7 NÚMEROS DE RAMSEY

7.1 TEORIA DE RAMSEY

Em 1927, Frank Plumpton Ramsey [1903 - 1930], lógico inglês, provou no seu trabalho de teoria dos conjuntos o que se chama hoje de *Teorema de Ramsey*, um teorema que abriu novas portas para o estudo de combinatória. Atualmente, devido a vastas pesquisas sobre o assunto, a área conhecida como *Teoria de Ramsey* é bem estabelecida na matemática. Essa teoria procura encontrar regularidades dentro de uma estrutura larga e caótica. Segundo as palavras de Theodore S. Motzkin: "A completa desordem é impossível."

Neste capítulo, apresentaremos o Teorema de Ramsey e vários corolários.

7.2 TEOREMA DE RAMSEY

Vamos lembrar o *Princípio da Casa dos Pombos*: se colocamos $n+1$ pombos em n casas, então alguma casa vai receber mais de um pombo. Embora simples, este princípio é uma poderosa ferramenta para obter resultados de existência. O Teorema de Ramsey pode, a grosso modo, ser visto como uma generalização do princípio da casa dos pombos.

Teorema 7.1 (Teorema de Ramsey, versão para grafos). Dados inteiros positivos n e m, existe um inteiro positivo N tal que, se G é um grafo com pelo menos N vértices, então G contém uma cópia do grafo completo K_n ou contém uma cópia do grafo vazio $\overline{K_m}$.

Uma afirmação que descreve bem o Teorema de Ramsey é a seguinte: Dados inteiros positivos n e m existe um inteiro positivo N tal que, em qualquer conjunto de N pessoas, sempre existem n pessoas que se conhecem mutuamente ou m pessoas que se desconhecem mutuamente.

O **número de Ramsey**, denotado por $r(n,m)$, é o menor N que satisfaz a condição acima. Não é difícil ver que as seguintes propriedades valem para $r(n,m)$.

1. Para todo inteiro positivo n, valem $r(n,1)=1$ e $r(n,2)=n$;
2. Para todo inteiro positivo n e m, vale $r(n,m)=r(m,n)$.

Uma outra forma de definir o número de Ramsey é utilizando colorações. Dado um inteiro positivo k, uma k-coloração de um grafo G é uma função $c\colon E(G)\to X$, onde X é um conjunto de cardinalidade k. Muitas vezes, vemos a coloração c como a partição $\{c^{-1}(x) : x\in X\}$ de $E(G)$ induzida pela pré-imagem de c. Os elementos de X são chamados **cores** da coloração c.

Dada uma coloração c de um grafo G, um subgrafo $H\subseteq G$ e uma cor i, dizemos que H é monocromático de cor i se toda aresta de H possui cor i em G.

Portanto $r(n,m)$ é o o menor inteiro positivo p tal que para toda 2-coloração de K_p, digamos, em verde e azul, existe um subgrafo K_n monocromático de cor verde ou um subgrafo K_m monocromático de cor azul.

Exercício 7.1. Mostre que todo grafo com 6 vértices contém uma cópia de K_3 ou uma cópia de $\overline{K_3}$. Mostre que essa afirmação não vale para grafos com menos do que 6 vértices. Conclua que $r(3,3)=6$.

O resultado a seguir afirma que o número $r(n,m)$ está bem definido para todos inteiros positivos n e m.

Teorema 7.2 Para todos inteiros positivos $m\geq 2$ e $n\geq 2$, existe $r(n,m)$ e

$$r(n,m)\leq r(n-1,m)+r(n,m-1).$$

Demonstração. Vamos provar por indução em $m+n$.

Note que, para $n = 1$ ou $n = 2$, temos $r(1, m) = 1$ e $r(2, m) = m$, para qualquer m.

Suponha que $n \geq 3$ e $m \geq 3$, e que, para todos n' e m' tais que $n' + m' < n + m$, exista $r(n', m')$.

Se G é um grafo com $r(n-1, m) + r(n, m-1)$ vértices, então vamos mostrar que G contém uma cópia do grafo completo K_n ou contém uma cópia do grafo vazio $\overline{K_m}$. Pelo princípio da casa dos pombos, existe um vértice v em G tal que $d_G(v) \geq r(n-1, m)$ ou $d_{\overline{G}}(v) \geq r(n, m-1)$.

Suponha que exista v em G tal que $d_G(v) \geq r(n-1, m)$. Seja $H = G[\mathrm{Adj}(v)]$. Pela hipótese de indução, $H \supseteq K_{n-1}$ ou $H \supseteq \overline{K_m}$. No primeiro caso, basta tomar o K_{n-1} em H e a estrela com centro v. O segundo caso é óbvio.

A demonstração para o caso em que existe v tal que $d_{\overline{G}}(v) \geq r(n, m-1)$ é análoga, tomando $H = G[\mathrm{Adj}_{\overline{G}}(v)]$. □

Teorema 7.3 (Erdős & Szekeres, 35 [ES35]). Para todos inteiros positivos m e n, vale que

$$r(n, m) \leq \binom{n+m-2}{n-1}.$$

Demonstração. Vamos provar por indução em $n + m$.

Já vimos que, para $n = 1$ ou $n = 2$, temos $r(1, m) = 1$ e $r(2, m) = m$, para qualquer m.

Suponha que $n \geq 3$ e $m \geq 3$, e que, para todos n' e m' tais que $n' + m' < n + m$, vale a desigualdade do enunciado.

Em particular, vale que

$$r(n-1, m) \leq \binom{n+m-3}{n-2} \quad \text{e} \quad r(n, m-1) \leq \binom{n+m-3}{n-1}.$$

É fácil ver que

$$\binom{k}{p} = \binom{k-1}{p-1} + \binom{k-1}{p}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} r(n-1, m) + r(n, m-1) &\leq \binom{n+m-3}{n-2} + \binom{n+m-3}{n-1} \\ &= \binom{n+m-2}{n-1}. \end{aligned}$$

□

Um (n, m)-grafo de Ramsey é um grafo com $r(n, m) - 1$ vértices que não contém K_n e nem $\overline{K_m}$.

Não é difícil ver que C_5 é um $(3, 3)$-grafo de Ramsey; e o Wagner graph, que é o grafo C_8 com cordas ligando vértices opostos é um $(3, 4)$-grafo de Ramsey. Observe que ambos os grafos provam que $r(3, 3) > 5$ e $r(3, 4) > 8$.

Em geral, para mostrar o valor exato de $r(n, m)$, basta exibir um (n, m)-grafo de Ramsey com $r(n, m) - 1$ vértices. Porém, é difícil explicitar um (n, m)-grafo de Ramsey para quaisquer n e m.

Poucos valores de $r(n, m)$ são conhecidos. A tabela abaixo mostra alguns deles ou os intervalos que os contêm. (Possivelmente alguns dados podem estar desatualizados.)

	3	4	5	6	7	8	9	10
3	6	9	14	18	23	28	36	40–42
4		18	25	36–41	49–61	58–84	73–115	92–149
5			43–49	58–87	80–143	101–216	126–316	144-442
6				102–165	113–298	132–495	169–780	179–1171
7					205–540	217–1031	241–1713	289–2826
8						282–1870	317–3583	331–6090
9							565–6588	581–12677
10								798–23556

Valores de $r(n, m)$

Um problema famoso relacionado ao Teorema de Ramsey é determinar ou estimar o número $r(n) = r(n,n)$. Já sabemos que $r(1) = 1$, $r(2) = 2$ e $r(3) = 6$. É um bom exercício provar que $r(4) = 18$. Sabe-se somente que $43 \leq r(5) \leq 49$.

Pelo Teorema 7.3, obtemos

$$r(n) \leq \binom{2n-2}{n-1} \leq \frac{c}{\sqrt{n}} 4^n$$

para alguma constante $c > 0$. [Para prova a última desigualdade, usar o seguinte fato: $n! = \sqrt{2\pi}\, n^{n+1/2} e^{-n} e^{r_n}$, onde $\frac{1}{12n+1} < r_n < \frac{1}{12n}$.]

A melhor estimativa inferior é devida a Erdős, que utilizou o que chamamos hoje de *método probabilístico*, um poderoso método que é utilizado fortemente em várias pesquisas atuais. Já vimos o uso de tal método no capítulo anterior.

Teorema 7.4 (Erdős, 1947). Para todo inteiro positivo $n \geq 3$,

$$r(n,n) > \left\lfloor 2^{n/2} \right\rfloor.$$

Demonstração. Fixe um conjunto V com cardinalidade $p = \left\lfloor 2^{n/2} \right\rfloor$, e considere $\mathcal{G}_p$ a classe de todos os grafos sobre V. Então $|\mathcal{G}_p| = 2^N$, onde $N := \binom{p}{2}$.

Afirmamos que existe $G \in \mathcal{G}_p$ tal que $G \not\supseteq K_n$ e $G \not\supseteq \overline{K_n}$.

Seja $\mathcal{H}_p$ a classe dos grafos de $\mathcal{G}_p$ que contêm K_n como subgrafo. Para cada $S \subseteq V$, com $|S| = n$, o número de grafos em $\mathcal{G}_p$ nos quais S induz um subgrafo completo K_n é 2^{N-M}, onde $M := \binom{n}{2}$. Então

$$|\mathcal{H}_p| \leq \binom{p}{n} 2^{N-M} < \frac{p^n}{n!} 2^{N-M}.$$

Sabemos que $p \leq 2^{n/2}$. Logo, $p^n \leq 2^{n^2/2}$. Para $n \geq 3$, temos $2^{n/2} < n!/2$. Assim

$$\begin{aligned}
\left(2^{n/2}\right)^{1/n} &< \left(\frac{1}{2} n!\right)^{1/n} \\
2^{1/2} &< \left(\frac{1}{2} n!\right)^{1/n} \\
2^{n/2} &< \left(\frac{1}{2} n!\right)^{1/n} 2^{\frac{n-1}{2}} \\
2^{n^2/2} &< \left(\frac{1}{2} n!\right) 2^M
\end{aligned}$$

Assim, temos que

$$p^n \leq 2^{n^2/2} < \left(\frac{1}{2} n!\right) 2^M.$$

Portanto,

$$|\mathcal{H}_p| < p^n \frac{1}{n!} 2^{N-M} < \left(\frac{1}{2} n!\right) 2^M \frac{1}{n!} 2^{N-M} = 2^{N-1}.$$

Seja $\mathcal{H}$ o conjunto dos grafos em $\mathcal{H}_p$ e seus complementos, isto é, o conjunto dos grafos que contêm K_n ou $\overline{K_n}$. Como $|\mathcal{G}_p| = 2^N$ e $|\mathcal{H}| < 2|\mathcal{H}_p| < 2^N$, temos que $\mathcal{H}$ é um subconjunto próprio de $\mathcal{G}_p$. Ou seja, existe $G \in \mathcal{G}_p \setminus \mathcal{H}$, como queríamos. □

Thomason, em 1988 [Tho88], provou que existe uma constante $c > 0$ tal que

$$r(n+1) \leq (n+1)^{-1/2 + c/\sqrt{\log(n+1)}} \binom{2n}{n}.$$

Em 2009, Conlon [Con09] provou o seguinte resultado, que melhora sensivelmente o resultado de Thomasson. Existe uma constante $c > 0$

tal que

$$r(n+1) \leq n^{-c \log n / \log \log n} \binom{2n}{n}.$$

Algumas conjecturas na Teoria de Ramsey ainda estão em aberto.

Conjectura 7.5 Existe uma constante k (talvez $k = 1$) tal que $r(n) = 2^{(k+O(1))n}$, para todo n.

Conjectura 7.6 O limite $\lim_{n\to\infty} r(n)^{1/n}$ existe.

Erdős já sabia as seguintes estimativas em 1947, que provamos anteriormente

$$\sqrt{2} \leq \liminf_{n\to\infty} r(n)^{1/n} \leq \limsup_{n\to\infty} r(n)^{1/n} \leq 4.$$

Assim, ele propôs no mesmo ano o problema de encontrar o limite, caso ele exista. Erdős ofereceu 100 dólares para quem resolver a Conjectura 7.6 e 250 dólares para quem conseguir calcular o limite, caso exista.

Teorema de Ramsey com mais cores

O Teorema de Ramsey garante que ao colorirmos as arestas do grafo completo de ordem $r(n, m)$ com duas cores, digamos azul e verde, existe um subgrafo completo monocromático de cor verde de ordem n ou de cor azul de ordem m. A seguir, veremos que o Teorema de Ramsey continua verdadeiro no caso em que temos mais do que duas cores.

Teorema 7.7 (Teorema de Ramsey com k cores). Fixe k inteiros positivos quaisquer $p_1, \ldots, p_k$. Existe um inteiro positivo n tal que para toda k-coloração das arestas do grafo completo de ordem n existe um subgrafo completo de ordem p_i monocromático de cor i, para algum $1 \leq i \leq k$.

Demonstração. Seja $r(p_1, \ldots, p_k)$ o menor n que satisfaz o Teorema de Ramsey com k cores. Por indução em $p_1 + p_2 + \ldots + p_k$, mostremos que

$$r(p_1, p_2, \ldots, p_k) \leq 2 + \sum_{1 \leq i \leq k} (r_i - 1),$$

onde $r_i = r(p_1, \ldots, p_i - 1, \ldots, p_k)$ para todo $1 \leq i \leq k$.

Observe que, se existe i tal que $p_i = 1$, então $r(p_1, p_2, \ldots, p_k) = 1$.

Suponha que todos os p_i's são maiores que 1 e que a afirmação vale para $p_1 + p_2 + \ldots + p_k - 1$.

Seja $n = 2 + \sum_{1 \leq i \leq k} (r_i - 1)$. Fixe uma k-coloração das arestas de K_n e v um vértice de K_n. Pela escolha de n, existe i tal que o vértice v possui pelo menos r_i incidentes arestas de cor i. Considere o grafo $G' = G - v$. Pela hipótese de indução, temos dois casos:

1. O grafo G' contém uma cópia $K_{p_i - 1}$ monocromática de cor i;
2. O grafo G' contém uma cópia K_{p_j} monocromática de cor $j \neq i$.

No segundo caso, não há nada para fazer. Suponha então que não ocorreu o segundo caso. Como v possui pelo menos r_i arestas de cor i incidentes, temos que K_n possui um subgrafo K_{p_i} monocromático da cor i, como queríamos. □

Teorema de Ramsey para hipergrafos completos

Estenderemos a versão de grafos do Teorema de Ramsey para hipergrafos. Um l-*grafo* é um par de conjuntos $G = (V, E)$ tal que $E \subset \binom{V}{l} = \{U \subset V : |U| = l\}$. Um l-*grafo completo* de ordem n, denotado por $K_n^{(l)}$, é um l-grafo de ordem n e de tamanho $\binom{n}{l}$.

Lema 7.8 (Princípio da Casa dos Pombos). Sejam k, $p_1, \ldots, p_k$ naturais. Se $\sum_{i=1}^{k} (p_i - 1) + 1$ objetos são coloridos com k cores, então existe pelo menos p_i objetos monocromáticos da cor i.

Demonstração. Suponhamos que exista uma k-coloração dos $\sum_{i=1}^{k}(p_i - 1) + 1$ objetos tal que toda cor i possui no máximo $p_i - 1$ objetos coloridos com essa cor. Neste caso, há no máximo $\sum_{i=1}^{k} (p_i - 1)$ objetos, uma contradição. □

Teorema 7.9 (Teorema de Ramsey para hipergrafos). Para todo inteiros positivos $p_1, \ldots, p_k$ existe um inteiro positivo n tal que para toda k-coloração das arestas do l-grafo completo $K_n^{(l)}$ existe um subgrafo $K_{p_i}^{(l)}$ monocromático da cor i.

Demonstração. Mostremos, por indução dupla em l e $p_1 + \ldots + p_k$, que

$$R^{(l)}(p_1, p_2, \ldots, p_k) \leq 1 + R^{(l-1)}(R_1, R_2, \ldots, R_k), \tag{7.1}$$

onde $R_i = R^{(l)}(p_1, \ldots, p_i - 1, \ldots, p_k)$.

Para $l = 1$, temos, pelo Lema 7.8, que $R^{(1)}(p_1, p_2, \ldots, p_k)$ existe e é igual a $\sum_{i=1}^{k}(p_i - 1) + 1$.

Suponhamos que o teorema vale para um k-coloração do $(l-1)$-grafo completo. Mostremos, por indução em $p_1 + \ldots + p_k$, que o teorema vale para uma k-coloração do l-grafo completo.

Se algum p_i é menor que l, então o grafo completo $K_{p_i}^{(l)}$ tem cor i. Logo

$$R^{(l)}(p_1, p_2, \ldots, p_k) = \min\{p_1, \ldots, p_k\}.$$

Suponhamos que a desigualdade (7.1) vale para $p_1 + \ldots + p_k - 1$. Pela hipótese de indução (tanto a interna quanto a externa), R_i existem, para todo $1 \leq i \leq k$.

Seja $n = 1 + R^{(l-1)}(R_1, \ldots, R_k)$. Fixemos uma k-coloração das arestas de $K_n^{(l)}$ e v vértice de $K_n^{(l)}$. Pela escolha de n, temos que existe i tal que o vértice v possui pelo menos R_i arestas de cor i incidentes. Temos dois casos:

1. Existe um subgrafo $K_{p_i-1}^{(l)}$ tal que suas arestas tem cor i;
2. Existe um subgrafo $K_{p_j}^{(l)}$ com $j \neq i$ tal que suas arestas possuem a cor j.

Se ocorrer o segundo caso, não há nada para fazer. Suponhamos que ocorreu o primeiro caso. Como v possui R_i arestas de cor i incidentes e não ocorreu o segundo caso, temos que $K_n^{(l)}$ possui um subgrafo $K_{p_i}^{(l)}$ monocromático da cor i. $\square$

7.3 Número de Ramsey para grafos arbitrários

Pela definição do número de Ramsey $r(n, m)$, queremos encontrar grafos com quantidade de vértices suficientemente grande para conter uma cópia de K_n ou $\overline{K_m}$. Podemos generalizar o número de Ramsey substituindo K_n e $\overline{K_m}$ por dois grafos G_1 e G_2 com $|V(G_1)| = n$ e $|V(G_2)| = m$. Neste caso, definimos o número de Ramsey generalizado.

Definição 7.10 Sejam n e m inteiros positivos e G_1 e G_2 grafos com ordem n e m, respectivamente. O *número de Ramsey generalizado* $r(G_1, G_2)$ é o menor inteiro positivo p tal que qualquer grafo G de ordem p ontém uma cópia de G_1 ou seu complemento contém uma cópia de G_2.

Claramente $r(n, m) = r(K_m, K_n)$. Ademais, para todo grafo G_1 e G_2 com ordem n e m, respectivamente, vale $r(G_1, G_2) \leq r(n, m)$. Isto mostra que $r(G_1, G_2)$ está bem definido. Entretanto, pode ocorrer que $r(G_1, G_2)$ seja muito menor que $r(n, m)$ se G_1 e G_2 forem 'esparsos', isto é, a ordem de G_1 e G_2 forem relativamente grande em relação às suas quantidades de arestas.

Uma outra forma de definir o número de Ramsey generalizado é utilizando colorações. De fato, o número $r(G_1, G_2)$ é o menor inteiro positivo p tal que para toda 2-coloração das arestas do grafo completo K_p existe um subgrafo monocromático G_i de cor i.

Apresentaremos alguns resultados para grafos particulares.

Teorema 7.11 (Chvátal,77). Seja T_m uma árvore qualquer de ordem $m \geq 1$ e seja n um natural não nulo. Então

$$r(T_m, K_n) = 1 + (m-1)(n-1).$$

Demonstração. Considere $m > 1$ e $n > 1$, caso contrário o resultado é trivial. Considere $G = (n-1)K_{m-1}$ uma união disjunta de $n-1$ cópias de K_{m-1}. Note que G tem $(m-1)(n-1)$ vértices e não contém nem T_m e nem $\overline{K_n}$. Isso mostra que $r(T_m, K_n) \geq 1 + (m-1)(n-1)$.