui grau dois em  $G_{n-1}$ . Seja então  $i_0$  o menor  $i$  tal que  $u_i$  possui grau igual a 2 em  $G_{i+1}$ .

Como não há duas arestas em  $G_{i_0}$  correspondentes a uma mesma aresta de  $G_{i_0+1}$  e  $G_{i_0}[B_{i_0}] = B_{i_0}$ , sabemos que  $B_{i_0}$  possui exatamente dois vértices, digamos  $r_1$  e  $r_2$  de grau três em  $G_{i_0}$ . Note que um desses vértices não é coberto por  $M_{i_0} \cap E(B_{i_0})$  e, sem perda de generalidade, suponha que esse vértice é  $r_1$ .

Como  $B_{i_0}$  é um circuito ímpar, existe um caminho  $Q$  de  $r_1$  a  $r_2$  em  $B_{i_0}$  de comprimento ímpar.

Observe que  $u_{i_0}$  pertence a um botão  $B_j$  tal que  $j > i_0$ , logo existe um caminho  $M_{i_0+1}$ -alternante  $\tilde{R}$  de comprimento ímpar em  $G_{i_0+1}$  de  $v_{i_0+1}$  a  $u_{i_0}$ . Sabemos que  $\tilde{R}$  corresponde a um caminho  $M_{i_0}$ -alternante  $R$  de comprimento ímpar em  $G_{i_0}$  de  $v_{i_0}$  a  $r_2$ .

Considere então o grafo  $G' = G - (V(Q) \setminus \{r_1, r_2\})$  e vamos mostrar que para todo vértice  $t'$  de  $G'$ , existe um caminho  $M_{i_0}$ -alternante em  $G'$  de comprimento par de  $v_{i_0}$  a  $t'$ .

*Caso 1.*  $t' \in V(G_{i_0+1})$ . Nesse caso consideramos  $P_{t', i_0+1}$  e observamos que esse caminho corresponde a o caminho desejado em  $G'$ , usando o caminho  $Q$  para passar por  $B_{i_0}$  se necessário.

*Caso 2.*  $t'$  está no grafo  $H = B_{i_0} - (V(Q) \setminus \{r_1, r_2\})$  e está a uma distância par em  $H$  de  $r_1$ . Observe que o caminho testemunha dessa distância par é um caminho  $M_{i_0}$ -alternante. Por outro lado, sabemos que  $P_{r_1, i_0}$  não usa nenhum vértice de  $Q - r_1$ . Logo a concatenação desses dois caminhos gera o caminho desejado.

*Caso 3.*  $t'$  está no grafo  $H = B_{i_0} - (V(Q) \setminus \{r_1, r_2\})$  e está a uma distância ímpar em  $H$  de  $r_1$ . Isso significa que  $t'$  também está a uma distância ímpar de  $r_2$  em  $H$ . Observe que o caminho testemunha dessa distância par a  $r_2$  é um caminho  $M_{i_0}$ -alternante. Por outro lado, sabemos que  $R$  não usa nenhum vértice de  $Q - r_2$ . Logo a concatenação desses dois caminhos gera o caminho desejado.

Portanto, para todo vértice  $t'$  de  $G'$ , existe um caminho  $M_{i_0}$ -alternante em  $G'$  de comprimento par de  $v_{i_0}$  a  $t'$ . Isso significa que  $G'$  é hipoemparlhável e, pela minimalidade de  $G$ , sabemos que  $G'$  pode ser obtido pelo procedimento descrito no teorema, mas  $Q$  forma uma  $(G')$ -orelha de comprimento ímpar, contradizendo a escolha de  $G$ .

Para provar a recíproca, observe primeiramente que, como um vértice  $(K_1)$  é hipoemparlhável, basta provar que a adição de uma  $G$ -orelha a um grafo  $G$  hipoemparlhável preserva essa propriedade.

Então seja  $G$  um grafo hipoemparlhável e  $G'$  um grafo obtido a partir de  $G$  através da adição de uma  $G$ -orelha  $P$  com extremos  $u$  e  $w$  em  $G$  (esses vértices podem ser iguais).

Seja  $M$  um emparelhamento máximo em  $G$  e seja  $v$  o único vértice de  $G$  descoberto em  $M$ . Seja  $M' = M \cup \tilde{M}$  onde  $\tilde{M}$  é o maior emparelhamento em  $P$  que deixa  $u$  e  $w$  descobertos.

Observe que  $M'$  é emparelhamento máximo em  $G'$  deixando apenas  $v$  descoberto e vamos provar que, para todo vértice  $t$  de  $G'$ , existe um caminho  $M'$ -alternante em  $G'$  de comprimento par de  $v$  a  $t$ .

*Caso 1.*  $t$  é vértice de  $G$ . Então, como  $G$  é hipoemparelhável, sabemos que existe caminho  $M$ -alternante em  $G$  de comprimento par de  $v$  a  $t$  e esse caminho também é caminho  $M'$ -alternante em  $G'$ .

*Caso 2.*  $t$  não é vértice de  $G$ . Então  $t$  pertence a  $P$  e como  $P$  tem comprimento ímpar, então  $t$  tem de estar a distância par em  $P$  de um vértice, digamos  $r$ , dentre  $u$  e  $w$ . Seja  $Q$  o caminho testemunha dessa distância par e observe que  $Q$  é  $M'$ -alternante.

Por outro lado, sabemos que  $r$  é vértice de  $G$ , então, como  $G$  é hipoemparelhável, sabemos que existe caminho  $M$ -alternante  $R$  em  $G$  de comprimento par de  $v$  a  $r$ . Daí a concatenação de  $R$  com  $Q$  nos dá o caminho desejado.

Portanto, para todo vértice  $t$  de  $G'$ , existe um caminho  $M'$ -alternante em  $G'$  de comprimento par de  $v$  a  $t$ , isso significa que  $G'$  é hipoemparelhável. □

**Observação:** Os teoremas [a](#) e [3.12](#) garantem que todo grafo hipoemparelhável é 2-aresta-conexo.

### 3.3 3-CONEXIDADE

**Teorema 3.13** Se  $G$  é 3-conexo e  $|V(G)| \geq 5$ , então  $G$  tem uma aresta  $\alpha$  tal que  $G/\alpha$  é 3-conexo.

*Demonstração.* Suponhamos, por absurdo, que o resultado não vale. Então para toda aresta  $\alpha = xy \in E(G)$ , existe  $S \subseteq V(G/\alpha)$  com  $|S| \leq 2$  tal que  $G/\alpha - S$  é desconexo.

Observe que a cardinalidade de tais  $S$  é sempre dois, caso contrário  $G$  não seria 3-conexo, ou seja,  $G/\alpha$  é sempre 2-conexo.

Além disso, o vértice  $v_{xy}$  resultante da contração de  $\alpha$  pertence a  $S$ , caso contrário  $S$  seria subconjunto de  $V(G)$  e  $G - S$  seria desconexo. Seja então  $z$  o vértice de  $S$  que não é  $v_{xy}$ .

Observe que cada componente  $C$  de  $G' - S$  é um subgrafo de  $G$ . Vamos mostrar agora que  $C$  está ligada a todos os vértices em  $\{x, y, z\}$  em  $G$ . Suponha que  $C$  não está ligada a  $t \in \{x, y, z\}$ , então a remoção de  $\{x, y, z\} \setminus t$  desconecta  $C$  do resto do grafo  $G$ , o que contradiz sua 3-conexidade. Logo  $C$  está ligada a todos os vértices em  $\{x, y, z\}$ .

Considere  $\alpha \in E(G)$  e  $S'$  conjunto separador em  $G/\alpha$  tais que a cardinalidade do menor componente de  $G/\alpha - S'$  é a menor possível e seja  $G' = G/\alpha$ .

Seja  $C$  o menor componente conexo de  $G' - S'$ . Seja também  $v \in V(C)$  um vizinho de  $z$  em  $G'$  e  $\beta = vz$ .

Vamos mostrar que  $C$  possui ao menos dois vértices. Suponha que não (i.e.  $V(C) = \{v\}$ ) e considere o grafo  $G/\beta$ . Como  $K(G/\beta) = 2$ , sabemos que  $G/\beta$  possui um conjunto separador  $S_\beta$  de cardinalidade dois que contém o vértice  $v_\beta$  proveniente da contração de  $\beta$ . Isso significa que o conjunto  $(S_\beta \cup z) \setminus v_\beta$  é separador em  $G$ , contradizendo sua 3-conexidade. Logo  $C$  possui pelo menos dois vértices.

Observe agora que, como  $K(G/\beta) = 2$ , sabemos que há um  $w \in V(G)$  tal que  $S = \{v, z, w\}$  é separador em  $G$ . Observe que todo componente de  $G/\beta$  está conectado a  $v$  em  $G$ . Mas então qualquer componente de  $G/\beta$  que não contém  $x$  (e conseqüentemente não contém  $y$ ) está propriamente contido em  $C$ , pois deve ser vizinho de  $v$ . Isso contradiz a escolha de  $\alpha$  (Figura [3.7](#)). □

**Exercício 3.3.** Estudar o que acontece com o teorema acima caso a hipótese  $|V(G)| \geq 5$  seja removida. Em que momento(s) da demonstração essa hipótese foi usada?

**Teorema 3.14** (Tutte, 1961). Um grafo é 3-conexo se e somente se existe uma sequência  $G_0, G_1, \dots, G_n$  de grafos com as propriedades





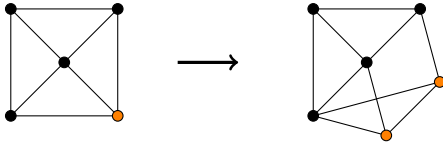


Figura 3.8: Exemplo de splitting.

acrescentando-se arestas ligando vértices não-adjacentes e/ou aplicando a operação de splitting.

*Demonstração.* Suponha que  $G$  é um grafo 3-conexo que não pode ser obtido a partir do procedimento descrito no teorema com o menor número de arestas o possível.

Certamente  $G$  possui pelo menos cinco vértices, pois o único (a menos de isomorfismo) grafo 3-conexo com menos de cinco vértices é  $K_4$ . Mas então o teorema 3.13 nos garante que existe uma aresta  $\alpha$  em  $G$  tal que  $G' = G/\alpha$  é 3-conexo.

Seja  $v_\alpha$  o vértice de  $G'$  proveniente da contração de  $\alpha$  e observe que  $G'$  possui menos arestas que  $G$ . Pela minimalidade de  $G$ , sabemos que  $G'$  pode ser obtido pelo procedimento descrito no teorema.

Porém  $G$  é splitting de  $v_\alpha$  em  $G'$ , o que é uma contradição.

Para provar a recíproca, como a adição de arestas preserva a 3-conexidade de um grafo, basta provar que a operação de splitting também preserva a 3-conexidade de um grafo.

Então sejam  $G$  um grafo 3-conexo,  $v$  um vértice de  $G$  e  $H$  um splitting de  $v$  em  $G$  e suponha por absurdo que  $H$  não é 3-conexo.

Então existe um  $S$  conjunto separador de  $H$  de cardinalidade menor ou igual a dois.

Certamente  $S \cap \{v', v''\} \neq \emptyset$ , caso contrário,  $S$  também seria conjunto separador em  $G$ . Além disso, sabemos que  $S \neq \{v', v''\}$ , caso contrário,  $v$

seria vértice de corte em  $G$ . Finalmente, sabemos que  $S$  não possui apenas um vértice, caso contrário, esse vértice seria um dentre  $v'$  e  $v''$ , o que significaria que  $v$  seria vértice de corte em  $G$ .

Sem perda de generalidade, suponha que  $S = \{v', r\}$ , com  $r \neq v''$ . Seja  $C$  o componente conexo de  $v''$  em  $H$ . Observe que, como  $\{v, r\}$  não é conjunto separador de  $G$ , temos que  $H - (S \cup \{v''\})$  é conexo, o que significa que  $V(C) = \{v''\}$ , mas isso é um absurdo, pois  $v''$  possui grau pelo menos 3 em  $H$ , ou seja, possui grau pelo menos 1 em  $C$ .  $\square$

### 3.4 ALTA ARESTA-CONEXIDADE

**Teorema 3.16** (Tutte). Se  $G$  é um multigrafo  $2k$ -aresta-conexo, então  $G$  tem  $k$  árvores geradoras disjuntas nas arestas.

### 3.5 EXERCÍCIOS

Nos exercícios seguintes, suponha que os grafos considerados são simples.

**Exercício 3.4.** Prove que se  $G$  é um grafo 2-conexo com ao menos 4 vértices, então para toda aresta  $f$  de  $G$  temos que  $G - f$  é 2-conexo ou  $G/f$  é 2-conexo.

**Exercício 3.5.** Prove que se  $G$  é um grafo 2-conexo tal que  $\delta(G) \geq 3$ , então  $G$  tem um vértice  $v$  tal que  $G - v$  é 2-conexo.

**Exercício 3.6.** Seja  $G$  um grafo 2-conexo tal que  $G - s - t$  é desconexo para quaisquer dois vértices não-adjacentes  $s, t$ . Prove que  $G$  é um circuito.

**Exercício 3.7.** Sejam  $G = (V, E)$  um grafo e  $s, t$  dois vértices de  $G$  que distam  $d$ . Suponha que, para todo  $S \subset V \setminus \{s, t\}$  tal que  $|S| < k$ , existe em  $G - S$  um caminho entre  $s$  e  $t$ , de comprimento  $d$ . Mostre que em  $G$  existem  $k$  caminhos entre  $s$  e  $t$ , todos de comprimento  $d$ , que são vértice-disjuntos exceto pelos extremos.

**Exercício 3.8.**

a) Estude o Teorema de Mader sobre  $H$ -caminhos (veja Seção 3.4 do livro do Diestel [Die05]).

**Teorema 3.17** Dado um grafo  $G = (V, E)$  e um subgrafo induzido  $H$  de  $G$ . O maior número de  $H$ -caminhos internamente vértice-disjuntos é o menor valor  $M_G(H)$  de

$$|X| + \sum_{C \in \mathcal{C}_F} \left\lfloor \frac{1}{2} |\partial(C)| \right\rfloor,$$

onde  $X \subseteq V \setminus V(H)$  e  $F \subseteq E(G - V(H) - X)$  são tomados de forma que todo  $H$ -caminho contém pelo menos um vértice de  $X$  ou uma aresta de  $F$  e onde  $\mathcal{C}_F$  é o conjunto de componentes conexas do grafo  $(V \setminus (V(H) \cup X), F)$  e  $\partial(C)$  é o conjunto de vértices de  $C$  com vizinhos em  $G - X - V(C)$ .

b) Prove o Teorema de Tutte (que caracteriza grafos com emparelhamentos perfeitos) usando o Teorema de Mader. *Sugestão:* Veja o Exercício 19 do Capítulo 3 do livro do Diestel [Die05].

**Exercício 3.9.** Exiba um grafo tal que quaisquer 3 de seus vértices pertençam a um mesmo circuito, e que tenha 4 vértices que não pertencem a um mesmo circuito.

## NOTAS DO CAPÍTULO 3

### 3.6 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[Die05] Reinhard Diestel. *Graph Theory (Graduate Texts in Mathematics)*. Springer, August 2005.