

## 9 MENORES, ÁRVORES E QUASE BOA ORDEM

### 9.1 RELAÇÕES

Uma relação  $R$  sobre um conjunto  $X$  é um subconjunto de  $X \times X$ . Para enfatizar que estamos tratando de relações e não simplesmente de conjuntos, usamos a notação infixa  $xRy$  para denotar  $(x, y) \in R$ .

Fixada uma relação  $R$  sobre um conjunto  $X$ , dizemos que  $R$  é

- **Reflexiva**, se  $xRx$  para todo  $x \in X$ ;
- **Transitiva**, se  $xRy$  e  $yRz$  implicam  $xRz$  para todos  $x, y, z \in X$ ;
- **Antissimétrica**, se  $xRy$  e  $yRx$  implicam  $x = y$ , para todos  $x, y \in X$ ;
- **Total**, se para todos  $x, y \in X$ , temos  $xRy$  ou  $yRx$ ;
- **Bem-fundada** (well-founded), se para todo subconjunto não-vazio  $Y$  de  $X$ , existe um  $y \in Y$  tal que nenhum  $z \in Y$  satisfaz  $zRy$  ( $Y$  tem um elemento minimal).

Em particular, uma relação é chamada de

- **Quase-ordem**, se for reflexiva e transitiva;
- **Ordem parcial**, se for reflexiva, transitiva e antissimétrica;
- **Ordem total** (ou **ordem**), se for reflexiva, transitiva, antissimétrica e total;
- **Quase-bom-ordem**, se for reflexiva, transitiva e bem-fundada;
- **Bom-ordem parcial**, se for reflexiva, transitiva, antissimétrica e bem-fundada;
- **Bom-ordem total** (ou **bom-ordem**), se for reflexiva, transitiva, antissimétrica, total e bem-fundada.

Estamos particularmente interessados em estudar quase-boas-ordens e, nesse contexto, é mais simples trabalhar com uma noção equivalente (sob o axioma da escolha) de relações bem-fundadas:

**Proposição 9.1** Assumindo o axioma da escolha, uma relação  $R$  sobre um conjunto  $X$  é bem-fundada se e somente se para toda sequência infinita enumerável  $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ , existem índices  $i < j$  tais que  $x_iRx_j$ .

A partir deste ponto, assumiremos verdadeiro o axioma da escolha implicitamente.

Dada uma relação  $R$  sobre um conjunto  $X$ , um subconjunto  $A \subset X$  é dito uma **anticadeia** se não existem  $x, y \in A$  distintos tais que  $xRy$ .

Usaremos frequentemente o símbolo  $\preceq$  no estudo de relações (tipicamente quase-ordens) e assumiremos sempre que as relações  $\prec$ ,  $\succeq$  e  $\succ$  estão definidas como:

- Para todos  $x, y$ , temos  $x \prec y$  se e somente se  $x \preceq y$  e  $\neg(y \preceq x)$ ;
- Para todos  $x, y$ , temos  $x \succeq y$  se e somente se  $y \preceq x$ ;
- Para todos  $x, y$ , temos  $x \succ y$  se e somente se  $x \succeq y$  e  $\neg(y \succeq x)$ ;

Supondo que  $\preceq$  é uma quase-ordem, uma sequência  $(x_i)_{i \in U}$  indexada por  $U \subset \mathbb{N}$  é dita

- **Crescente**, se para todos índices  $i < j$ , temos  $x_i \preceq x_j$ ;
- **Decrescente**, se para todos índices  $i < j$ , temos  $x_j \succeq x_i$ ;
- **Estritamente crescente**, se para todos índices  $i < j$ , temos  $x_i \prec x_j$ ;
- **Estritamente decrescente**, se para todos índices  $i < j$ , temos  $x_j \succ x_i$ .

**Proposição 9.2** Seja  $\preceq$  uma quase-ordem sobre  $X$ . Então  $\preceq$  é quase-bom-ordem se e somente se  $X$  não contém nem uma anticadeia infinita nem uma sequência infinita estritamente decrescente  $x_0 \succ x_1 \succ \dots$ .

*Demonstração.* Observe que se  $A$  é uma anticadeia infinita, então qualquer sequência  $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$  em  $A$  de elementos distintos é tal que não existem  $i < j$  com  $x_i \preceq x_j$ .

Por outro lado, se  $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$  é uma sequência infinita estritamente decrescente, então também temos que não existem  $i < j$  com  $x_i \preceq x_j$ .

Portanto, se  $\preceq$  é quase-bom-ordem, então  $X$  não contém nem uma anticadeia infinita nem uma sequência infinita estritamente decrescente.

Seja  $x_0, x_1, \dots$ , uma seqüência qualquer de  $X$  indexada pelos naturais. Considere o grafo completo (infinito)  $K_{\mathbb{N}}$

Faça uma coloração das arestas  $ij$  de  $K_{\mathbb{N}}$ , com  $i < j$  com 3 cores:

- Atribua a cor *verde*, se  $x_i \preceq x_j$ ;
- Atribua a cor *amarela*, se  $x_i$  e  $x_j$  são incomparáveis;
- Atribua a cor *vermelha*, se  $x_i \succ x_j$ .

Pelo Teorema de Ramsey, sabemos que  $K_{\mathbb{N}}$  tem um subgrafo completo  $H$  infinito cujas arestas são todas da mesma cor. Pela hipótese da proposição, tais arestas não podem ser nem amarelas e nem vermelhas.

Portanto, são verdes. Logo, quaisquer dois vértices  $i, j$  (com  $i < j$ ) de  $H$  são tais que  $x_i \preceq x_j$  (bastava uma tal aresta).

Concluimos que  $\preceq$  é uma quase-boa-ordem.  $\square$

**Corolário 9.3** Se  $\preceq$  é quase-boa-ordem sobre  $X$ , então toda seqüência infinita em  $X$  tem uma subsequência infinita crescente.

Uma quase-ordem  $\preceq$  sobre  $X$  induz uma quase-ordem natural sobre o conjunto dos subconjuntos finitos de  $X$  (denotado por  $[X]^{<\omega}$ ). Essa quase-ordem é definida abaixo.

Para conjuntos finitos  $A, B \subseteq X$ , fazemos  $A \preceq B$  se existe uma função injetora  $f: A \rightarrow B$  tal que  $a \preceq f(a)$  para todo  $a \in A$ .

O seguinte lema e a ideia de sua prova têm um papel importante na teoria da quase-boa-ordem.

**Lema 9.4** Se  $\preceq$  é quase-boa-ordem sobre  $X$ , então  $\preceq$  é quase-boa-ordem sobre  $[X]^{<\omega}$ .

*Demonstração.* Suponha que  $\preceq$  seja uma quase-boa-ordem sobre  $X$  e que  $\preceq$  não seja quase-boa-ordem sobre  $[X]^{<\omega}$ .

Chamaremos de seqüências *ruins* aquelas que violam a propriedade de serem bem-fundadas, isto é, seqüências infinitas  $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$  que são ou estritamente decrescentes ou tais que  $\{x_i : i \in \mathbb{N}\}$  é uma anticadeia.

Naturalmente, chamaremos de seqüências *boas* aquelas que não são ruins.

Vamos construir uma seqüência ruim  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  especial em  $[X]^{<\omega}$  recursivamente.

Dado  $n \in \mathbb{N}$ , suponha, indutivamente, que  $A_i$  foi definido para todo natural  $i < n$ , e que exista uma seqüência ruim em  $[X]^{<\omega}$  começando com  $A_0, A_1, \dots, A_{n-1}$  (para  $n = 0$ , temos que uma seqüência ruim existe por  $\preceq$  não ser quase-boa-ordem sobre  $[X]^{<\omega}$ )

Escolha então  $A_n \in [X]^{<\omega}$  com  $|A_n|$  mínimo e de forma que exista uma seqüência ruim em  $[X]^{<\omega}$  começando com  $A_0, A_1, \dots, A_n$ .

Claramente, temos que  $A_n \neq \emptyset$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  (caso contrário teríamos  $A_n \preceq A_{n+1}$ ). Escolha então, para cada  $n \in \mathbb{N}$ , um elemento  $a_n \in A_n$  e tome  $B_n = A_n \setminus \{a_n\}$ .

Pelo Corolário 9.3, a seqüência  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  possui uma subsequência infinita crescente  $(a_{n_i})_{i \in \mathbb{N}}$ .

Considere a seqüência de conjuntos

$$(C_i)_{i \in \mathbb{N}} = (A_0, A_1, \dots, A_{n_0-1}, B_{n_0}, B_{n_1}, \dots)$$

Note que esta seqüência é boa por construção (se a seqüência fosse ruim, como  $|B_{n_0}| < |A_{n_0}|$ , teríamos uma contradição à escolha de  $A_{n_0}$ ).

Portanto, existe um par de índices  $i_0 < j_0$  tal que  $C_{i_0} \preceq C_{j_0}$ .

Observe que não podemos ter  $j_0 < n_0$ , caso contrário, teríamos  $A_{i_0} \preceq A_{j_0}$ .

Também não podemos ter  $i_0 < n_0 \leq j_0$ , caso contrário, teríamos  $A_{i_0} \preceq B_{j_0} \preceq A_{j_0}$ .

Finalmente, se tivermos  $n_0 \leq i_0$ , então, como  $a_{i_0} \preceq a_{j_0}$ , temos que  $B_{i_0} \preceq B_{j_0}$ , o que implica que  $A_{i_0} \preceq A_{j_0}$  (basta estender a função de  $B_{i_0}$  para  $B_{j_0}$  fazendo a imagem de  $a_{i_0}$  ser  $a_{j_0}$ ). Isso é uma contradição.

Portanto  $\preceq$  é quase-boa-ordem sobre  $[X]^{<\omega}$ .  $\square$

Seja  $\mathcal{G}$  a classe de todos os grafos *finitos* a menos de isomorfismo e  $\preceq$  a relação de ‘menor (de)’ definida sobre  $\mathcal{G}$ . É fácil ver que  $\preceq$  é quase-ordem sobre  $\mathcal{G}$  (é inclusive uma ordem parcial).

O ‘Minor Theorem’ afirma que

“A relação  $\preceq$  é quase-boa-ordem sobre  $\mathcal{G}$ .”

Como obviamente uma sequência estritamente decrescente de menores não pode ser infinita, a Proposição 9.2 nos dá que o ‘Minor Theorem’ é equivalente a seguinte afirmação:

“Não existe uma anticadeia infinita em  $\mathcal{G}$ .”

Isto é, não existe um conjunto infinito de grafos em  $\mathcal{G}$ , dois-a-dois incomparáveis quanto à relação menor  $\preceq$ .

Restringindo-nos à classe das árvores, existe uma versão mais forte do ‘Minor Theorem’:

**Teorema 9.5** Seja  $\mathcal{T}$  a classe das árvores *finitas* a menos de isomorfismo e  $\preceq$  a relação de menor topológico ( $\preceq \equiv \preceq_t$ ). Então  $\preceq$  é quase-boa-ordem sobre  $\mathcal{T}$ .

A prova será baseada numa relação mais forte definida sobre árvores enraizadas.

Se  $T$  é uma árvore e  $r$  um vértice qualquer fixo, chamaremos o par  $(T, r)$  de *árvore enraizada*, e  $r$  sua *raiz* (algumas vezes escrevemos simplesmente  $T$ , em vez de  $(T, r)$ ).

Dadas árvores enraizadas  $(T, r)$  e  $(T', r')$ , escrevemos

$$(T, r) \preceq (T', r')$$

se existe um isomorfismo  $\varphi$  entre alguma subdivisão de  $T$  e uma subárvore  $T''$  de  $T'$  tal que o caminho de  $r'$  a  $\varphi(r)$  em  $T'$  não contém nenhum

outro vértice de  $T''$  a não ser  $\varphi(r)$ . Dizemos que um tal isomorfismo *respeita*  $r'$ .

Seja  $\mathcal{T}^*$  o conjunto das árvores enraizadas finitas.

Provaremos então o teorema abaixo, do qual o Teorema 9.5 segue como corolário.

**Teorema 9.6** (Kruskal, 1960 [Kru60]). A relação  $\preceq$  é quase-boa-ordem sobre  $\mathcal{T}^*$ .

*Demonstração.* Novamente adotaremos a terminologia de sequências *ruins* para as que violam a propriedade de boa-fundação das relações e de sequências *boas* para as que não são ruins.

Suponha que  $\preceq$  não seja quase-boa-ordem sobre  $\mathcal{T}^*$  e vamos construir uma sequência ruim  $(T_n, r_n)_{n \in \mathbb{N}}$  especial em  $\mathcal{T}^*$  recursivamente.

Dado  $n \in \mathbb{N}$ , suponha indutivamente que  $(T_i, r_i)$  já foi construído para todo  $i < n$ , e que exista uma sequência ruim começando com  $(T_0, r_0), (T_1, r_1), \dots, (T_{n-1}, r_{n-1})$ .

Escolha então  $(T_n, r_n)$  com  $|V(T_n)|$  mínimo e de forma que exista uma sequência ruim começando com  $(T_0, r_0), (T_1, r_1), \dots, (T_n, r_n)$  (para  $n = 0$ , temos que uma sequência ruim existe por  $\preceq$  não ser quase-boa-ordem).

Observe que  $|V(T_n)| > 1$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , seja  $A_n$  o conjunto das árvores enraizadas  $(T, r)$  tal que  $T$  é um componente conexo de  $T_n - r_n$  e  $r$  é adjacente a  $r_n$  em  $T_n$ .

Seja  $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ .

Vamos provar que  $\preceq$  é quase-boa-ordem sobre  $A$ .

Seja  $((U_k, s_k))_{k \in \mathbb{N}}$  uma sequência qualquer de árvores enraizadas do conjunto  $A$ .

Para cada  $k \in \mathbb{N}$  escolha  $n = n(k)$  tal que  $U_k \in A_n$  e seja  $k^* = \arg \min\{n(k) : k \in \mathbb{N}\}$  ( $n(k^*) \leq n(k)$  para todo  $k \in \mathbb{N}$ ).

Então a sequência

$$(W_n, t_n)_{n \in \mathbb{N}} = ((T_0, r_0), \dots, (T_{n(k^*)-1}, r_{n(k^*)-1}), (U_{k^*}, s_{k^*}), (U_{k^*+1}, s_{k^*+1}), \dots)$$

é boa, pois  $U_{k^*} \subsetneq T_{n(k^*)}$  (caso contrário, teríamos uma contradição com a minimalidade de  $|V(T_{n(k^*)})|$ ).

Ou seja, existem índices  $i < j$  tais que  $(W_i, t_i) \preceq (W_j, t_j)$ .

Observe que não podemos ter  $j \leq n(k^*) - 1$ , caso contrário, teríamos  $(T_i, r_i) \preceq (T_j, r_j)$ .

Também não podemos ter  $i < n(k^*) \leq j$ , caso contrário, teríamos  $(T_i, r_i) \preceq (U_j, s_j) \preceq (T_{n(j)}, r_{n(j)})$  (pois  $U_j \in A_{n(j)}$ ).

Logo, temos  $n(k^*) \leq i$ , ou seja, temos  $(U_i, s_i) \preceq (U_j, s_j)$ , o que significa que a sequência  $(U_n, s_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é boa.

Portanto  $\preceq$  é quase-bom-ordem sobre  $A$ .

Pelo Lema 9.4, temos que  $\preceq$  é quase-bom-ordem sobre  $[A]^{<\omega}$ .

Em particular, isso significa que existem índices  $i_0 < j_0$  tais que  $A_{i_0} \preceq A_{j_0}$ .

A partir da função  $f: A_{i_0} \rightarrow A_{j_0}$ , das subdivisões e isomorfismos que respeitam raiz que testemunham  $A_{i_0} \preceq A_{j_0}$ , segue que  $(T_{i_0}, r_{i_0}) \preceq (T_{j_0}, r_{j_0})$ .

Portanto  $\preceq$  é quase-bom-ordem sobre  $\mathcal{T}^*$ . □

## 9.2 O ‘MINOR THEOREM’ PARA GRAFOS COM LARGURA ARBÓREA LIMITADA

Grafos com largura arbórea (la) limitada são suficientemente ‘semelhantes’ a árvores tornando possível adaptar a prova do Teorema de Kruskal (Teorema 9.6) para a classe desses grafos. Grosseiramente, a ideia é iterar o argumento da ‘sequência minimal ruim’  $la(G)$  vezes. A prova desse resultado encontra-se no artigo “graph minors I”, de Robertson & Seymour, 1990.

**Teorema 9.7** [Robertson & Seymour, 1990] Para todo natural  $k$ , os grafos com largura arbórea menor que  $k$  são quase-bem-ordenados pela relação de *menor*.

Este teorema nos leva um passo adiante em relação à prova do ‘Minor Theorem’ (para grafos arbitrários). Para chegar a esse resultado geral, a seguinte questão é de interesse.

*Pergunta:* Como são os grafos com *largura arbórea limitada*?

Mais precisamente, há algum fenômeno estrutural que ocorre num grafo se e somente se ele tem la grande?

### Obstruções canônicas à largura arbórea pequena

Dizemos que  $X \subseteq V(G)$  é um *subconjunto conexo* se  $G[X]$  é conexo.

Seja  $\mathcal{C}$  um conjunto de subconjuntos conexos de  $V(G)$ .

Dizemos que um conjunto  $U \subseteq V(G)$  cobre  $\mathcal{C}$  se  $U$  intersecta cada conjunto em  $\mathcal{C}$ .

Dizemos que dois elementos de  $\mathcal{C}$  se *tocam* (‘touch’) se eles se intersectam ou  $G$  contém uma aresta entre eles.

**Exercício 9.1.** Se  $\mathcal{C}$  é um conjunto de subconjuntos conexos de  $V(G)$  e quaisquer dois elementos de  $\mathcal{C}$  se tocam, então em toda decomposição arbórea  $(T, \{W_t : t \in V(T)\})$  de  $G$  existe  $t \in V(T)$  tal que  $W_t$  cobre  $\mathcal{C}$ . [Sugestão: imitar a prova da Proposição 8.6]

Esse resultado prova o lado fácil ( $\Leftarrow$ ) da seguinte caracterização de grafos com largura arbórea maior ou igual a  $k$ .

**Teorema 9.8** [Seymour & Thomas, 1993] Seja  $k$  um inteiro. Um grafo  $G$  tem  $la(G) \geq k$  se e somente se  $G$  contém uma coleção de conjuntos de vértices conexos que se tocam dois a dois e que não podem ser cobertos por até  $k$  vértices.

Outro teorema interessante faz uso de uma generalização de árvores:

Dizemos que um grafo é uma *k-árvore* se é um grafo cordal e tal que todas suas cliques maximais tem cardinalidade  $k + 1$  e todos os minimal clique separators tem cardinalidade  $k$ .

Dizemos que um grafo é uma *k-árvore-parcial* se é um subgrafo de uma *k-árvore*.

**Teorema 9.9** Se  $G$  é uma  $k$ -árvore-parcial, então  $la(G) \leq k$ .

*Interesse:* Decomposição arbórea que dê mais informações sobre a estrutura arbórea do grafo (quão semelhante de uma árvore é o grafo). Exigir apenas largura arbórea pequena não captura como bolsas da decomposição se relacionam ao longo da árvore (da decomposição).

Dizemos que uma decomposição arbórea  $(T, \{W_t : t \in V(T)\})$  de  $G$  é *interligada* ('linked') se, para todo  $s \in \mathbb{N}$  e todos  $t_1, t_2 \in V(T)$ , existem  $s$  caminhos disjuntos de  $W_{t_1}$  a  $W_{t_2}$ .

Dizemos que uma decomposição arbórea  $(T, \{W_t : t \in V(T)\})$  de  $G$  é *enxuta* ('lean') se, para todo  $s \in \mathbb{N}$  e e todos  $t_1, t_2 \in V(T)$ , existe  $t$  no caminho de  $t_1$  para  $t_2$  em  $T$  tal que  $|W_t| < s$ .

O teorema abaixo afirma que é possível encontrar decomposições arbóreas com largura mínima e que são também enxutas:

**Teorema 9.10** [Thomas,1990] Todo grafo  $G$  possui uma decomposição arbórea enxuta com largura  $la(G)$ .

### 9.3 DECOMPOSIÇÕES ARBÓREAS E MENORES PROIBIDOS

Seja  $\mathcal{X}$  uma classe de grafos. Considere a classe dos grafos sem um menor em  $\mathcal{X}$

$$\text{Forb}_{\preceq}(\mathcal{X}) = \{G \text{ grafo} : G \not\preceq X, \text{ para todo } X \in \mathcal{X}\}.$$

É fácil ver que  $\text{Forb}_{\preceq}(\mathcal{X})$  é uma *propriedade de grafos*, isto é, é fechada sob isomorfismo ( $H \in \text{Forb}_{\preceq}(\mathcal{X})$  e  $H \cong H'$  implicam  $H' \in \text{Forb}_{\preceq}(\mathcal{X})$ ).

Quando se tratar apenas de um grafo, escreveremos  $\text{Forb}_{\preceq}(G)$  em vez de  $\text{Forb}_{\preceq}(\{G\})$ .

A classe  $\text{Forb}_{\preceq}(\mathcal{X})$  é expressa especificando-se os grafos  $X \in \mathcal{X}$  como *menores proibidos* ('forbidden' ou 'excluded minors').

**Exemplo 9.11** Se  $\mathcal{X} = \{K_5, K_{3,3}\}$ , então  $\text{Forb}_{\preceq}(\mathcal{X})$  é a classe dos grafos planares.

Se  $\mathcal{X} = \{K_4\}$ , então  $\text{Forb}_{\preceq}(\mathcal{X})$  é a classe dos grafos série-paralelos.

Se  $\mathcal{X} = \{K_{2,3}, K_4\}$ , então  $\text{Forb}_{\preceq}(\mathcal{X})$  é a classe dos grafos exoplanares.

Certamente  $\text{Forb}_{\preceq}(\mathcal{X})$  é fechada sob a operação de tomar menores, isto é, se  $G \in \text{Forb}_{\preceq}(\mathcal{X})$  e  $H \preceq G$ , então  $H \in \text{Forb}_{\preceq}(\mathcal{X})$ .

Propriedades de grafos que são fechadas sob tomada de menores são chamadas *minor-hereditary*.

A proposição abaixo afirma que as propriedades hereditárias coincidem exatamente com as classes de menores proibidos.

**Proposição 9.12** Seja  $\mathcal{P}$  uma propriedade de grafos. A propriedade  $\mathcal{P}$  pode ser expressa através de menores proibidos se e somente se  $\mathcal{P}$  é minor-hereditary.

*Demonstração.* Já vimos que  $\text{Forb}_{\preceq}(\mathcal{X})$  é uma propriedade hereditária para toda  $\mathcal{X}$ .

Por outro lado, sabemos que  $\mathcal{P} = \text{Forb}_{\preceq}(\overline{\mathcal{P}})$ , onde  $\overline{\mathcal{P}}$  é o complemento de  $\mathcal{P}$ . □

*Pergunta:* Como representar melhor uma propriedade hereditária através de menores proibidos?

Resposta mais adiante.

Por ora, considere a propriedade hereditária: largura arbórea limitada ('bounded tree width').

**Proposição 9.13** Para todo  $k > 0$ , a propriedade de ter  $la < k$  é hereditária.

*Demonstração.* É suficiente provar que a largura arbórea de um grafo não aumenta quando contraímos uma aresta. O resultado segue da Proposição 8.2 e da propriedade de menores. □

Pelas proposições anteriores, a propriedade "ter largura arbórea menor que  $k$ " pode ser expressa por menores proibidos.

Seja  $\mathcal{G}_{<k}$  = classe dos grafos com largura arbórea menor que  $k$ .  
 Para alguns valores fixos de  $k$ , já conhecemos essa classe:

- A classe  $\mathcal{G}_{<2}$  é a classe das florestas (e coincide com  $\text{Forb}_{\preceq}(K_3)$ );
- A classe  $\mathcal{G}_{<3}$  é a classe dos grafos série-paralelos (e coincide com  $\text{Forb}_{\preceq}(K_4)$ ).

É natural perguntar se há outros grafos  $H$  para os quais os grafos em  $\text{Forb}_{\preceq}(H)$  têm largura arbórea limitada e como são tais grafos.

**Proposição 9.14** Se  $H$  é um grafo tal que os grafos de  $\text{Forb}_{\preceq}(H)$  possuem largura arbórea limitada, então  $H$  é planar.

*Demonstração.* Sabemos que o grafo  $G_{n \times n}$  da grade  $n \times n$  possui largura arbórea  $la(G_{n \times n}) = n$ , ou seja, existem grafos planares com largura arbórea arbitrariamente grande.

Como todo menor de um grafo planar é planar, se  $H$  não for planar, então  $G_{n \times n}$  não o terá como menor.  $\square$

**Teorema 9.15** [Robertson, Seymour & Thomas, 94] Para todo grafo planar  $H$  existe um inteiro  $n$  tal que  $H \preceq G_{n \times n}$ .

**Teorema 9.16** Para todo grafo planar  $H$  existe um inteiro  $k$  tal que se um grafo  $G$  tem largura arbórea maior ou igual a  $k$ , então  $H \preceq G$ .

**Corolário 9.17** Se  $H$  é um grafo planar, então os grafos de  $\text{Forb}_{\preceq}(H)$  têm largura arbórea limitada.

**Corolário 9.18** [Robertson & Seymour] Grafos em  $\text{Forb}_{\preceq}(H)$  têm largura arbórea limitada se e somente se  $H$  é planar.

Existe um resultado análogo: troca-se  $la$  por  $pw$  e planar por floresta.

**Teorema 9.19** [Robertson & Seymour, 83] Grafos em  $\text{Forb}_{\preceq}(H)$  têm  $pw$  limitada se e somente se  $H$  é uma floresta.

*Demonstração.* Se  $H$  não é uma floresta, isto é, se  $H$  tem um circuito, então  $\text{Forb}_{\preceq}(H)$  contém todas as árvores.

Vamos provar então que árvores podem ter  $pw$  arbitrariamente grande.

Seja  $G$  um grafo conexo e  $(P, \{W_t : t \in V(P)\})$  uma decomposição em caminho de  $G$  com largura  $pw(G)$ . Suponha que os vértices de  $P$  são  $1, 2, \dots, k$  e  $E(P) = \{ij : i - j = 1\}$ .

Tome  $v_1 \in W_1$  e  $v_k \in W_k$  e seja  $Q$  um caminho de  $v_1$  a  $v_k$  em  $G$ .

Então a decomposição em caminho  $(P, \{W_t \setminus V(Q) : t \in V(P)\})$  de  $G - Q$  possui largura menor ou igual a  $pw(G) - 1$ , pois  $Q$  deve possuir pelo menos um vértice em cada bolsa (segue da Proposição 8.5).

Portanto todo grafo conexo  $G$  contém um caminho  $Q$  tal que  $pw(G - Q) \leq pw(G) - 1$ . Assim, se pudermos assumir (por alguma hipótese de indução apropriada) que  $pw(G - Q)$  é grande para todo caminho  $Q \subseteq G$ , então  $pw(G)$  também será grande.

Usando esse fato, vamos provar que árvores podem ter  $pw$  arbitrariamente grande.

Para todo  $k \geq 1$ , seja  $T_3^k \equiv$  a árvore ternária com raiz  $r$  e todas suas folhas à distância  $k$  de  $r$  (a raiz possui grau 3, as folhas possuem grau 1 e todos os demais vértices possuem grau 4).

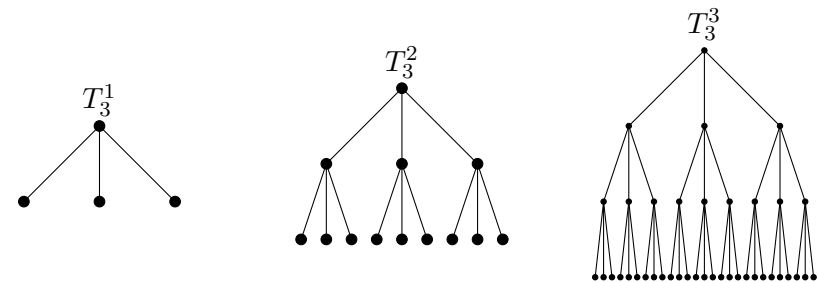


Figura 9.1: Árvores ternárias  $T_3^0$ ,  $T_3^1$  e  $T_3^2$ .

Observe que, se  $Q$  é um caminho em  $T_3^{k+1}$ , então  $Q$  contém no máximo duas das arestas incidentes a  $r$ . Logo temos  $T_3^{k+1} - Q \supseteq T_3^k$ , donde segue que  $\text{pw}(T_3^{k+1}) \geq \text{pw}(T_3^k) + 1$  para todo  $k \geq 1$ .

Como  $\text{pw}(T_3^2) \geq 2$ , segue por indução que  $\text{pw}(T_3^k) \geq k$  para todo  $k \geq 2$ .

Portanto existem árvores com pw arbitrariamente grande, logo grafos de  $\text{Forb}_{\preceq}(H)$  têm pw limitada implica que  $H$  é uma floresta.  $\square$

#### 9.4 O ‘MINOR THEOREM’

Teoremas que caracterizam uma propriedade hereditária  $\mathcal{P}$  através de um conjunto  $\mathcal{X}$  de menores proibidos estão entre os resultados mais atraentes na teoria dos grafos.

Tais teoremas dão um sabor de coNP à propriedade  $\mathcal{P}$ , pois para certificar que um grafo  $G$  não satisfaz  $\mathcal{P}$ , basta apresentar o menor proibido que  $G$  possui.

Claramente, podemos caracterizar  $\mathcal{P}$  como  $\text{Forb}_{\preceq}(\overline{\mathcal{P}})$ , mas o interessante é caracterizar  $\mathcal{P}$  como  $\text{Forb}_{\preceq}(\mathcal{X})$  com  $\mathcal{X}$  menor possível.

**Proposição 9.20** Uma classe  $\mathcal{X} \subseteq \overline{\mathcal{P}}$  é minimal à propriedade  $\mathcal{P} = \text{Forb}_{\preceq}(\mathcal{X})$  se e somente se  $\mathcal{X}$  contém exatamente uma cópia de cada grafo  $\preceq$ -minimal em  $\overline{\mathcal{P}}$ .

*Demonstração.* Claramente, se  $\mathcal{X}$  possuir um grafo  $H$  que não é  $\preceq$ -minimal em  $\overline{\mathcal{P}}$  porque digamos  $H \succeq K \in \overline{\mathcal{P}}$  e  $H \neq K$ , então teremos  $\text{Forb}_{\preceq}(\mathcal{X}) = \text{Forb}_{\preceq}(\mathcal{X} \setminus \{H\})$ , pois todos os grafos que possuem  $H$  como menor também possuem  $K$  como menor.

Por outro lado, se um grafo  $\preceq$ -minimal  $H$  de  $\overline{\mathcal{P}}$  não estiver em  $\mathcal{X}$ , então teremos  $H \in \text{Forb}_{\preceq}(\mathcal{X})$ .

Logo  $\mathcal{X}$  é minimal implica que  $\mathcal{X}$  contém exatamente os grafos que são  $\preceq$ -minimais em  $\overline{\mathcal{P}}$ .

Por outro lado, se  $\mathcal{X}$  contém exatamente os grafos que são  $\preceq$ -minimais em  $\overline{\mathcal{P}}$ , então todo grafo  $H \in \text{Forb}_{\preceq}(\mathcal{X})$  está em  $\mathcal{P}$  (caso contrário  $H$  possuiria um menor  $\preceq$ -minimal de  $\overline{\mathcal{P}}$ ).

A outra inclusão segue da hereditariedade de  $\mathcal{P}$ .  $\square$

A proposição acima implica que existe um único conjunto minimal de menores proibidos (a menos de isomorfismo) para uma propriedade hereditária.

Ademais, os elementos desse conjunto são incomparáveis sob  $\preceq$ . O ‘Minor Theorem’ (enunciado a seguir) implica que qualquer conjunto de grafos  $\preceq$ -incomparáveis é finito.

**Teorema 9.21** [Minor Theorem; Robertson & Seymour, 1986-97] Os grafos finitos são quase-bem-ordenados pela relação de menor  $\preceq$ .

**Corolário 9.22** Toda propriedade de grafos que é fechada sob tomada de menores pode ser expressa como  $\text{Forb}_{\preceq}(\mathcal{X})$  com  $\mathcal{X}$  finito.

Como a propriedade de “ser imersível numa superfície” é fechada sob tomada de menores, o seguinte corolário segue.

**Corolário 9.23** Para toda superfície  $S$  existe um conjunto finito de grafos  $\mathcal{X}$  tal que  $\text{Forb}_{\preceq}(\mathcal{X})$  contém precisamente os grafos não-imersíveis em  $S$ .

A título de curiosidade, a propriedade de imersibilidade no plano projetivo equivale a um total 35 menores proibidos.

#### 9.5 EXERCÍCIOS

**Exercício 9.2.** Sejam  $\preceq_1$  e  $\preceq_2$  quase-boas-ordens sobre  $Q_1$  e  $Q_2$  respectivamente. Seja também  $Q = Q_1 \times Q_2$  e defina a relação  $\preceq$  sobre  $Q$  da seguinte forma:

$$(q_1, q_2) \preceq (q'_1, q'_2) \text{ se } q_1 \preceq_1 q'_1 \text{ e } q_2 \preceq_2 q'_2.$$

Prove que  $\preceq$  é uma quase-boa-ordem sobre  $Q$ .

**Exercício 9.3.** Mostre que não vale um resultado análogo ao Lema 9.4 para subconjuntos infinitos de  $X$ , denotado por  $X^\omega$ .

Para isso, seja  $Q$  o conjunto de todos os pares  $(i, j)$  de inteiros  $1 \leq i < j$  e considere a relação  $\preceq$  sobre  $Q$  definida por

$$(i, j) \preceq (i', j') \text{ se } (i = i' \text{ e } j \leq j') \text{ ou } (j < i'),$$

e defina  $Q^\omega = \{A \subset Q : A \text{ é infinito}\}$  e a relação  $\preceq_\omega$  sobre  $Q^\omega$  definida por

$$A \preceq_\omega B, \text{ se existe uma função injetora } f: A \rightarrow B \text{ tal que } a \preceq f(a) \text{ para todo } a \in A.$$

Prove que  $\preceq$  é quase-boa-ordem sobre  $Q$  mas  $\preceq_\omega$  não é quase-boa-ordem sobre  $Q^\omega$ .

**Exercício 9.4.** Prove que a relação de subgrafo não é uma quase-boa-ordem sobre o conjunto das árvores finitas. (Veja Ex 7 do Cap. 12 do Diestel.)

**Exercício 9.5.** Prove que a relação de menor topológico não é uma quase-boa-ordem sobre o conjunto dos grafos finitos. (Veja sugestão no Ex do Cap 12 do Diestel.)

## 9.6 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [AH89] K.I. Appel and W. Haken. *Every Planar Map Is Four Colorable*. Contemporary mathematics, v. 98. American Mathematical Society, 1989.
- [BM08] A. Bondy and U.S.R. Murty. *Graph Theory*. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 2008.
- [Bol98] B. Bollobás. *Modern graph theory*. Graduate Texts in Mathematics Series. Springer-Verlag GmbH, 1998.
- [Bro87] R.L. Brooks. On colouring the nodes of a network. In Ira Gessel and Gian-Carlo Rota, editors, *Classic Papers in Combinatorics*, Modern Birkhäuser Classics, pages 118–121. Birkhäuser Boston, 1987.
- [CCPS11] W.J. Cook, W.H. Cunningham, W.R. Pulleyblank, and A. Schrijver. *Combinatorial Optimization*. Wiley Series in Discrete Mathematics and Optimization. Wiley, 2011.
- [CRST06] Maria Chudnovsky, Neil Robertson, Paul Seymour, and Robin Thomas. The strong perfect graph theorem. *ANNALS OF MATHEMATICS*, 164:51–229, 2006.
- [Die05] Reinhard Diestel. *Graph Theory (Graduate Texts in Mathematics)*. Springer, August 2005.
- [ES35] P. Erdős and G. Szekeres. A combinatorial problem in geometry. *Compositio Math.*, 2:463–470, 1935.
- [Fle14] Tamás Fleiner. Yet another proof for brooks' theorem. Technical Report QP-2014-01, Egerváry Reserch Group, Budapest, 2014. [www.cs.elte.hu/egres](http://www.cs.elte.hu/egres).
- [HS70] A. Hajnal and E. Szemerédi. Proof of a conjecture of P. Erdős. In *Combinatorial theory and its applications, II (Proc. Colloq., Balatonfüred, 1969)*, pages 601–623. North-Holland, Amsterdam, 1970.
- [HT74] John Hopcroft and Robert Tarjan. Efficient planarity testing. *Journal of the ACM (JACM)*, 21(4):549–568, 1974.
- [Kru60] J. B. Kruskal. Well-quasi-ordering, the Tree Theorem, and Vazsonyi's conjecture. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 95:210–225, 1960.



- [Lov75] L Lovász. Three short proofs in graph theory. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 19(3):269 – 271, 1975.
- [Mac37] Saunders MacLane. A combinatorial condition for planar graphs. *Fund. Math*, 28:22–32, 1937.
- [Mak97] Yury Makarychev. A short proof of kuratowski’s graph planarity criterion. *J. Graph Theory*, 25:129–131, 1997.
- [NC88] Takao Nishizeki and Norishige Chiba. *Planar graphs: Theory and algorithms*, volume 140. North Holland, 1988.
- [NRS06] Brendan Nagle, Vojtech Rödl, and Mathias Schacht. The counting lemma for regular  $k$ -uniform hypergraphs. *Random Struct. Algorithms*, 28(2):113–179, 2006.
- [OPT01] Deryk Osthus, Hans Jürgen Prömel, and Anusch Taraz. Almost all graphs with high girth and suitable density have high chromatic number. *J. Graph Theory*, 37(4):220–226, August 2001.
- [Ore55] Oystein Ore. Graphs and matching theorems. *Duke Math. J.*, 22:625–639, 1955.
- [PL86] D. Plummer and L. Lovász. *Matching Theory*. North-Holland Mathematics Studies. Elsevier Science, 1986.
- [Ric46] M. Richardson. On weakly ordered systems. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 52:113–116, 1946.
- [Tho80] C. Thomassen. *Kuratowski’s Theorem*. Preprint series: Matematisk Institut. Matematisk Inst., Univ., 1980.
- [Tho81] Carsten Thomassen. Kuratowski’s theorem. *Journal of Graph Theory*, 5:225–241, 1981.
- [Tho88] Andrew Thomason. An upper bound for some Ramsey numbers. *J. Graph Theory*, 12(4):509–517, 1988.
- [TT81] C. Thomassen and B. Toft. Non-separating induced cycles in graphs. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 31(2):199–224, October 1981.
- [Wes] Douglas B. West. Ore, Berge–Tutte, and Gallai–Edmonds.
- [Wes11] Douglas B. West. A short proof of the Berge–Tutte Formula and the Gallai–Edmonds Structure Theorem. *European Journal of Combinatorics*, 32(5):674–676, 2011.