Teorema 7.9 (Teorema de Ramsey para hipergrafos). Para todo inteiros positivos $p_1, \ldots, p_k$ existe um inteiro positivo n tal que para toda k-coloração das arestas do l-grafo completo $K_n^{(l)}$ existe um subgrafo $K_{p_i}^{(l)}$ monocromático da cor i.

Demonstração. Mostremos, por indução dupla em l e $p_1 + \ldots + p_k$, que

$$R^{(l)}(p_1, p_2, \ldots, p_k) \leq 1 + R^{(l-1)}(R_1, R_2, \ldots, R_k), \qquad (7.1)$$

onde $R_i = R^{(l)}(p_1, \ldots, p_i - 1, \ldots, p_k)$.

Para $l = 1$, temos, pelo Lema 7.8, que $R^{(1)}(p_1, p_2, \ldots, p_k)$ existe e é igual a $\sum_{i=1}^{k} (p_i - 1) + 1$.

Suponhamos que o teorema vale para um k-coloração do $(l-1)$-grafo completo. Mostremos, por indução em $p_1 + \ldots + p_k$, que o teorema vale para uma k-coloração do l-grafo completo.

Se algum p_i é menor que l, então o grafo completo $K_{p_i}^{(l)}$ tem cor i. Logo

$$R^{(l)}(p_1, p_2, \ldots, p_k) = \min\{p_1, \ldots, p_k\}.$$

Suponhamos que a desigualdade (7.1) vale para $p_1 + \ldots + p_k - 1$. Pela hipótese de indução (tanto a interna quanto a externa), R_i existem, para todo $1 \leq i \leq k$.

Seja $n = 1 + R^{(l-1)}(R_1, \ldots, R_k)$. Fixemos uma k-coloração das arestas de $K_n^{(l)}$ e v vértice de $K_n^{(l)}$. Pela escolha de n, temos que existe i tal que o vértice v possui pelo menos R_i arestas de cor i incidentes. Temos dois casos:

1. Existe um subgrafo $K_{p_i-1}^{(l)}$ tal que suas arestas tem cor i;
2. Existe um subgrafo $K_{p_j}^{(l)}$ com $j \neq i$ tal que suas arestas possuem a cor j.

Se ocorrer o segundo caso, não há nada para fazer. Suponhamos que ocorreu o primeiro caso. Como v possui R_i arestas de cor i incidentes e não ocorreu o segundo caso, temos que $K_n^{(l)}$ possui um subgrafo $K_{p_i}^{(l)}$ monocromático da cor i. $\square$

7.3 Número de Ramsey para grafos arbitrários

Pela definição do número de Ramsey $r(n, m)$, queremos encontrar grafos com quantidade de vértices suficientemente grande para conter uma cópia de K_n ou $\overline{K_m}$. Podemos generalizar o número de Ramsey substituindo K_n e $\overline{K_m}$ por dois grafos G_1 e G_2 com $|V(G_1)| = n$ e $|V(G_2)| = m$. Neste caso, definimos o número de Ramsey generalizado.

Definição 7.10 Sejam n e m inteiros positivos e G_1 e G_2 grafos com ordem n e m, respectivamente. O *número de Ramsey generalizado* $r(G_1, G_2)$ é o menor inteiro positivo p tal que qualquer grafo G de ordem p ontém uma cópia de G_1 ou seu complemento contém uma cópia de G_2.

Claramente $r(n, m) = r(K_m, K_n)$. Ademais, para todo grafo G_1 e G_2 com ordem n e m, respectivamente, vale $r(G_1, G_2) \leq r(n, m)$. Isto mostra que $r(G_1, G_2)$ está bem definido. Entretanto, pode ocorrer que $r(G_1, G_2)$ seja muito menor que $r(n, m)$ se G_1 e G_2 forem 'esparsos', isto é, a ordem de G_1 e G_2 forem relativamente grande em relação às suas quantidades de arestas.

Uma outra forma de definir o número de Ramsey generalizado é utilizando colorações. De fato, o número $r(G_1, G_2)$ é o menor inteiro positivo p tal que para toda 2-coloração das arestas do grafo completo K_p existe um subgrafo monocromático G_i de cor i.

Apresentaremos alguns resultados para grafos particulares.

Teorema 7.11 (Chvátal,77). Seja T_m uma árvore qualquer de ordem $m \geq 1$ e seja n um natural não nulo. Então

$$r(T_m, K_n) = 1 + (m-1)(n-1).$$

Demonstração. Considere $m > 1$ e $n > 1$, caso contrário o resultado é trivial. Considere $G = (n-1)K_{m-1}$ uma união disjunta de $n-1$ cópias de K_{m-1}. Note que G tem $(m-1)(n-1)$ vértices e não contém nem T_m e nem $\overline{K_n}$. Isso mostra que $r(T_m, K_n) \geq 1 + (m-1)(n-1)$.

Seja G um grafo com $1 + (m-1)(n-1)$ vértices. Suponhamos que $G \not\supseteq \overline{K_n}$. Mostremos que $G \supseteq T_m$. Notemos que $\alpha(G) \leq n-1$. Como $\chi(G) \geq \frac{|V(G)|}{\alpha(G)}$, vale

$$\chi(G) \geq \frac{1+(m-1)(n-1)}{n-1} > m-1.$$

Portanto $\chi(G) \geq m$. Seja G' um subgrafo de G que é criticamente m-cromático, isto é, $\chi(G') = m$ e $\chi(G'-v) = m-1$ para todo vértice v. Neste caso $\delta(G') \geq m-1$ (exercício), donde concluímos que $G' \supseteq T_m$. Portanto $G \supseteq T_m$, como queríamos. □

Exercício 7.2. Fazer uma outra prova do Teorema 7.11, usando a linguagem de 2-coloração de $K_{(m-1)(n-1)+1}$ e fazendo indução em $m+n$.

Teorema 7.12 Para $\ell \geq 1$ e $p \geq 2$ temos

$$r(lK_2, K_p) = 2\ell + p - 2.$$

Demonstração. O grafo $K_{2\ell-1} \cup \overline{K_{p-2}}$ não contém ℓ arestas independentes, e seu complementar, o grafo $\overline{K_{2\ell-1}} + K_{p-2}$, não contém um grafo completo de ordem p. Logo $r(\ell K_2, K_p) \geq 2\ell + p - 2$.

Por outro lado, seja G um grafo de ordem $n = 2\ell + p - 2$. Suponhamos que G contém no máximo $s \leq \ell - 1$ arestas independentes. Mostremos que $\overline{G}$ contém um subgrafo K_p.

Como $n - 2s \geq 2\ell + p - 2 - 2(\ell-1) = p$, pelo menos p vértices de G são independentes. Logo, existe K_p em $\overline{G}$. □

Notemos que se H é um grafo qualquer de ordem h, pelo Teorema 7.12, segue que

$$r(lK_2, H) \leq r(\ell K_2, K_h) \leq 2\ell + h - 2.$$

O resultado a seguir fornece uma cota inferior para o número de Ramsey generalizado. Seja G um grafo. Como usual, denotemos por $\chi(G)$ o número cromático de G. Ademais, denotamos por $c(G)$ o máximo das ordens dos componentes de G, e definimos $u(G)$ como sendo a cardinalidade mínima das classes de cores considerando-se todas as colorações próprias de G com $\chi(G)$ cores.

Teorema 7.13 Para quaisquer grafos H_1 e H_2 com pelo menos uma aresta temos

$$r(H_1, H_2) \geq (\chi(H_1) - 1)(c(H_2) - 1) + u(H_1).$$

Demonstração. Sejam $k = \chi(H_1)$, $u = u(H_1)$ e $c = c(H_2)$. Naturalmente,

$$r(H_1, H_2) \geq r(H_1, K_2) = |V(H_1)| \geq \chi(H_1)u(H_1) = ku.$$

Assim, se $c \leq u$, então $r(H_1, H_2) \geq ku \geq (k-1)c + u$. Por outro lado, se $c > u$, então o grafo $G = (k-1)K_{c-1} \cup K_{u-1}$ não contém H_2, e seu complementar não contém H_1. Portanto,

$$r(H_1, H_2) \geq |V(G)| + 1 = (k-1)(c-1) + u,$$

como queríamos. □

Teorema 7.14 Para $\ell \geq 2$ temos

$$r(F_1, F_l) = r(K_3, F_\ell) = 4\ell + 1,$$

onde F_ℓ é união de ℓ triângulos K_3 com um vértice em comum.

Demonstração. Pelo Teorema 7.13, sabemos que $r(K_3, F_\ell) \geq 2(|F_\ell| - 1) + 1 = 4\ell + 1$.

Suponhamos por absurdo que não vale a desigualdade $r(K_3, F_\ell) \leq 4l + 1$ isto é, existe um grafo G livre de triângulos de ordem $4\ell + 1$tal que seu complementar não contém F_ℓ.

Fixemos v vértice de G e seja $U = N_G(v)$. Então U é um conjunto de vértices independentes, e, como $\overline{G}$ não contém F_ℓ, temos $d_G(v) = |U| \leq 2\ell$.

Por outro lado, observemos o grau de v em $\overline{G}$. Seja $W = N_{\overline{G}}(v) = V(G) - (U \cup \{v\})$. Temos que $\overline{G}[W]$ não contém ℓ arestas independentes, e seu complementar $G[W]$ não possui triângulos. Então, pelo Teorema 7.12, $d_{\overline{G}}(v) = |W| \leq 2\ell$.

Logo concluímos que $d_G(v) = d_{\overline{G}}(v) = 2l$ para todo $v \in G$, isto é, G é um grafo livre de triângulos 2ℓ-regular de ordem $4\ell + 1$. Mostremos que isso não pode ocorrer.

Suponhamos por absurdo que existe um grafo $G = (V, E)$ que satisfaz as condições acima. Notemos que G pode ser escrito como um grafo bipartido com 2ℓ vértices mais um vértice w. Temos dois casos, ou os vizinhos de w estão somente em um dos lados da partição, ou w tem vizinhos nos dois lados da partição.

Se ocorrer o primeiro caso, vamos supor, sem perda de generalidade, que w incide suas arestas no lado esquerdo da partição. Temos que cada vértice da partição da esquerda incide $2\ell - 1$ arestas na partição da direita. Logo, existe um vértice do lado direito da partição com no máximo $2\ell - 1$ arestas incididas, uma contradição.

Se ocorrer o segundo caso, suponhamos que w incide a arestas no lado esquerdo da partição e b arestas no lado direito da partição, com $a + b = 2\ell$. Suponhamos que $a \leq b$, isto é, $a \leq \ell$.

Por definição de grafo bipartido, sejam os conjuntos de vértices independentes W e X disjuntos tais que $W \cup X = V \setminus \{w\}$. Sejam os conjuntos $A \subset W$ e $B \subset X$ tais que $|A| = a$ e $|B| = b$ que satisfaz a condição acima.

Fixemos um vértice u de A. Temos que u não pode incidir em algum vértice de B, pois teríamos um triângulo. Logo u só pode incidir em $2\ell - b = a \leq \ell$ vértices. Mas assim $d(u) \leq \ell + 1$, uma contradição. □

A seguir, apresentaremos outros resultados, sem provas, sobre o número de Ramsey generalizado.

Teorema 7.15 (Lawrence,73).

$$r(C_m, K_{1,n}) = \begin{cases} 2n + 1 & \text{se } m \text{ é ímpar e } m \leq 2m + 1 \\ m & \text{se } m \geq 2n \end{cases}$$

Teorema 7.16 (Chvátal & Harary, 72). Para qualquer grafo G de ordem m e sem vértices isolados,

$$r(G, P_3) = \begin{cases} m + 1 & \text{se } \overline{G} \text{ tem um emparelhamento perfeito,} \\ m & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Teorema 7.17 (Chvátal & Gyárfás,67). Para naturais m, n com $2 \leq m \leq n$

$$r(P_m, P_n) = n + \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor - 1$$

Teorema 7.18 (Faudree & Schelp, 74). Sejam m, n naturais tais que $3 \leq m \leq n$.

(a) Se m é ímpar e $(m, n) \neq (3, 3)$, então

$$r(C_m, C_n) = 2n - 1.$$

(b) Se m e n são pares e $(m, n) \neq (4, 4)$, então

$$r(C_m, C_n) = n + \frac{m}{2} - 1$$

(c) Se n é ímpar e m é par, então

$$r(C_m, C_n) = \max\{n + \frac{m}{2} - 1, 2m - 1\}$$

(d) $r(C_3, C_3) = r(C_4, C_4) = 6$.

A Teoria de Ramsey é uma área extensa. Resultados dessas teoria encontram-se, por exemplo, na teoria dos grafos, na teoria dos conjuntos, na teoria dos números, na teoria ergódica, em sistemas dinâmicos topológicos.

Nesta seção veremos alguns resultados nos quais é aplicado o Teorema de Ramsey, e também teoremas que são do tipo Ramsey, isto é, teoremas envolvendo estruturas que são preservadas sob partição.

Primeiramente apresentaremos o Lema de Kőnig, um resultado importante na teoria dos grafos.

Teorema 7.19 [Lema de Kőnig] Seja $V_0, V_1, \ldots$ uma sequência *infinita* de *conjuntos finitos disjuntos*, não vazios, e seja G um grafo cujo conjunto de vértices é a união desses conjuntos. Suponha que todo vértice $v \in V_i$, $i \geq 1$, tem um vizinho $f(v)$ em V_{i-1}. Então G contém um *caminho infinito* $v_0 v_1 \cdots$ com $v_i \in V_i$ para todo i.

Demonstração. Seja $\mathcal{P}$ o conjunto dos caminhos da forma $(v, f(v), f(f(v)), \ldots)$ que termina num vértice de V_0. Como $\mathcal{P}$ é infinito e V_0 é finito, existe um vértice de V_0, digamos v_0, que é término de um número infinito de caminhos de $\mathcal{P}$. Dentre esses infinitos caminhos que terminam em v_0, há um número infinito de caminhos cujo penúltimo vértice é um vértice, digamos v_1 de V_1. Procedendo indutivamente, definimos $v_i \in V_i$ para todo $i \geq 1$. Portanto $v_0 v_1 \cdots$ é um caminho infinito em G. $\square$

Agora veremos a versão infinita do Teorema de Ramsey.

Definição 7.20 Dados X um conjunto de cardinalidade infinita e $k \in \mathbb{N}$, definimos os seguintes conjuntos:

$$\mathcal{P}_\infty(X) = \{Y \subset X : \ |Y| = \infty\};$$
$$\mathcal{P}_k(X) = \{Y \subset X : \ |Y| = k\}.$$

Definição 7.21 Sejam c, k inteiros positivos e X um conjunto infinito. Uma *c-coloração de $\mathcal{P}_k(X)$* é uma partição de $\mathcal{P}_k(X)$ em no máximo c classes (cores). Se $(A_1, \ldots, A_c)$ é uma coloração de $\mathcal{P}_k(X)$, para cada i, dizemos que cada elemento de A_i está *colorido* com a cor i.

Dada uma c-coloração de $\mathcal{P}_k(X)$, dizemos que um conjunto $Y \in \mathcal{P}_\infty(X)$ é *monocromático* se todos os elementos de $\mathcal{P}_k(Y)$ estão coloridos com a cor i, para algum i.

Teorema 7.22 [Versão infinita do Teorema de Ramsey] Sejam k, c inteiros positivos e X um conjunto infinito. Para toda c-coloração de $\mathcal{P}_k(X)$ existe um conjunto infinito $Y \in \mathcal{P}_\infty(X)$ monocromático.

Demonstração. A prova segue por indução em k, com c fixo. Se $k = 1$ o resultado é óbvio, pois $P_1(X) = X$.

Suponhamos que $k > 1$ e que a afirmação vale valores menores do que k. Fixe uma c-coloração de $P_k(X)$. Vamos construir uma sequência infinita $X_0, X_1, X_2, \ldots$ de subconjuntos *infinitos* de X, e escolher $x_i \in X_i$ com as seguintes propriedades.

(a) $X_{i+1} \subseteq X_i \setminus \{x_i\}$;
(b) Todos os conjuntos $\{x_i\} \cup Z \in \mathcal{P}_k(X_{i+1})$ com $Z \in \mathcal{P}_{k-1}(X_{i+1})$ têm a mesma cor.

Começamos com $X_0 = X$ e tomamos $x_0 \in X$ arbitrário. Por hipótese, sabemos que X_0 é infinito. Uma vez escolhido X_i e um elemento $x_i \in X_i$, definimos uma c-coloração de $\mathcal{P}_{k-1}(X_i \setminus \{x_i\})$, onde cada conjunto $Z \in \mathcal{P}_{k-1}(X_i \setminus \{x_i\})$ recebe a cor de $\{x_i\} \cup Z$ da c-coloração de $\mathcal{P}_k(X)$.

Pela hipótese de indução, temos que $X_i \setminus \{x_i\}$ tem um subconjunto $Y' \in \mathcal{P}_\infty(X_i \setminus \{x_i\})$ monocromático, que tomamos para ser X_{i+1}.

Notemos que tal construção satisfaz (a) e (b). Ademais, existe um $t \in \{1, \ldots, c\}$ e uma subsequência $(x_{i_p})_{p \geq 0}$ de $(x_i)_{i \geq 0}$ tais que X_{i_p} é monocromático com a cor t. Pela Propriedade (a), todo conjunto $C \subset \{x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots\}$ está colorido com a cor t. Portanto (x_{i_p}) formam o conjunto Y procurado. $\square$

O teorema a seguir é o resultado obtido por Ramsey em 1927.

Teorema 7.23 [Teorema de Ramsey, 1927] Dados inteiros positivos c, t e k, $c \geq 2$ e $t \geq k \geq 1$, existe um natural $p \geq k$ tal que para todo conjunto X com p elementos e uma c-coloração de $\mathcal{P}_k(X)$, existe um $Y \in \mathcal{P}_t(X)$ monocromático.

Demonstração. Suponhamos, por absurdo, que a afirmação do teorema seja falsa para alguma tripla (c, t, k). Assim, para todo $p \geq k$ existem um conjunto X com $|X| = p$, o qual podemos supor, sem perda de generalidade, que $X = [p]$, e uma c-coloração de $\mathcal{P}_k(X)$ tal que X não contém um $Y \in \mathcal{P}_t(X)$ monocromático. Denominemos tais colorações de "ruins".

Mostremos que essas colorações ruins induzem uma coloração ruim de $\mathcal{P}_k(\mathbb{N}^*)$, onde $\mathbb{N}^* = \{1, 2, \ldots\}$, contrariando o Teorema 7.22.

Para todo $p \geq k$, seja V_p o conjunto das colorações ruins de $\mathcal{P}_k([p])$. Claramente, para todo $p > k$ temos que se $g \in V_p$ então a restrição $f(g)$ de g a $\mathcal{P}_k([p-1])$ é uma coloração ruim e, portanto, pertence a V_{p-1}.

Pelo Lema 7.19, existe uma sequência infinita $(g_p)_{p \geq k}$ de colorações ruins $g_p \in V_p$ tais que $f(g_p) = g_{p-1}$ para todo $p > k$. Para todo $m \geq k$, todas as colorações ruins g_p, com $p \geq m$, coincidem sobre $\mathcal{P}_k([m])$, e portanto para cada $Y \in \mathcal{P}_k(\mathbb{N}^*)$ o valor $g_p(Y)$ coincide para todo $p \geq \max Y$.

Defina $g(Y)$ como este valor comum $g_p(Y)$. Então g é uma c-coloração ruim de $\mathcal{P}_k(\mathbb{N}^*)$. De fato, pois todo subconjunto $T \subseteq \mathbb{N}^*$ com $|T| = t$ está contido em algum $[p]$ (basta tomar $p = \max T$) e, portanto, T não pode ser monocromático, pois g coincide sobre $\mathcal{P}_k([p])$ com a coloração ruim g_p. A existência dessa coloração ruim de $\mathcal{P}_k(\mathbb{N}^*)$ contradiz o Teorema 7.22, como queríamos. □

Até este momento, estamos sempre trabalhando com um número finito de cores. Apresentaremos agora um exemplo mostrando que o Teorema 7.22 é falso quando colorimos subconjuntos de cardinalidade infinita.

Proposição 7.24 Existe uma 2-coloração de $\mathcal{P}_\infty(\mathbb{N})$ que não possui um subconjunto monocromático de cardinalidade infinita.

Demonstração. Construímos uma 2-coloração c tal que para todo $M \in \mathcal{P}_\infty(\mathbb{N})$ e $x \in M$ temos $c(M \setminus \{x\}) \neq c(M)$. Isto é claramente suficiente para provar a proposição.

Definimos uma relação $\sim$ sobre $\mathcal{P}_\infty(\mathbb{N})$ definida por $L \sim M$ se $|L \Delta M| < \infty$, onde $L \Delta M = (L \setminus M) \cup (M \setminus L)$. Mostremos que $\sim$ é uma relação de equivalência.

i) Claramente $L \sim L$ pois $|L \Delta L| = 0 < \infty$ para todo $L \in \mathcal{P}_\infty(\mathbb{N})$;

ii) Claramente $L \sim M$ se e somente se $M \sim L$, pois $|L \Delta M| = |M \Delta L|$ para todo $L, M \in \mathcal{P}_\infty(\mathbb{N})$;

iii) Sejam L, M, $N \in \mathcal{P}_\infty(\mathbb{N})$, mostremos que se $L \sim M$ e $M \sim N$ então $L \sim N$.

Como $|L \Delta M| < \infty$, temos $L \setminus M$ e $M \setminus L$ finitos.
Como $|M \Delta N| < \infty$, temos $M \setminus N$ e $N \setminus M$ finitos.
Assim,

$$L \setminus N = (L \setminus (N \cup M)) \cup ((L \cap M) \setminus N) \subset (L \setminus M) \cup (M \setminus N).$$

e

$$N \setminus L = (N \setminus (L \cup M)) \cup ((M \cap N) \setminus L) \subset (N \setminus M) \cup (M \setminus L).$$

Logo $L \setminus N$ e $N \setminus L$ são finitos. E portanto $|L \Delta N| = |L \setminus N| + |N \setminus L| < \infty$.

Denotemos as classes de equivalências por $\{E_i : i \in I\}$. Para cada i escolhemos $M_i \in E_i$. Observemos que dado $M \in \mathcal{P}_\infty(\mathbb{N})$ existe único $i \in I$ tal que $M \sim M_i$.

Definimos $c : \mathcal{P}_\infty(\mathbb{N}) \to [2]$ dada por $c(M) = 1$ se $|M \Delta M_i|$ é par para algum $i \in I$ e $c(M) = 2$ se $|M \Delta M_i|$ é impar para algum $i \in I$.

Fixemos $M \in \mathcal{P}_\infty(\mathbb{N})$ e $x \in M$. Se $c(M) = 1$, então $|M \Delta M_i|$ é par para algum $i \in I$, logo $|M \setminus \{x\} \Delta M_i|$ é ímpar. Portanto $c(M \setminus \{x\}) = 2$. Analogamente, se $c(M) = 2$, então $c(M \setminus \{x\}) = 1$. □

Apresentemos uma aplicação à geometria utilizando o Teorema de Ramsey, conhecida como *Happy Ending Problem*.

Teorema 7.25 (Erdős – Szekeres, 1935). Dado $m \geq 3$, existe o menor natural $f(n)$ tal que, para todo $f(m)$ pontos no plano três a três não-colineares existem m desses pontos que formam um polígono convexo.

Exercício 7.3. Prove o Teorema 7.25. Utilize e prove os seguintes lemas abaixo.

Lema 7.26 Entre cinco pontos do plano três a três não colineares, existem quatro que formam um quadrilátero convexo.

Lema 7.27 Se entre $m \geq 4$ pontos no plano, três a três não-colineares, cada quatro formam vértices de um quadrilátero convexo, então os m pontos são os vértices de um polígono convexo.

Claramente $f(3) = 3$. É um bom exercício provar que $f(4) = 5$ e $f(5) = 9$. Em 2006, Szekeres e Peters provaram que $f(6) = 17$. A partir desse números, é natural conjecturarmos que $f(m) = 2^{m-2} + 1$. Em 1961, Erdős e Szekeres provaram que $f(m) \geq 2^{m-2} + 1$. A melhor cota superior conhecida é devida a Tóth e Valtr, provada em 2005. Quando $m \geq 7$,

$$f(m) \leq \binom{2m-5}{m-2} = O\left(\frac{4^m}{\sqrt{m}}\right).$$

Teoremas tipo Ramsey na combinatória aditiva

A seguir, veremos uma aplicação do Teorema 7.23 para obter um resultado de combinatória aditiva. O resultado a seguir foi provado por Issai Schur em 1916.

Teorema 7.28 (Schur, 1916). Para todo inteiro positivo $n \geq 2$ existe um menor natural $\phi(n)$ tal que para qualquer partição do conjunto $\{1, \ldots, \phi(n)\}$ em n classes, existem inteiros x, y, z numa mesma classe, tais que $x + y = z$.

Demonstração. Seja $(c, t, k) = (n, 3, 2)$. Pelo Teorema 7.23, existe um inteiro positivo $p \geq 2$ tal que para toda n-coloração de $\mathcal{P}_2([p])$ existe um conjunto $Y \subset X$ monocromático com $|Y| = 3$.

Considere uma n-coloração de $[p]$ em n classes $X_1, \ldots, X_n$, e defina a seguinte partição de $\mathcal{P}_2([p])$.

$$\mathcal{C}_i = \{\{a, b\} \in \mathcal{P}_2([p]) \,:\, |a - b| \in X_i\},$$

para todo $1 \leq i \leq n$.

Como $(\mathcal{C}_1 \ldots, \mathcal{C}_n)$ é uma n-coloração de $\mathcal{P}_2([p])$, existe um conjunto $Y = \{a, b, c\}$ de X, tal que $\{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\} \in \mathcal{C}_i$ para algum i.

Suponhamos que $a > b > c$. Sejam $x = b - a$, $y = c - b$ e $z = c - a$. Temos $x,\ y,\ z \in X_i$ e $x + y = z$, como queríamos. □

Exercício 7.4. Mostre que para toda 2-coloração do conjunto $\{1, 2, \ldots, 325\}$ existem inteiros positivos x, y, z distintos de mesma cor tais que $y = \frac{1}{2}(x + z)$.

Motivado pelo estudo do Último Teorema de Fermat, Schur demonstrou o seguinte teorema.

Teorema 7.29 (Schur, 1916). Para todo inteiro positivo n, existe um primo p_0 tal que, para todo primo $p \geq p_0$, a equação

$$x^n + y^n \equiv z^n (\text{mod } p)$$

possui uma solução não trivial em $\mathbb{Z}_p$.

Demonstração. Fixe um inteiro positivo n. Pelo Teorema 7.28, existe um primo p_0 tal que, para toda n-coloração de $[p_0]$ existem $x_0,\ y_0,\ z_0 \in [p_0]$ de mesma cor tais que $x_0 + y_0 = z_0$.

Fixe um primo $p \geq p_0$ qualquer e considere o grupo multiplicativo $(\mathbb{Z}_p^*, \cdot)$. Sabemos que este grupo possui um gerador g, isto é, se $t \in \mathbb{Z}_p^*$, então $t = g^m$ para algum inteiro positivo m. Logo, todo elemento $t \in \mathbb{Z}_p^*$ pode ser escrito da forma $t = g^{kn+r}$, onde k é inteiro positivo e $0 \leq r \leq n-1$. Façamos uma n-coloração em $\mathbb{Z}_p^*$ dada por $c(t) = r$. Pelo Teorema 7.28, existem $x_1,\ x_2,\ x_3 \in \mathbb{Z}_p^*$ tais que $c(x_1) = c(x_2) = c(x_3)$ e $x_1 + x_2 \equiv x_3 (\text{mod } p)$. Assim

$$g^{k_1 n + r} + g^{k_2 n + r} \equiv g^{k_3 n + r} (\text{mod } p).$$

Como g^r é inversível módulo p, tomando $x = g^{k_1}$, $y = g^{k_2}$ e $z = g^{k_3}$, obtemos

$$x^n + y^n \equiv z^n (\text{mod } p),$$

como queríamos. □

Segue agora um resultado clássico que foi conjecturado por Schur e que foi provado porBartel L. van der Waerden em 1927.

Teorema 7.30 Para todo inteiros positivos r e k existe um inteiro positivo n tal que toda r-coloração de $[n]$ contém uma progressão aritmética monocromática de comprimento k.

Demonstração. Definimos $W(r,k)$ como o menor inteiro positivo n que satisfaz o teorema acima.

Mostremos que $W(r,k)$ está bem definido por indução dupla. Claramente para $k \leq 2$ é trivial, para todo inteiro positivo r. Suponhamos que $W(r, k-1)$ existe para todo inteiro positivo r. Denotemos por $A_i = PA(a_i, r_i, l)$ como o subconjunto dos inteiros positivos que forma uma progressão aritmética de comprimento l, primeiro elemento a_i e razão r_i. As progressões aritméticas $A_1, \ldots A_t$ são ditas *focadas em* $z \in \mathbb{Z}$ se $a_i + lr_i = z$ para todo $1 \leq i \leq t.$, e são ditas *focadas em cores* (e com foco z) se todas são monocromáticas, e cada uma está colorido diferentemente das outras.

Mostremos a seguinte afirmação: Sejam k e r inteiros positivos. Para todo $s \leq r$ existe um inteiro positivo n tal que para toda r-coloração de $[n]$ existe ou uma progressão aritmética de comprimento k, ou s progressões aritméticas focadas em cores de comprimento $k-1$, todas com o mesmo foco.

A prova é por indução em s. Se $s = 1$, pela hipótese de indução, podemos tomar $n = 2W(r, k-1)$, que claramente satisfaz a afirmação.

Seja $s > 1$, e suponhamos, por hipótese de indução, que existe um n para $s-1$. Mostremos que $N = 2 * [2nW(r^{2n}, k-1)]$ é o inteiro que satisfará a afirmação para s. De fato, particionaremos $[N]$ em blocos de comprimento $2n$. Pela definição de n, cada bloco contém ou uma progressão aritmética de comprimento k (e neste caso o resultado segue), ou contém $s-1$ progressões aritméticas focadas em cores de comprimento $k-1$, cujo foco dessas progressões pertencem ao mesmo bloco.

Observe que a r-coloração em $[N]$ induz uma r^{2n}-coloração nos blocos. Pela definição de N, existe uma progressão aritmética monocromática $\{B(x), B(x+y) \ldots, B(x+(k-2)y)\}$, onde $B(x+iy)$ são os blocos.

Seja $A_i = PA(a_i, r_i, k-1)$, com $1 \leq i \leq s-1$ as $s-1$ progressões aritméticas focadas em cores em $B(x)$, e seja z o foco. Observe que as seguintes $s-1$ progressões aritméticas de comprimento $k-1$ são focadas em cores no foco $z + 2niy(k-1)$.

$$\tilde{A}_i = PA(a_i, r_i + 2yi, k-1),$$

com $1 \leq i \leq s-1$, e $PA(z, 2yn, k-1)$, isso prova a afirmação.

Tomando $r = s$, se existe uma progressão aritmética de comprimento k, o teorema segue. Se existem s progressões aritméticas focadas em cores de comprimento $k-1$, então uma delas é uma progressão aritmética que possui a mesma cor do foco, e logo é uma progressão aritmética de comprimento k, como queríamos. $\square$

A *hierarquia de Ackermann* é uma família de funções $f_n : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ com n inteiro positivo dadas por $f_1(k) = 2k$, e $f_{n+1}(k) = f_n^k(1)$. Note que $f_2(k) = 2^k$ e $f_3(k)$ é uma torre de 2 de altura k.

A cota superior dada na demonstração acima é muito ruim. De fato, a função $W(2,k)$ cresce mais rápido que todas as funções da hierarquia de Ackermann. Mas em 1988, Shelah mostrou uma cota muito melhor, a saber,

$$W(r,k) \leq f_4(r+k).$$

Em 2001, Gower encontrou uma cota melhorada para duas cores, a saber,

$$W(2,k) \leq 2^{2^{2^{2^{2^{k+9}}}}}.$$

Graham conjecturou, oferecendo 1000 dólares a quem resolver a conjectura, que para todo k inteiro positivo, vale

$$W(2,k) \leq 2^{k^2}.$$

A conjectura está aberta há mais de 30 anos.

Berlekamp apresentou uma cota inferior para o número de van der Werden. A saber,

$$W(2,p+1) \geq p2^p,$$

para todo primo p.

Exercício 7.5. Prove ou dê um contra-exemplo. Para toda 2-coloração dos naturais existe uma progressão aritmética monocromática de comprimento infinito.

Apresentaremos a seguir o Teorema de van der Waerden fortalecido, onde a razão é monocromática juntamente com a progressão aritmética.

Teorema 7.31 (Teorema de van der Waerden fortalecido). Para todo inteiros positivos p e k , existe um inteiro positivo n tal que para toda k-coloração de $[n]$ existe uma progressão aritmética de comprimento p tal que seus elementos e sua razão possuem as mesmas cores.

Exercício 7.6. Prove o Teorema 7.31 a partir do Teorema 7.30.

Pode-se deduzir o Teorema de Schur utilizando o Teorema 7.31 tomando $p=2$, pois obtemos uma progressão aritmética de comprimento dois tal que seus elementos e sua razão possuem as mesmas cores.

O resultado mais importante da combinatória aditiva é o Teorema de Szemerédi, o qual foi conjecturado por Erdős e Turán em 1936. A densidade superior é definida por

$$\bar{d}(A) = \limsup_{n\to\infty} \frac{|A \cap [n]|}{n}.$$

Teorema 7.32 (Szemerédi, 1975) Todo subconjunto dos naturais com densidade superior positiva contém uma progressão aritmética de comprimento arbitrariamente longo.

Em 2001, Gowers exibiu um uma versão quantitativa do Teorema 7.32.

Teorema 7.33 (Gowers, 2001). Para todo $k > 0$, todo subconjunto de $[N]$ de cardinalidade no mínimo $N(\log\log N)^{-c(k)}$ contém uma progressão aritmética de comprimento k, onde $c(k) = 2^{-2^{k+9}}$.

Em 1977, Furstenburg exibiu uma prova alternativa do Teorema 7.32 utilizando métodos da teoria ergódica; Nagle, Rödl e Schacht, em 2006 [NRS06], provaram o resultado utilizando hipergrafos. O seguinte teorema foi provado por Green e Tao.

Teorema 7.34 (Green – Tao, 2008). Existem progressões aritméticas arbitrariamente longas no conjunto dos números primos.

Note que o resultado não segue do Teorema 7.32, pois se $\pi(n)$ é a quantidade de primos que tem entre 1 e n, pelo Teorema dos números primos,

$$\pi(n) = \frac{n}{\log n}.$$

Portanto, se P é o conjunto dos números primos,

$$\bar{d}(P) = \limsup_{n\to\infty} \frac{\pi(n)}{n} = 0,$$

logo P não tem densidade superior positiva.

Antes de Green e Tao, já haviam resultados sobre progressões aritméticas de números primos, como o Teorema de van der Corput.

Teorema 7.35 (van der Corput, 1939). Existem infinitas progressões aritméticas de comprimento três nno conjunto dos números primos.

Erdős e Turán conjecturaram a seguinte afirmação.

Conjectura 7.36 Se A é um subconjunto dos naturais satisfazendo

$$\sum_{a\in A} \frac{1}{a} = +\infty,$$

então A contém progressões aritméticas de comprimento arbitrariamente longos.

Observe que Teorema 7.34 e o Teorema 7.32 satisfazem a conjectura acima.

7.5 Exercícios

Exercício 7.7. Vimos que $r(m,n) \leq r(m-1,n) + r(m,n-1)$ para todo $m,n > 2$. Mostre que se $r(m-1,n)$ e $r(m,n-1)$ são ambos pares, então vale a desigualdade estrita

$$r(m,n) < r(m-1,n) + r(m,n-1).$$

Exercício 7.8. Seja $n \geq 2$ um natural e considere o grafo K_p sobre o conjunto de vértices $\{1,2,\ldots,3n-4\}$.

Faça uma coloração das arestas de K_p tal que

$$cor(ij) = \begin{cases} \text{vermelho} & \text{se } |i-j| = 1 (\text{mod } 3) \\ \text{azul} & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

Mostre que esse grafo colorido não tem um K_3 vermelho e nem um K_n azul. Deduza que $r(3,n) \geq 3(n-1)$.

Exercício 7.9. Use os exercícios 7.7 e 7.8 acima para provar que

$$r(3,4) = 9.$$

Exercício 7.10. Sejam m,n naturais tais que $m-1$ divide $n-1$. Seja T_m uma árvore qualquer de ordem m. Mostre que $r(T_m, K_{1,n}) = m+n-1$.

Exercício 7.11. Seja $(X,\leq)$ um conjunto totalmente ordenado, e seja $G=(V,E)$ o grafo com $V := \mathcal{P}_2 X$ e $E := \{(x,y)(x',y') : x < y = x' < y'\}$.

(a) Mostre que G não contém triângulos.
(b) Mostre que $\chi(G)$ se torna arbitrariamente grande se $|X|$ é suficientemente grande. [Sugestão: $r(c,3;2)$]

7.6 Referências bibliográficas

[Con09] David Conlon. A new upper bound for diagonal ramsey numbers. *Annals of Mathematics*, 170(2):941–960, 2009.

[ES35] P. Erdös and G. Szekeres. A combinatorial problem in geometry. *Compositio Math.*, 2:463–470, 1935.

[NRS06] Brendan Nagle, Vojtech Rödl, and Mathias Schacht. The counting lemma for regular k-uniform hypergraphs. *Random Struct. Algorithms*, 28(2):113–179, 2006.

[Tho88] Andrew Thomason. An upper bound for some Ramsey numbers. *J. Graph Theory*, 12(4):509–517, 1988.